EJERCICIOS TEMA 6:

ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

1. Para los siguientes productos, ver cuales de ellos son productos escalares:
   a. En $\mathbb{R}^2$
   $$(x,y)\cdot(x',y') = xx' + 3yy' - xy' - 2yx'$$
   b. En $\mathbb{R}^2$
   $$(x,y)\cdot(x',y') = xx' + xy' + yx'$$
   c. En $\mathbb{R}^3$
   $$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = xx' + 2yy' + 4zz' + xy' + yx'$$
   d. En $\mathbb{R}^2$, dada una matriz cuadrada M de orden 2
   $$(x,y)\cdot(x',y') = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
   e. En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 1
   $$p_1(x)\cdot p_2(x) = \int_0^1 x^2 p_1(x) p_2(x)\,dx$$

2. En $\mathbb{R}^4$ consideremos, con el producto escalar usual, los siguientes subespacios
   $$U \equiv \begin{cases} x+y-z+t = 0 \\ 2x-z+3t = 0 \end{cases}$$
   $$W = < (1,2,-1,0),(0,1,1,0),(1,0,-2,1) >$$
   a. Obtener, usando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal de cada uno de los anteriores subespacios.
   b. Hallar una base del subespacio ortogonal a cada uno de ellos.
   c. Calcular la proyección ortogonal del vector $v = (2,3,-2,1)$ sobre U y también sobre W.

3. En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, sean los siguientes subespacios
   $$U \equiv \begin{cases} x-y-z = 0 \\ x-z = 0 \end{cases}$$
   $$W = < (2,0,-1),(0,-4,1) >$$
   a. Obtener, usando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal de cada uno de

los anteriores subespacios.

b. Hallar una base del subespacio ortogonal a cada uno de ellos.

c. Calcular la proyección ortogonal del vector $v = (3,2,1)$ sobre U y también sobre W.

4. En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar dado por

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = 2xx' + 4yy' + zz'$$

se pide:

a. Obtener, usando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal para el subespacio

$$U =< (1,-1,2),(0,3,-2) >$$

y otra para $U^{\perp}$.

b. Idem para el subespacio

$$W = \left\{(x,y,z) \,:\, x-2y+z = 0,\ 3x-2y-z = 0 \right\}$$

y otra para $W^{\perp}$.

c. Determinar la proyección ortogonal del vector $(-9,6,8)$ sobre U.

d. Idem para $(-9,6,8)$ sobre $U^{\perp}$.

e. Idem para $(-1,0,2)$ sobre W.

f. Idem para $(-1,0,2)$ sobre $W^{\perp}$.

5. En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera el producto escalar definido por

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$$

a. Calcular una base ortonormal para el subespacio dado por

$$W_1 =< x-2, 1-x^2 >$$

b. Hallar el subespacio ortogonal a

$$W_2 =< 1, 1+x >$$

c. Hallar la proyección ortogonal del vector x^2 sobre el subespacio W_1 dado anteriormente.

6. Para cada una de las siguientes matrices reales simétricas, calcular una matriz diagonal semejante y una matriz de paso ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$