EJERCICIOS TEMA 5:

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

1. Calcular los valores propios y los subespacios vectoriales asociados para las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_9 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar cuales de estas matrices son diagonalizables en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, y para las que lo sean, hallar las matrices diagonales asociadas y las matrices de paso correspondientes. Calcular la potencia n-sima de aquellas matrices que sean diagonalizables.

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

estudiar para qué valores de a y b la matriz es diagonalizable. Para aquellos que lo sea, hallar su matriz diagonal asociada y la matriz de paso P.

3. Supongamos que tenemos una matriz cuadrada A de orden 3 de la que sabemos que $f(0,2,1) = (-2,-2,0)$ y que una base para $\ker(A+2I)$ es $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$, donde hemos denotado por f al endomorfismo asociado a la matriz A respecto de la base canónica. Determinar si A es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar la matriz diagonal y la matriz de paso. Estudiar si f es inyectiva y/o suprayectiva.

4. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(e_1) = 4e_1 - e_2;\ f(e_2) = 2e_1 - e_2;\ f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3$$

   a. Hallar la matriz de f en la base B.

b. Comprobar que la anterior matriz es diagonalizable y obtener la matriz diagonal y la matriz de paso asociada.

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica.

a. Discutir, según valores de a y b, si existen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x,y,z) = (1,b,1)$.

b. Para $a = 0$, probar que A es diagonalizable. Obtener la matriz diagonal semejante de A, la base correspondiente y la matriz de paso P.

6. Sea $B = \{u_1,u_2,u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(u_1) = 4u_1;\ f(u_2) = au_1 + u_2 + 3u_3;\ f(u_3) = u_1 + 2u_2 + 2u_3$$

a. Calcular la matriz A del endomorfismo en dicha base. Obtener los valores propios y los valores de a para los cuales f es diagonalizable.

b. Obtener una base de $\mathbb{R}^3$ para la cual la matriz de f sea diagonal, dando dicha matriz diagonal D. Dar otra matriz diagonal D' semejante a A y una matriz de paso asociada a ésta.