EJERCICIOS TEMA 4:

APLICACIONES LINEALES

1. Estudiar cuales de las siguientes aplicaciones $f : U \to V$ son lineales:
   a. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^4,$ dada por $f(x,y,z) = (z, x+y, -z, y-x)$.
   b. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2,$ dada por $f(x,y,z) = (x+y+z, 0)$.
   c. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3,$ dada por $f(x,y,z) = (z, x+y, -z)$.
   d. $U = \mathbb{R}^4, V = \mathbb{R}^2,$ dada por $f(x,y,z,t) = (x-3y+8t, 2x)$.
   e. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3,$ dada por $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, z)$.
   f. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3,$ dada por $f(x,y,z) = (x-y+2z, y-z, x+2z)$.
   g. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R},$ dada por $f(x,y,z) = x-2y+3z$.
   h. $U = V = \mathbb{R}_3[x]$ (polinomios de grado menor o igual que 3), dada por $f(p(x)) = xp'(x)$.
   i. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3,$ dada por $f(x,y,z) = (x, 1, y)$.
   j. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2,$ dada por $f(x,y,z) = (x^2, y+z)$.

2. En los casos del ejercicio anterior en los que la aplicación sea lineal, calcular bases para el núcleo ($ker(f)$) y la imagen ($Im(f)$) y decir si la aplicación correspondiente es inyectiva y/o suprayectiva.

3. Sea $B = \{u, v\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que cumple $f(u) = 5u + 2v$; $f(v) = 3u - v$. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base B.

4. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple $f(1,0) = (2,3,-1)$ y $f(0,1) = (0,-2,3)$. Obtener las siguientes matrices asociadas: $M_{C_2,C_3}(f)$, $M_{B,C_3}(f)$ y $M_{C_2,B'}(f)$, siendo C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$. mientras que las bases B y B' vienen dadas por

$$B = \{(-1,2),(3,0)\};\ B' = \{(0,0,-1),(0,2,1),(-1,1,4)\}$$

5. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

6. Hallar la matriz asociada respecto de las bases canónicas de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que cumple $f(2,0,-1) = (5,3)$, $f(0,1,-3) = (-4,5)$ y $f(-2,3,0) = (-9,4)$.

7. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificando la respuesta):
   a. Existe una aplicación lineal inyectiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuyo núcleo es

$$\ker(f) = \left\{(x,y,z);\ x-y+z = 0\right\}$$

   b. Existe un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que respecto de ciertas bases B y B' tiene por matrices asociadas

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M_{B',B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. El endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de ciertas bases es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

es biyectivo.

8. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+3 & 4 \\ 1 & a+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica:

a. Determinar razonadamente los valores de a para los cuales f^{-1} es aplicación (valores de a para los cuales A es invertible). ¿Cual sería la matriz asociada a f^{-1} respecto de la base canónica? Obtenerla para el caso $a = -2$.

b. Para $a = -1$, calcular $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$, dando ecuaciones y bases y la dimensión de estos subespacios.

c. Discutir, según los valores de a y b, si existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x,y,z) = (1,2b,b)$.

9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}$ y sea $C_3 = \{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica.

a. Obtener las matrices de cambio de base de C_3 a B y de B a C_3.

b. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(u_1) = u_1 + u_2$; $f(u_2) = u_1 + u_3$; $f(u_3) = u_2 - u_3$. Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base B y la matriz referida a la base canónica C_3. ¿Existe alguna relación entre ambas matrices? En caso afirmativo, expresar dicha relación.

c. Si $v = e_1 + 2e_2 - e_3$, hallar su imagen y expresarla en ambas bases.

10. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,-1)\}$ y sea un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$$

a. Calcular x para el cual f no es suprayectiva.

Para dicho valor de x :

b. Calcular la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base canónica.

c. Calcular bases para $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?

d. Calcular las coordenadas de $f(1,1,1)$ respecto de la base B.