EJERCICIOS TEMA 3:

ESPACIOS VECTORIALES

1. Estudiar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que se dan:
   a. $A = \left\{(x,y,z,t);\ 2x - y + z + 3t = 0\right\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   b. $B = \left\{(x,y,z);\ 3x - y = 0,\ z = 3y\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   c. $C = \left\{(x,y,z,t);\ x + 2y - 3z + t = 3\right\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   d. $D = \left\{(x,y,-y,2x);\ x,y \in \mathbb{R}\right\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   e. $E = \left\{(x,y,z,t);\ x = \alpha - \beta,\ y = -\alpha,\ z = 2\alpha + 3\beta,\ t = 0,\ \text{para algunos } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   f. $F = \left\{(x,y);\ xy = 0\right\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   g. $G = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3;\ b = 0\right\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3.

2. Determinar el valor de a y b para que el vector $(1,0,a,b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(1,4,-5,2)$ y $(1,2,3,-1)$.

3. Comprobar si los siguientes sistemas de vectores son LI, SG y/o base de los e. vectoriales correspondientes, hallando, en cada caso, el rango del sistema de vectores:
   a. $\{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   b. $\{(1,2,3,0),(4,3,4,-16),(7,3,4,5)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   c. $\{(1,0,0,-1),(2,1,1,-2),(0,1,1,0),(1,1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   d. $\{(4,-5,7),(3,3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   e. $\{(1,i,2),(0,1,-2i),(3,1,5)\}$ de $\mathbb{C}^3$.
   f. $\{(1,0,-1),(i,2,0),(1,-2i,0),(0,2i,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$.
   g. $\{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual que 2).
   h. $\{(2,0,0),(3,2,0),(4,3,x)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   i. $\{(1,-1,0),(1,1,0)\}$ de $W = \left\{(x,y,0);\ x,y \in \mathbb{R}\right\}$.

4. Dada la base de $\mathbb{R}^2$: $\{(1,2),(2,-1)\}$, hallar las coordenadas del vector $(1,4)$ en dicha base. Si v es otro vector tal que $v_B = (1,-2)$, hallar el vector v.

5. Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(0,2),(1,3)\}$ y $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$, hallar las matrices de cambio de base de B a B', y de B' a B, así como las ecuaciones del cambio de base de B a B', y de B' a B. Determinar también las coordenadas del vector $(2,-6)$ respecto de cada una de las bases.

6. Sea el subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual que 2)
   $$W = < 1 + 3x + x^2, -1 + 2x^2, 3 + 3x + x^2 >$$
   ¿pertenecen los vectores (polinomios) $1 + x^2$ y $7 + 6x$ a W? Dar las coordenadas de éstos en la base que se obtiene para W.

7. Hallar una base, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

a. $W_1 = < (2,-1,0,1),(-2,1,-3,2) >$.
b. $W_2 = < (1,-1,0,1),(2,-1,0,2),(-1,2,0,-1) >$.
c. $W_3 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x-y+z+t = 0,\ y-z = 0\right\}$.
d. $W_4 : \begin{cases} x = \lambda + \alpha + \beta \\ y = \lambda - \alpha + 3\beta \\ z = \lambda + 2\alpha \\ t = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{cases}$
e. $W_5 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x-2y+z = 0\right\}$.

8. Idem para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^3$:
a. $W_1 = < (i,-2i,0),(1,-1,1+3i) >$.
b. $W_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3;\ ix-z = 0,\ x-y+(2+i)z = 0\right\}$.

9. Determinar las ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$, así como también los de $U \cap W$ y $U + W$. ¿Es directa la suma de U y W?:

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x+y+z-t = 0,\ x+2y-z = 0\right\}$$

$$W = < (1,-1,0,3),(2,1,-1,2) >$$

10. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se consideran los subespacios

$$S = < x^2+x-1, x^2+x+1 > \text{ y } T = < x^2+x, -x^2+x-1 >$$

Calcular bases para S, T, $S \cap T$ y $S + T$.

11. Idem para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S = < (1,1,1),(-1,1,0),(2,-2,0) > \text{ y } T = \left\{(x,y,z);\ x+3y-2z = 0\right\}$$