EJERCICIOS TEMA 2:

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Determinar dos matrices $X,\ Y \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tales que

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ X - y = B \end{cases}$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Resolver el sistema $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, para cada uno de los casos

$$a)\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad b)\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};\quad c)\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz no nula C que sea combinación lineal de A y B (es decir, $C = \alpha A + \beta B$ para algunos escalares α y β), que sea no invertible y tal que el primer coeficiente de la diagonal principal sea 2.

4. Sean $A,\ B,\ C \in M_n(\mathbb{R})$. Razonar si es cierto o falso que
   a. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
   b. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
   c. Si A y B son matrices no nulas, entonces AB es no nula.
   d. Si A es no nula y $AB = AC$, entonces $B = C$.

5. Sean $A,\ B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Razonar si son ciertas las siguientes afirmaciones:
   a. $(A^T)^T = A$.
   b. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
   c. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
   d. $(AB)^T = B^T A^T$, suponiendo en este caso que ambas son matrices cuadradas de orden n.

6. Deducir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
   a. El rango de una matriz y el de su traspuesta coinciden.

b. Si A y B son matrices tales que se pueden efectuar los productos AB y BA, entonces A y B son matrices cuadradas.
c. La suma de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.
d. Una matriz de orden 3×4 tiene rango 2 o 3.
e. La suma de dos matrices invertibles es una matriz invertible.

7. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Discutir, según valores de α y β el rango de las siguientes matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & \alpha \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \alpha & -4 \\ -3 & 3 & \beta \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

9. Calcular, por transformaciones elementales (método de Gauss-Jordan), si existe la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Calcular los determinantes de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Calcular, haciendo ceros debajo de la diagonal principal, los determinantes de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Calcular, usando determinantes, la matriz inversa (si es que existe) de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Discutir, según valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, el rango de las siguientes matrices y, cuando sea posible, hallar sus matrices inversas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & 4 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

14. Usando del método de Gauss, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{c} -2x + 3y - 5z = -4 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -1 \end{array} \right. ;\quad \left\{ \begin{array}{c} 2x - 2y + 5z = 5 \\ x + 2y - 6z = -1 \\ 3x - z = 2 \end{array} \right. ;\quad \left\{ \begin{array}{c} x - 2y + 3z + 2t = 2 \\ -2x + 3y - 4z + 5t = -11 \\ 5x - 8y + 11z - 8t = 24 \\ 4x - 6y + 8z - 10t = 22 \end{array} \right. ;\quad \left\{ \begin{array}{c} x - y = 3 \\ z - 2y = 4 \end{array} \right.$$

15. Usando el método de Gauss, discutir y resolver según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{c} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array} \right. ;\quad \left\{ \begin{array}{c} x - y + z = b \\ x + ay + z = b \\ 2x + 2ay + (a+1)z = b \end{array} \right. ;\quad \left\{ \begin{array}{c} x - y - z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x - y + az = b \end{array} \right.$$

16. Discutir el siguiente sistema para los diferentes valores de los parámetros reales:

$$\left\{ \begin{array}{c} ax + 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + az = 0 \\ 3x - y + 2z = b \end{array} \right.$$

Para $a = 2$, comprobar que existe la inversa de la matriz de coeficientes del sistema anterior y, usando dicha inversa, calcular la solución del sistema. Comprobar que se obtiene la misma solución que si se resuelve el sistema anterior por Gauss y por la regla de Cramer.