

EJERCICIOS TEMA 1: CONCEPTOS PREVIOS

1. Hallar $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ e $Y - X$ en cada uno de los siguientes casos:
 - a. $X = \{1, 3, 6, 7\}$, $Y = \{1, 5, 6\}$.
 - b. $X = \{0, a, *, \sqrt{2}\}$, $Y = \{*, a, 0\}$.
 - c. $X = \{1, 2, 3, 7\}$, $Y = \{0, 5, 6\}$.
 - d. $X = \{x \in \mathbb{N}; n \text{ es par}\}$, $Y = \{x \in \mathbb{Z}; 0 < x < 10\}$.

2. Determinar si las siguientes asignaciones son o no aplicaciones:
 - a. A cada número real le asignamos su cuadrado.
 - b. A cada número real le asignamos su raíz cuadrada.
 - c. A cada número real le asignamos su cubo.
 - d. A cada número real le asignamos su raíz cúbica.
 - e. A cada español mayor de edad le asignamos su NIF.
 - f. A cada persona le asignamos su tío.

3. Sea $f: \{1, 3, 6, 7\} \rightarrow \{2, 5, 4\}$ la aplicación definida por

$$f(1) = 5, f(3) = 5, f(6) = 4, f(7) = 5,$$
 Hallar $\text{Im}(f)$, $f(\{1, 3, 7\})$, $f(\{6, 7\})$, $f^{-1}(\{2, 5\})$, $f^{-1}(\{4, 5\})$, $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(2)$.

4. En cada uno de los siguientes casos, decir si la aplicación dada es inyectiva, suprayectiva y/o biyectiva:
 - a. $f: \{1, 3, 6\} \rightarrow \{2, 5, 3\}$ definida por $f(1) = 3, f(3) = 5, f(6) = 2$.
 - b. $f: \{1, 3, 6\} \rightarrow \{2, 5, 3\}$ definida por $f(1) = 5, f(3) = 5, f(6) = 2$.
 - c. $f: \{1, 3, 6\} \rightarrow \{2, 5, 3, 0\}$ definida por $f(1) = 3, f(3) = 5, f(6) = 3$.
 - d. $f: \{1, 3, 6\} \rightarrow \{2, 5, 3, 0\}$ definida por $f(1) = 3, f(3) = 5, f(6) = 0$.
 - e. $f: \{1, 3, 6\} \rightarrow \{2, 5\}$ definida por $f(1) = 2, f(3) = 5, f(6) = 2$.
 - f. $f: \{1, 3, 6, 7\} \rightarrow \{2, 5, 4\}$ definida por $f(1) = 5, f(3) = 5, f(6) = 4, f(7) = 5$.
 - g. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - h. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - i. $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
 - j. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
 - k. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

5. En cada uno de los siguientes apartados, obtener las composiciones pedidas:
 - a. $g \circ f$ y $f \circ g$ siendo $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b. $h \circ g \circ f$ siendo $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x - 1, g(x) = x^2$ y $h(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - c. f^4 siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

6. Determinar las inversas de las siguientes funciones:
 - a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b. $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ definida por $f(x) = \frac{9x-4}{3x+6}, \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

7. Realizar las siguientes operaciones relacionadas con números complejos:
- a. Dados $z = 1 - i$ y $u = 4 + 4\sqrt{3}i$, hallar sus módulos y argumentos, así como realizar los cálculos

$$\bar{z} + 6u; \quad 3z\bar{u}; \quad z|u|i; \quad z^3; \quad \frac{2u}{-\bar{z}}$$

- b. i^{101} .
- c. Hallar las seis raíces sextas en \mathbb{C} de 1.
- d. Hallar las cuatro raíces cuartas del complejo $z = -1 + \sqrt{3}i$.

SOLUCIONES:

1. $X \cup Y = \{1, 3, 5, 6, 7\}$, $X \cap Y = \{1, 6\}$, $X - Y = \{3, 7\}$ e $Y - X = \{5\}$.

2. Todas son aplicaciones a excepción de (b) y (f).

3. $Imf = \{4, 5\}$, $f(\{1, 3, 7\}) = \{5\}$, $f(\{6, 7\}) = \{4, 5\}$, $f^{-1}(\{2, 5\}) = \{1, 3, 7\}$,
 $f^{-1}(\{4, 5\}) = \{1, 3, 6, 7\}$, $f^{-1}(5) = \{1, 3, 7\}$, $f^{-1}(4) = \{6\}$ y $f^{-1}(2) = \emptyset$.

4. (a) Biyectiva (luego inyectiva y suprayectiva también); (b) No cumple nada; (c) No cumple nada; (d) Sólo inyectiva; (e) Sólo suprayectiva; (f) No cumple nada; (g) Biyectiva; (h) No cumple nada; (i) Sólo inyectiva; (j) No cumple nada; (k) No cumple nada.

5. (a) $(g \circ f)(x) = 4x^2$, $(f \circ g)(x) = 2x^2$.

(b) ;

(c) $f^4(x) = f^3(2x - 1) = f^2(4x - 3) = f(8x - 7) = 16x - 15$.

6. (a) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{6}$; (b) $f^{-1}(x) = \frac{6x+4}{-3x+9}$.

7. (a) $|z| = \sqrt{2}$, $argz = 315^\circ = \frac{7\pi}{4}$, $|u| = 8$, $argu = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$; $\bar{z} + 6u = 25 + (1 + 24\sqrt{3})i$,
 $3z\bar{u} = 12 - 12\sqrt{3} - 12(1 + \sqrt{3})i$,

$z|u|i = 8 + 8i$, $z^3 = -2 - 2i$, $\frac{2u}{-\bar{z}} = 4 - 4\sqrt{3} + (4 + 4\sqrt{3})i$

(b) i .

(c)

(d)