Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 13: ECUACIONES DIFERENCIALES.

PROGRAMA DETALLADO:

GENERALIDADES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES.

¿Qué es una ecuación diferencial y qué significa?, ¿donde y como se originan las ecuaciones diferenciales?, ¿cual es su utilidad?, ¿qué hemos de hacer ante una ecuación diferencial? En los temas siguientes intentaremos dar respuesta a éstos y otros interrogantes.

Ecuaciones diferenciales y su clasificación.

Definition *Una ecuación en la que aparecen derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se llama **ecuación diferencial**.*

Example *Son ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad \left(ó\ y'' + xy(y')^2 = 0\right)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = sen\,t \qquad \left(ó\ x^{IV} + 5x'' + 3x = sen\,t = 0\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (\textit{Ecuación de propagación del calor})$$

Empezaremos por clasificar las ecuaciones diferenciales según que tengan una o más variables independientes:

Definition *Una ecuación diferencial que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una variable independiente se llama **Ecuación Diferencial Ordinaria (edo).***

*Una ecuación diferencial que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a más de una variable independiente se llama **Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)**.*

Example *En el ejemplo anterior, las dos primeras son edo y la 3^a y 4^a son EDP.*

Remark *En el resto de la asignatura nos centraremos en el estudio de las edo.*

Las edo también se pueden clasificar según el orden de la derivada de mayor orden que contiene la ecuación:

Example *En el ejemplo anterior, la ecuación (1) es de 2º orden, mientras que la ecuación (2) es de 4º orden.*

Example *a)* $y' + xy + tag\, x = 0$ *es de 1er orden.*

b) $y''' + 3y'' + 6xy - x = 0$ *es de 3er orden.*

c) $x\, sen\, y + y^4 y' + 6(y''')^5 = 0$ *es de 3er orden.*

Las edo también pueden clasificarse en lineales y no lineales:

Definition *Una* ***ecuación diferencial lineal de n-simo orden*** *es una ecuación de la forma*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

(es decir, la variable y y sus derivadas aparecen sólo en 1er grado y no hay productos de y con alguna de sus derivadas, ni productos entre las derivadas. Además no hay funciones transcendentes de y o sus derivadas).

Example *a)* $y'' + 5y' + 6y = 0$ *es lineal de 2º orden.*

b) $y^{IV} + x^2 y''' + x^3 y' = xe^x$ *es lineal de 4º orden.*

c) $y'' + 5y' + 6y^2 = 0$ *es no lineal.*

d) $y'' + 5(y')^2 + 6y = 0$ *es no lineal.*

e) $y'' + 5yy' + 6y = 0$ *es no lineal.*

Cuando tenemos más de una expresión que nos relaciona las distintas variables dependientes y sus derivadas, ya sean edo o EDP, éstas se representan simultaneamente, formando un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o sistemas de ecuaciones diferenciales parciales:**

Example *Las ecuaciones del movimiento de un punto material vienen dadas por*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ \\ \frac{d^2y}{dt^2} = g\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ \\ \frac{d^2z}{dt^2} = h\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \end{array}\right\}$$

que es un sistema de edo de orden 2.

Example *La diferencia de potencial U entre los hilos de una línea y la intensidad I que circula por ellos están ligadas por*

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} &= l\frac{\partial I}{\partial t} + rI \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= l\frac{\partial U}{\partial t} + gI \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema en derivadas parciales de 1er orden.

Observaciones sobre las soluciones.

Definition *Dada una edo de n-simo orden* $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$*, diremos que una función* $f : I \to \mathbb{R}$*, que admite derivada hasta el orden n, es una* ***solución de la edo*** *anterior, si* $F(x,f(x),f(x),f''(x),\ldots,f(^{(n)}(x))$ *está definida* $\forall x \in I$*, y se tiene que*

$$F(x,f(x),f'(x),f''(x),\ldots,f^{(n)}(x)) = 0,\ \forall x \in I$$

Example *a)* $y'' + y = 0$ *tiene por solución* $y = f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x$.

b) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ *es solución de la edo* $x + yy' = 0$*, para* $-5 < x < 5$.

Remark *Dada la edo*

$$y' + 2y = 0$$

las funciones $y = e^{-2x}$, $y = 3e^{-2x}$, $y = \frac{1}{2}e^{-2x}$*, son soluciones de dicha ecuación. Evidentemente la función* $y = Ce^{-2x}$*, siendo C una constante arbritraria cualquiera, también es solución, y la denominaremos* ***solución general*** *de la misma.*

Definition *Dada la solución general* $y = f(x,C)$ *de una edo, asignándole valores concretos a la constante C, se obtienen las* ***soluciones particulares*** *de dicha ecuación.*

Remark *En la práctica, las soluciones particulares de una edo se obtienen generalmente a partir de* ***condiciones iniciales*** *que proporcionan el valor de la variable dependiente o de una de sus derivadas (si es una edo de orden n) para un valor particular de la variable independiente. Al conjunto formado por la edo y las condiciones iniciales se le llama* ***Problema de Valor Inicial (PVI).***

Example *Verificar que* $y = x^2 + C$ *es solución de* $y' = 2x$*. Hallar la solución particular determinada por* $y(1) = 4$.

Example *Demostrar que* $x^2 + y^2 = C^2$ *es solución de* $y' = -\frac{x}{y}$ *y encontrar la solución particular tal que* $y(3) = 4$.

Example *Demostrar que* $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ *es una solución de* $y'' + y' - 6y = 0$*. Encontrar la solución particular tal que* $y(0) = 6, y'(0) = 2$.

Remark *Como se ha comentado antes, por lo general, para poder encontrar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe de igualarse al número de constantes de la solución general.*

Significado geométrico de las edo y de sus soluciones.

A partir de ahora nos vamos a centrar en las edo de 1er orden, es decir en ecuaciones de la forma $F(x,y,y') = 0$ o de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (\textbf{Forma Normal})$$

Recordemos que una función real $G(x)$ puede ser representada por una curva $y = G(x)$ en el plano XY, y que el valor de su derivada $G'(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = G(x)$ en el punto x.

Así, la edo $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ puede ser interpretada geométricamente de la siguiente manera: Se quiere encontrar una curva que en el punto (x,y) tenga por tangente una recta cuya pendiente sea $f(x,y)$. Por tanto, resolver el PVI

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

consiste en hallar la(s) curva(s) que, pasando por el punto (x_0,y_0) tenga(n) la propiedad de que las pendientes de las rectas tangentes coincidan con $f(x,y)$ en (x_0,y_0).

Supongamos que $y' = f(x,y)$ tiene por solución general $y = F(x,C)$. Esta solución general, también llamada **Familia Uniparamétrica**, se representa en el plano por una familia de curvas (llamadas **Curvas Integrales** o **haz de curvas**), las pendientes de las cuales están dadas por la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$.

Example *Sea $y' = 2x$. La solución general de esta edo es $y = x^2 + C$, cuyas gráficas (curvas integrales) son una familia de parábolas. La pendiente de cada una de estas parábolas viene dada por la ecuación diferencial (cada una de estas parábolas tiene por pendiente $2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, en el punto (x,y)).*

Construcción de la ecuación diferencial dada su solución general.

Dada la familia uniparamétrica de funciones $F(x,y,C) = 0$ nos preguntamos si esta función define implícitamente a la solución general de alguna edo de 1er orden. Para ello, si derivamos respecto de x en la expresión $F(x,y(x),C) = 0,$ obtenemos

$$\frac{\partial F(x,y,C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y,C)}{\partial y} y' = 0$$

Sólo hemos de eliminar C y se obtendrá una expresión $G(x,y,y') = 0$, que es la ecuación diferencial de la que $F(x,y,C) = 0$ es la solución gneral.

Exercise *Encontrar la edo cuya solución general es $y = Cx^2$.*

Exercise *Idem para la familia de círculos con centro en la recta $y = x,$ y que son tangentes al eje 0Y.*

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

Teorema básico de existencia y unicidad.

Lo primero que hemos de plantearnos cuando tenemos un PVI es ver si éste tiene solución y si la solución es única. De tal menester se ocupa el siguiente resultado (del que se omite su demostración):

Theorem *Sea la edo de 1er orden* $y' = f(x,y)$*, donde*

a) f *es continua en algún dominio* $D \subset \mathbb{R}^2$.

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ *es continua en* $D \subset \mathbb{R}^2$ *y sea* $(x_0, y_0) \in D$.

Entonces existe una solución única Φ *del PVI*

$$\left.\begin{array}{r} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

definida en algún intervalo lo suficientemente pequeño de x_0*, que satisface la condición* $y(x_0) = y_0$.

Example *Varios ejemplos.*

Variables separadas.

Son las edo de 1er orden que pueden expresarse en la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M es continua de x y N es continua de y. Para solucionarlas se expresará en la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

o bien

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

e integraremos en ambos miembros para obtener la solución general

$$\int M(x)dx = -\int N(y)dy$$

Example *Hallar la solución general de*

$$(x-4)y^4 - x^3(y^2-3)\frac{dy}{dx} = 0$$

Example *Solucionar el PVI*

$$\left.\begin{array}{c} xydx + e^{-x^2}(y^2-1)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Ecuaciones homogéneas.

Definition *Una función* $f(x,y)$ *es* ***homogénea*** *de grado* $\alpha \in \mathbb{R}$*, si*

$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

Definition *Una edo de 1er orden* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *se dice* ***homogénea*** *si las funciones* M *y* N *son homogéneas del mismo grado.*

Estas ecuaciones se resuelven siempre mediante separación de variables, aunque previamente hay que realizar un cambio de variables:

Proposition *Si* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *es una ecuación homogénea, entonces se transforma en una edo en variables separadas mediante el cambio* $y = v \cdot x$, *siendo v una función diferenciable de x.*

Example *Hallar la solución general de*

$$(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$$

Example *Idem para*

$$\left(x\,sen\,\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$$

Ecuaciones diferenciales exactas. Factores integrantes.

Definition *Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es* ***exacta*** *si existe una función $f(x,y)$, con derivadas parciales continuas, tal que*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Remark *La solución general de una ecuación diferencial exacta viene dada por*

$$f(x,y) = Cte$$

ya que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se transforma en $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0$, lo que quiere decir que $df(x,y) = 0$, por lo que $f(x,y) = Cte$.

Veamos un resultado práctico que nos asegura cuando una edo es exacta:

Theorem ***(Criterio de exactitud)*** *Sea $f(x,y)$ una función que admite derivadas parciales continuas en $D \subset \mathbb{R}^2$. Entonces*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{ es exacta } \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Example *a) La edo $(xy^2 + x)dx + yx^2dy = 0$ es exacta, ya que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2yx = \frac{\partial N}{\partial x}$$

b) La edo $\cos y dx + (y^2 - x\,sen\,y)dy = 0$ es exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -sen\,y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Sabemos que la solución general de una ecuación exacta viene dada por $f(x,y) = Cte$. Veamos como se puede hallar esta $f(x,y)$:

Como $f(x,y)$ ha de cumplir $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, integrando respecto a la variable x, se tiene

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \qquad (*)$$

Por tanto, para hallar $f(x,y)$ sólo nos falta determinar $g(y)$.

Como también $f(x,y)$ ha de cumplir $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, si derivamos respecto y la expresión $(*)$, se tiene

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int M(x,y)dx + g(y)\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int M(x,y)dx\right\} + g'(y)$$

expresión que nos permitirá hallar $g(y)$. Así, la solución general de una ecuación exacta viene dada por

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = C$$

Example *Probar que*

$$(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$$

es exacta y hallar su solución general.

Example *Resolver el PVI*

$$(\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2)dx + 2xydy = 0$$

con $y(\pi) = 1$.

Factores integrantes.

Si una edo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta, puede darse la posibilidad de convertirla en exacta si se multiplica por un adecuado factor $\mu(x,y)$.

Example *Probar que la ecuación* $2ydx + xdy = 0$ *no es exacta, pero que si se multiplica esta ecuación por* $\mu(x,y) = x$, *la ecuación resultante sí que es exacta.*

Example *Idem para* $ydx - xdy = 0$, *y para* $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$.

Definition *Una función* $\mu(x,y)$, *que admite derivadas parciales continuas en un cierto dominio D, es un* ***factor integrante*** *de la ecuación* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, *si*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

El problema se presenta entonces a la hora de determinar $\mu(x,y)$. Vamos a estudiar unos casos particulares en que sí es posible determinar $\mu(x,y)$:

- Si la expresión

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = h(x)$$

es una función que sólo depende de x, entonces

$$\mu(x,y) = e^{\int h(x)dx}$$

es un factor integrante.

Example *Integrar la edo*

$$(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0$$

- Si la expresión

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = k(y)$$

es una función que sólo depende de y, entonces

$$\mu(x,y) = e^{-\int k(y)dy}$$

es un factor integrante.

Example *Integrar la edo*

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \log x)dy = 0$$

mediante la determinación de un factor integrante.

- Si la expresión

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}} = g(z)$$

es una función que sólo depende de z, entonces

$$\mu(z) = e^{\int g(z)dz}$$

es un factor integrante.

Example *Integrar la edo*

$$(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$$

mediante la determinación de un factor integrante que depende de $x + y^2$.

Example *Idem para*

$$(x - xy)dx + (x^2 + y)dy = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante que depende de $x^2 + y^2$.

Ecuaciones diferenciales lineales (de primer orden).

Recordamos que llamábamos **ecuación diferencial lineal de orden** n a una ecuación de la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Como ahora solo estudiamos las edo de 1er orden, llamaremos **ecuación diferencial lineal de 1er orden** a toda ecuación de la forma

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

o equivalentemente a toda ecuación

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Se demuestra que estas ecuaciones siempre tienen solución caso de que f y g sean continuas en un determinado intervalo, y que esta solución es única. Estas ecuaciones pueden resolverse de dos formas:

a) Haciendo un cambio $y = uv$, y se obtienen dos ecuaciones en variables separadas. (No se hará de esta forma por ser complicado).

b) Reduciéndolas a una ecuación exacta hallando previamente un factor integrante:

La expresión $y' + f(x)y = g(x)$ se puede expresar en la forma

$$(f(x)y - g(x))dx + dy = 0$$

Como $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$, entonces sabemos que

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

es un factor integrante. Así, como la ecuación

$$g(x)e^{\int f(x)dx} = (y' + f(x)y)e^{\int f(x)dx}$$

es exacta, se tiene

$$g(x)e^{\int f(x)dx} = \frac{d}{dx}\left(ye^{\int f(x)dx}\right)$$

por lo que

$$ye^{\int f(x)dx} = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C$$

y así

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right)$$

será la solución general de este tipo de ecuaciones.

Example *Integrar las siguientes edo:*

$a)\ y' - \frac{1}{x}y = x^2$

$b)\ y'\cos x + y\,\mathrm{sen}\,x = 1$

$c)\ y' - \frac{2ax}{1-x^2y} = 2x \qquad (a \neq 0, -1)$

$d)\ (\mathrm{sen}^2 x - y)dx = \mathrm{tag}\,x dy$

$e)\ y' = y - \log x + \frac{1}{x}$

Example *Resolver los siguientes PVI:*

$a)\ y' = 3x^2y + x^2 \qquad con \qquad y(0) = 1$

$b)\ y' + y = e^{-x} \qquad con \qquad y(0) = 1$

Otros tipos de edo de 1er orden.

Ecuación de Bernouilli.

Es un tipo de edo muy relacionado con las ecuaciones lineales de 1er orden. Se trata de ecuaciones de la forma

$$y' = f(x)y + g(x)y^n, \qquad n \in \mathbb{R}, n \neq 0, 1$$

Se integra reduciéndola al tipo lineal mediante el cambio

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}$$

Example *Integrar*

$$y' = 2y + y^3$$

Example *Integrar*

$$xy' - y = y^2\,\mathrm{sen}\,x$$

Ecuación de Ricati.

Es un tipo particular de edo de la forma

$$y' = f(x)y + g(x)y + h(x)y^2$$

En general, esta ecuación no puede reducirse a cuadraturas, es decir, a la determinación de funciones primitivas. Ahora bien, si se conoce una integral particular y_1, sí que es posible reducir la ecuación a una ecuación lineal. Para ello, basta con realizar el cambio dado por

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

Example *Reducir la ecuación de Ricati*

$$y' = 1 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2$$

a una ecuación lineal y resolverla.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR.

Introducción: Teoría general para ecuaciones lineales de orden n.

Una **ecuación diferencial de orden** $n > 1$ es toda expresión de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

donde $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. En esta sección nos vamos a ocupar de un tipo particular de estas ecuaciones de orden n, como van a ser las **ecuaciones diferenciales lineales de orden** n**.**

Estas son ecuaciones de la forma

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

donde para $0 \leq i < n$, $a_i(x)$ y $b(x)$ son funciones reales de variable real definidas en un intervalo de la recta real I. Siempre que $a_n(x)$ sea no nula, podremos escribir la ecuación en la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

Según que sea $b(x)$, diremos que la ecuación es **homogénea** (si $b(x)$ es nulo) o **no homogénea** (si $b(x)$ es no nulo), es decir, si $q(x)$ es o no nulo. Además la ecuación se dirá de **coeficientes constantes** cuando $p_i(x)$ sean constantes, es decir, cuando $p_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$.

Para este tipo de ecuaciones se verifican los siguientes resultados:

Theorem *El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = 0$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$*, esto es, cualquier solución y de la misma es de la forma*

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \ldots + c_n \cdot y_n$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *e* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *son soluciones particulares linealmente independientes de dicha ecuación.*

Theorem *Dadas* $y_1, y_2, \ldots, y_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *soluciones particulares de la ecuación homogénea*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = 0$$

son equivalentes:

a) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *son linealmente independientes.*

b) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$*.*

c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$.

La teoría general, en lo que a la estructura de las soluciones se refiere, quedará cerrada con la siguiente caracterización de las ecuaciones no homogéneas:

Theorem *El conjunto de soluciones de la ecuación*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \ldots + c_n \cdot y_n + y_p$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación homogénea e y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Ecuación lineal de coeficientes constantes y homogénea

Consideraramos en este apartado un caso particular de ecuaciones de la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

en las que $p_i(x) = p_i = cte$ y $q(x) = 0$, es decir ecuaciones del tipo

$$y^{(n)} + p_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1 \cdot y' + p_0 \cdot y = 0$$

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones puede ser

$$y^{IV} - y''' + y'' + y = 0$$

y veremos como, de una forma sencilla, es posible obtener todas las soluciones de esta edo lineal. Para ello lo estudiaremos inicialmente para la ecuación de orden 2, y con posterioridad veremos como se puede generalizar a ecuaciones diferenciales lineales de orden superior:

Ecuación de orden dos

Sea la ecuación diferencial lineal de 2º orden y de coeficientes constantes y homogénea dada por

$$a_1 \cdot y'' + a_2 \cdot y' + a_3 \cdot y = 0$$

donde consideraremos que $a_1 \neq 0$. Así, esta edo puede escribirse en la forma

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \qquad (*)$$

Solucionar esta ecuación requiere encontrar una función $y = f(x)$ que tenga la propiedad que si esta $f(x)$ y sus derivadas primera y segunda se multiplican por ciertas ctes y se suman los productos resultantes, el resultado sea igual a 0. Para que esto ocurra, necesitaremos de una $f(x)$ tal que f' y f'' sean múltiplos de f. Así, ¿qué funciones conocemos que tengan la propiedad que $f'(x) = cte \cdot f(x)$ y tal que $f''(x) = cte \cdot f(x)$. Una función que verifica ésto es $f(x) = e^{r \cdot x}$. Así, si sustituimos en $(*)$, tendrá que ser

$$r^2 e^{r \cdot x} + p \cdot r \cdot e^{r \cdot x} + q e^{r \cdot x} = 0$$

ó lo que es lo mismo, se ha de verificar

$$r^2 + p \cdot r + q = 0$$

expresión a la que llamaremos **ecuación característica** de la ecuación inicial $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$.

De todo ésto deducimos que si $f(x) = e^{r \cdot x}$ es una solución, entonces r debe ser tal que

verifique la ecuación característica anterior. Por ello, distinguiremos 3 casos según sean las dos raíces (a las que denotaremos por m_1 y m_2) de la ecuación característica
$r^2 + p \cdot r + q = 0$:

- m_1 y m_2 son reales distintas: En este caso $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$ son soluciones de $(*)$ (ya que se verifica la ec. característica) y puesto que ambas son soluciones independientes al ser

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} = e^{(m_1+m_2)x}(m_2 - m_1) \neq 0$$

  la solución general de $(*)$ vendrá dada por

$$y = c_1 \cdot e^{m_1 x} + c_2 \cdot e^{m_2 x}$$

  Example *Resolver $y'' - 3y' + 2y = 0$.*

- m_1 y m_2 son reales iguales: En este caso $y_1 = e^{m_1 x}$ es una única solución de (*). Puesto que la solución de (*) viene dada por una combinación lineal de dos soluciones que sean linealmente independientes, necesitamos de una segunda solución particular y_2 que sea independiente con y_1. ¿Cómo determinar esta y_2? La respuesta nos la da el siguiente resultado:

Proposition *Si $y_1 = e^{m_1 x}$ es una solución particular de $(*)$, entonces $y_2 = xe^{m_1 x}$ también es solución particular de $(*)$ y es linealmente independiente de y_1.*

  Por lo tanto, en este caso la solución general de $(*)$ viene dada por

$$y = c_1 \cdot e^{m_1 x} + c_2 \cdot xe^{m_2 x} = (c_1 + c_2 \cdot x)e^{m_1 x}$$

  Example *Resolver $y'' - 6y' + 9y = 0$.*

- m_1 y m_2 son complejas conjugadas: Sean entonces $m_1 = a + bi$ y $m_2 = a - bi$. De nuevo se tiene en este caso que $y_1 = e^{m_1 x} = e^{(a+bi)x}$ e $y_2 = e^{m_2 x} = e^{(a-bi)x}$ son soluciones de (*). Antes de probar que son linealmente independientes, y puesto que estas funciones son complejas, vamos a ver como es posible encontrar, a partir de ellas, dos soluciones que sean reales y linealmente independientes: Por las fórmulas de Euler se tiene

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

  de donde

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{bix} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$
$$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}e^{-bix} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

  Si sumamos y restamos ambas expresiones se llega a

$$y_1 + y_2 = 2e^{ax}\cos bx$$
$$y_1 - y_2 = 2ie^{ax}\sin bx$$

  de donde

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos bx$$
$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax}\sin bx$$

Por ello, en lugar de tomar y_1 e y_2 como soluciones particulares de (*), tomaremos $\frac{y_1+y_2}{2}$ e $\frac{y_1-y_2}{2i}$ (que también son soluciones particulares de (*) al ser combinaciones lineales de soluciones de (*)), es decir, tomaremos como soluciones particulares a las funciones reales $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\sin bx$. Como ambas funciones son linealmente independientes (probar que su wronskiano es no nulo), tendremos que la solución general de $(*)$ viene dada por

$$y = c_1 \cdot e^{ax}\cos bx + c_2 \cdot e^{ax}\sin bx = e^{ax}(c_1 \cdot \cos bx + c_2 \cdot \sin bx)$$

Example *Resolver $y'' - 6y' + 25y = 0$.*

Ecuación de orden n.

Para el caso más general de una ecuación diferencial lineal de orden n

$$y^{(n)} + p_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1 \cdot y' + p_0 \cdot y = 0$$

se actuará como en el caso de la de 2º orden, es decir, resolveremos la correspondiente ecuación característica, y según sean las soluciones de la misma usaremos las soluciones particulares halladas en el caso de la ecuación de 2º orden, de manera que, al final, la solución general será una combinación lineal de soluciones de la forma $e^{m_1 x}$ (para todas aquellas soluciones de la ec. característica m_1 que sean simples), o de soluciones tipo $xe^{m_1 x}$ (si m_1 es raiz doble), o del tipo $x^2 e^{m_1 x}$ (si m_1 es raiz triple), etc., mientras que para el caso de raices complejas conjugadas será combinación lineal de funciones de la forma $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\sin bx$, por cada par de raíces conjugadas.

En el caso de estas ecuaciones lineales de mayor orden, el problema radica en la dificultad de resolver la ecuación característica, como observamos en el siguiente ejemplo:

Example *Así, para resolver la ecuación diferencial*

$$y^{VI} - 3y^{V} - 5y^{IV} + 17y''' + 18y'' - 68y' + 40y = 0$$

deberemos calcular las raíces de la ecuación

$$x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 17x^3 + 18x^2 - 68x + 40 = 0$$

que son $x_1 = 1$ (simple), $x_2 = 2$ (triple) y $x_3 = -2 \pm 2i$ (simples). Entonces, la solución general de la ecuación anterior viene dada por

$$y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot xe^{2x} + c_4 \cdot x^2 e^{2x} + c_5 \cdot e^{-2x} cos(-2x) + c_6 \cdot e^{-2x} sin(-2x) =$$
$$= c_1 \cdot e^{x} + (c_2 + c_3 \cdot x + c_4 \cdot x^2)e^{2x} + e^{-2x}(c_5 \cdot cos(2x) - c_6 \cdot sin(2x))$$

Ecuación lineal de coeficientes constantes y no homogénea

Consideraremos en este caso la ecuación de orden dos dada por

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \qquad (**)$$

donde los coeficientes son constantes pero el término no homogéneo $f(x) \neq 0$ es una función de x que supondremos continua. Por el último teorema del primer apartado de esta sección, sabemos que la solución general de esta ecuación viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada a $(**)$, y que ya sabemos hallar en virtud del apartado anterior, más una solución particular de $(**)$, es decir

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH}$$

Por tanto solo tenemos que centrarnos en como hallar una solución particular de la ecuación no homogénea. Para ello, utilizaremos el conocido como **Método de los coeficientes indeterminados**:

- **Regla 1:** Supongamos que $f(x)$ es una función tal que al derivarla repetidamente se obtienen solamente un nº finito de expresiones linealmente independientes (después veremos cuales son las funciones $f(x)$ que verifican esta condición). Entonces podemos obtener la solución particular de la ec. no homogénea del siguiente modo:
  - Supondremos que y_{PNH} es una combinación lineal arbitraria (con coeficientes por determinar) de todos los términos linealmente independientes que aparecen en $f(x)$ y en sus sucesivas derivadas.
  - Sustituiremos esta y_{PNH} en la ecuación inicial.
  - Determinaremos los coeficientes que aparecen en y_{PNH} de manera que la ecuación resultante se satisfaga identicamente.

Remark *El tipo de funciones $f(x)$ que poseen un número finito de derivadas que sean linealmente independiente está formado por las funciones k (cte), x^n, e^{kx}, $\cos kx$, $\sin kx$ y cualquier otra que se obtenga por un número finito de sumas, restas o productos de éstas.*

Example *Resolver la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 2e^{4x}$.*

Example *¿Qué ocurre si intentamos resolver por este método la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 2e^{3x}$?*

- **Regla 2:** Si alguno de los términos de la expresión que hemos considerado para y_{PNH} aparece también en la solución general de la ec. homogénea y_{GH}, entonces antes de sustituir y_{PNH} en la ecuación inicial (para hallar los coeficientes indeterminados) lo multiplicaremos por la menor potencia positiva de x que elimine dicha duplicación.

Exercise *Volver a realizar el ejemplo anterior.*

Exercise *Ver más ejemplos.*

Podemos dar una tabla que nos indique como será y_{PNH} según sea el término no homogéneo $f(x)$:

Si $f(x)$ es de la forma:	y_{PNH} será del tipo:
α (cte)	A (cte)
αx^n	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$
αe^{mx}	Ae^{mx}
$\alpha\cos(kx)$ o $\alpha\sin(kx)$	$A\cos(kx) + B\sin(kx)$
$\alpha x^n e^{mx}\cos(kx)$ ó $\alpha x^n e^{mx}\sin(kx)$	$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)e^{mx}\cos(kx) + (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n)e^{mx}\sin(kx)$

Remark *Cuando $f(x)$ sea la suma de varios términos de la anterior tabla, y_{PNH} será la suma de las expresiones de y_{PNH} correspondientes a cada uno de estos términos.*

Example *Varios ejemplos.*

Aplicación de estas ecuaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes (homogéneos y no homogéneos)

Aunque la teoría de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales da lugar a un tema aparte (aparece desarrollado como Anexo con todo detalle en la última sección de este capítulo), la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (ya sean o no homogéneos) pueden reducirse, especialmente si se trata de pocas ecuaciones con pocas incógnitas (por ejemplo de 2 o de 3 ecuaciones con 2 o 3 incógnitas), a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de 2º o de 3er orden con coeficientes constantes (y homogéneas o no). Antes de verlo con un ejemplo, introduciremos brevemente los sistemas a los que queremos hacer referencia (lo que viene a continuación está extraído de la última sección de este capítulo):

Definition *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es toda expresión de la forma*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

Si denotamos por

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T, \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$

el sistema anterior puede escribirse en la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

Definition *Un sistema se dirá* ***homogéneo*** *si $\boldsymbol{b}(x) = (0, 0, \ldots, 0)$, y en caso contrario se dirá* ***no homogéneo****.*

Definition *Un sistema se dirá de* ***coeficientes constantes*** *si la matriz $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}$ es constante.*

Example *El sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2 \\ \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

es de coeficientes constantes, pero no es homogéneo ($\boldsymbol{b}(x) = (1 - x^2, e^{-x})$), mientras que el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

es homogéneo de coeficientes constantes.

Entonces, en este último apartado de esta sección, vamos a resolver sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

donde **A** es una matriz cuadrada de coeficientes constantes, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T$ es un vector columna (pudiendo ser o no nulo) formado por funciones reales y continuas en un intervalo real I e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, para lo cual reduciremos dicho sistema a una ec. diferencial lineal.

Veámoslo como hacerlo con unos ejemplos:

Example *Imaginemos que pretendemos resolver el sistema homogéneo dado por*

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

Si despejamos y_1 de la 2^a ecuación, tendremos $y_1 = y_2 - y_2'$, de donde $y_1' = y_2' - y_2''$. Si sustituimos entonces en la primera ecuación, tendremos

$$y_2' - y_2'' = 3(y_2 - y_2') + y_2$$

o lo que es lo mismo

$$y_2'' - 4y_2' + 4y_2 = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal de 2^o orden homogénea, y que resolveremos fácilmente sin mas que conocer las raíces de su ecuación característica. Una vez hallada y_2 podremos hallar y_1, al ser $y_1 = y_2 - y_2'$.

Example *Si lo que queremos es resolver el sistema no homogéneo*

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 5y_2 + 1 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + e^x \end{cases}$$

podemos actuar de forma similar: Despejando y_1 de la 2^a ecuación, tendremos $y_1 = y_2 - y_2' + e^x$, de donde $y_1' = y_2' - y_2'' + e^x$. Si sustituimos entonces en la primera ecuación, tendremos

$$y_2' - y_2'' + e^x = -(y_2 - y_2' + e^x) + 5y_2 + 1$$

o lo que es lo mismo

$$y_2'' + 4y_2 = 2e^x - 1$$

que es una ecuación diferencial lineal de 2^o orden no homogénea, y que resolveremos fácilmente sin mas que solucionar primero la ecuación homogénea asociada y sumarle a la misma una solución particular (que hallaremos a través del método de los coeficientes indeterminados). Una vez hallada y_2 podremos hallar y_1, al ser $y_1 = y_2 - y_2' + e^x$.

Remark *Este proceso de reducir sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior es aconsejable cuando tengamos un sistema con pocas ecuaciones (2 ó 3 a lo sumo). Para el caso de más ecuaciones tendremos que aplicar lo que aparece como Anexo en la última sección de este capítulo.*

Ecuación lineal de coeficientes variables

Casos particulares: Ecuaciones de Cauchy-Euler y de Legendre

Estas ecuaciones van a ser un caso particular de coeficientes variables, pero que pueden, mediante un adecuado cambio de variable, reducirse a ecuaciones lineales de coeficientes constantes estudiadas con anterioridad.

Así, la ecuación de **Cauchy - Euler** es de la forma

$$x^n \bullet y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} \bullet y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x \bullet y' + a_0 \bullet y = q(x)$$

mientras que la ecuación de Legendre es más general que la anterior, en concreto, de la forma

$$(\alpha x + \beta)^n \bullet y^{(n)} + a_{n-1}^{n-1}(\alpha x + \beta) \bullet y^{(n-1)} + \ldots + a_1(\alpha x + \beta) \bullet y' + a_0 \bullet y = q(x)$$

Para resolver la ec. de Cauchy - Euler aplicaremos el cambio $x = e^t$ (para el caso de la de Legendre el cambio será $\alpha x + \beta = e^t$) pudiendose obtener de esta forma una ecuación lineal de coeficientes ctes. Por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$x^2 \bullet y'' + \frac{11}{3} x \bullet y' - y = 0$$

el cambio $x = e^t$ nos da

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x}$$

donde $\dot{y}$ representa la derivada de y respecto de la variable t. Si calculamos la segunda derivada

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\dot{y}\,\frac{1}{x}\right) = \frac{d\,\dot{y}}{dx}\frac{1}{x} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{d\,\dot{y}}{dt}\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2} = \ddot{y}\,\frac{1}{x^2} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior resultará

$$x^2\left(\ddot{y}\,\frac{1}{x^2} - \dot{y}\,\frac{1}{x^2}\right) + \frac{11}{3} x \bullet \dot{y}\,\frac{1}{x} - y = 0$$

de donde se obtiene

$$\ddot{y} + \frac{8}{3}\,\dot{y} - y = 0$$

que es una lineal de segundo orden de coeficientes constantes (dependiendo ahora y de la nueva variable t). Las soluciones de ésta última ecuación son de la forma

$$y(t) = c_1 \bullet e^{t/3} + c_2 \bullet e^{-3t} = c_1 \bullet (e^t)^{1/3} + c_2 \bullet (e^t)^{-3}$$

de donde deshaciendo el cambio se obtiene la solución de la ecuación inicial

$$y(x) = c_1 \bullet x^{1/3} + c_2 \bullet x^{-3}$$

Ecuación de coeficientes variables y homogénea

En esta sección vamos a considerar las ecuaciones homogéneas de orden 2 con coeficientes variables, y vamos a ver que si conocemos una solución particular de dicha ecuación y_1 es posible calcular una segunda solución particular y_2, de manera que la solución general será una combinación lineal de ambas soluciones particulares. No se va a hacer el desarrollo teórico, sino que directamente se dará la expresión para y_2. A este procedimiento se le suele conocer como **Método de reducción del orden**:

Partimos entonces de la ecuación

$$a(x)\cdot y'' + b(x)\cdot y' + c(x)\cdot y = 0$$

y supongamos que conocemos una solución particular no nula de la misma y_1. A partir de ésta, vamos a construir una nueva solución particular de la forma $y_2(x) = z(x)y_1(x)$, siendo $z(x)$ una función a determinar. Pues entonces, exigiendo a y_2 que sea solución de la anterior ecuación se obtiene una ecuación lineal de primer orden (de aquí el nombre de éste método), siendo la función a determinar $z'(x)$. Resolviendo esta edo de primer orden, resulta que la segunda solución particular buscada viene dada por la siguiente expresión

$$y_2(x) = y_1\int k\cdot exp\left(-\int \frac{2a(x)\cdot y_1' + b(x)\cdot y_1}{a(x)\cdot y_1}dx\right)dx$$

con lo que la solución general de la ec. homogénea de coeficientes variables inicial vendrá dada por

$$y(x) = c_1\cdot y_1(x) + c_2\cdot y_2(x)$$

Remark *La principal dificultad de aplicar este método es la de encontrar la primera de las soluciones $y_1(x)$, ya que sin ésta no es posible obtener la segunda. Normalmente, suele darse siempre esta y_1, y si en algún ejercicio no se da, ésta será una función sencilla, por ejemplo, un polinomio, la función e^x o funciones por el estilo. Sin embargo, existe un gran número de ecuaciones diferenciales de orden dos de las que no se conoce su solución, es decir, que no podremos hallar una solución particular. Obviamente, no nos referiremos a estas ecuaciones.*

Example *Ver ejemplos*

Ecuación de coeficientes variables y no homogénea

Éste va a ser el caso más general, y por lo tanto más complicado. Solo veremos esquemáticamente como conseguir la solución general para una ecuación del tipo

$$a(x)\cdot y'' + b(x)\cdot y' + c(x)\cdot y = f(x)$$

donde supondremos conocida una solución particular de la ecuación homogénea asociada (que nos permitirá, por el procedimiento de reducción del orden, encontrar la segunda solución particular y por lo tanto la solución general de la homogénea).

Para éste tipo de ecuaciones es de aplicación lo visto en el apartado de Introducción a estas ecuaciones, es decir, siempre se verificará que la solución general de esta ecuación es suma de la solución general de la ecuación homogénea y de una solución particular de la ecuación no homogénea. Como el apartado anterior nos ha dado la solución general de la homogénea, nos centraremos entonces en como obtener la solución particular de la ecuación no homogénea que necesitamos. En este caso, hallaremos y_{PNH} utilizando el llamado **Método de variación de parámetros**:

Sea y_1 la solución particular de la ecuación homogénea que es conocida (la que nos dan). Como hemos visto anteriormente, a partir de ésta podemos hallar y_2 mediante la expresión

$$y_2(x) = y_1 \int k \cdot exp\left(-\int \frac{2a(x) \cdot y_1' + b(x) \cdot y_1}{a(x) \cdot y_1} dx\right) dx$$

Entonces vamos a buscar para y_{PNH} una función de la forma

$$y_{PNH}(x) = u_1(x) \cdot y_1(x) + u_2(x) \cdot y_2(x)$$

siendo $u_1(x)$ y $u_2(x)$ funciones a determinar. Sin entrar en el desarrollo teórico del razonamiento a emplear, se llega a que para determinar estas dos funciones hay que resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1' \cdot y_1 + u_2' \cdot y_2 = 0 \\ a(x)(u_1' \cdot y_1' + u_2' \cdot y_2') = f(x) \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema con incógnitas $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, resulta ser

$$u_1' = \frac{f(x) \cdot y_2}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')}; \quad u_1' = \frac{-f(x) \cdot y_1}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')}$$

por lo que la solución particular buscada viene dada por

$$y_{PNH} = y_1 \int \frac{f(x) \cdot y_2}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')} dx - y_2 \int \frac{f(x) \cdot y_1}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')} dx$$

y la solución general de la ecuación lineal no homogénea de coeficientes variables inicial será

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + y_{PNH}$$

Example *Ver varios ejemplos.*

ANEXO: SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

PROGRAMA DETALLADO:

4.1 Introducción.

4.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales. Definiciones.

4.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

4.4 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

4.4.1 Sistemas homogéneos.

4.4.2 Sistemas no homogéneos. El método de variación de constantes.

4.5 Ejercicios.

Introducción.

En el campo de las ecuaciones diferenciales, una rama de gran utilidad es la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Vamos a comenzar con un sencillo ejemplo, que nos servirá de introducción:

Example *Consideremos el sistema formado por dos ecuaciones diferenciales con dos variables dependientes u, v, y sea t la variable independiente (es decir, $u = u(t), v = v(t)$):*

$$\begin{cases} u' = a \cdot u \\ \\ v' = b \cdot v \end{cases}$$

Podemos observar que, en este sistema, cada ecuación es totalmente independiente de la otra. Por ello, pueden resolverse por separado, y sabemos que la solución viene dada por

$$u = c_1 e^{at}, \qquad v = c_2 e^{bt}$$

Remark *Es interesante considerar una notación matricial para estudiar este tipo de sistemas, ya que se va a simplificar sustancialmente la escritura, y encontraremos una notación similar al caso de una edo de 1er orden. Para ello, dada una matriz diagonal (con posterioridad veremos qué ocurre si no es diagonal)*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

veremos más adelante que se denotará por e^M a la matriz dada por

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Así, en el ejemplo anterior podremos expresar el sistema en la forma

$$X' = AX$$

donde

$$X' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Y de este modo la solución podrá expresarse en la forma

$$X = Ce^{AT}$$

siendo

$$T = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Definiciones.

Definition *Llamaremos **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** a una expresión de la forma*

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\ldots,y_m,y_m') = 0 \\ \\ F_2(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\ldots,y_m,y_m') = 0 \\ \\ \ldots \\ F_m(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\ldots,y_m,y_m') = 0 \end{array}\right.$$

donde $y_1,y_2,\ldots,y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de la variable x. Siempre consideraremos el caso en el que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas. En particular, estaremos interesados en aquellos sistemas que se pueden expresar de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_m) \\ \\ y_2' = f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_m) \\ \\ \ldots \\ y_m' = f_m(x,y_1,y_2,\ldots,y_m) \end{array}\right.$$

Ejemplos de estos sistemas serían:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = x\cdot y_1 + y_2^2 \\ \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = x\cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2\cdot y_3 \\ y_3' = y_1\cdot y_2\cdot y_3 \end{array}\right.$$

En general, la resolución de estos sistemas no es posible salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de sistemas de edo lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde, existen algoritmos que permitirán el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuando un sistema tiene solución, o más precisamente cuando un problema de condiciones iniciales tiene solución.

Definition *Llamaremos **problema de condiciones iniciales** para un sistema de edo a toda expresión de la forma*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_m) \\ y_2' = f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_m) \\ \ldots \\ y_m' = f_m(x,y_1,y_2,\ldots,y_m) \\ \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, \ldots y_m(x_0) = y_m \end{array}\right.$$

siendo $y_1, y_2, \ldots, y_m$ números reales.

Por ejemplo,

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \cdot y_3 \\ y_3' = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

es un problema de condiciones iniciales, mientras que

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \cdot y_3 \\ y_3' = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que no conocemos a todas las funciones incógnita en el mismo punto $x_0 = 0$.

Para el caso de problemas de condiciones iniciales, se tiene el siguiente resultado (análogo al de edo de orden uno):

Theorem *Dado el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \ldots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \\ y_1(x_0) = y_1,\ y_2(x_0) = y_2, \ldots, y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

donde $(x_0, y_1, y_2, \ldots, y_m) \in A$, y $f_i : A \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el abierto A. Supongamos además que las funciones $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ existen y son continuas en A. Entonces existe una solución del problema de condiciones iniciales anterior $y_i : I \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m,$ definido en un intervalo abierto I de la recta real.

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo, el problema anterior

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \cdot y_3 \\ y_3' = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

tiene solución única, aunque no tengamos ni idea de como calcularla. En la asignatura de Métodos Numéricos (4º de Ing. Industrial) se verá como obtener soluciones aproximadas así como obtener información parcial sobre el sistema incluso sin conocer las soluciones.

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Para este tipo de sistemas, y como hemos comentado anteriormente, vamos a poder encontrar su solución en algunos casos particulares.

Definition *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es toda expresión de la forma*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

Si denotamos por

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T, \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$

el sistema anterior puede escribirse en la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

Definition *Un sistema se dirá* ***homogéneo*** *si $\mathbf{b}(x) = (0, 0, \ldots, 0)$, y en caso contrario se dirá* ***no homogéneo****.*

Definition *Un sistema se dirá de* ***coeficientes constantes*** *si la matriz $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}$ es constante.*

Example *El sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2 \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

es de coeficientes constantes, pero no es homogéneo ($\mathbf{b}(x) = (1, e^{-x})$), mientras que el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

es homogéneo de coeficientes constantes.

Antes de pasar al estudio de sistemas lineales de coeficientes constantes (para los que sí vamos a obtener su solución), veamos algunos resultados generales sobre los sistemas lineales:

Theorem *Dado el sistema $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$, donde $\boldsymbol{A}(x)$ y $\boldsymbol{b}(x)$ están definidas y son continuas en un intervalo $I = [x_0 - a, x_0 + a]$, se verifica que el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) \\ \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

tiene solución única definida en I.

Nos centraremos ahora en el estudio de los sistemas homogéneos:

Theorem *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, es decir que cualquier solución $\boldsymbol{y}(x)$ del mismo es de la forma

$$\boldsymbol{y} = c_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + c_2 \cdot \boldsymbol{y}_2 + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y}_n$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ son soluciones linealmente independientes del mismo.

Aunque el resultado anterior caracteriza las soluciones del sistema homogéneo, el cálculo explícito de las soluciones dista mucho de estar al alcance. Un primer avance en el cálculo de las soluciones lo proporciona el determinante wronskiano:

Definition *Dadas $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se define su determinante **wronskiano** como la función real $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n] : I \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in I$ como*

$$W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n](x) = |\boldsymbol{y}_1(x); \boldsymbol{y}_2(x); \ldots; \boldsymbol{y}_n(x)|$$

Este determinante resulta útil a la hora de determinar si *n* soluciones del sistema homogéneo son o no linealmente independientes:

Theorem *Dadas $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones del sistema homogéneo $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y}$, son equivalentes:*

a) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ son linealmente independientes.

b) $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n](x_0) \neq 0$.

La teoría general, en lo que a la estructura de las soluciones se refiere, quedará cerrada con la siguiente caracterización de los sistemas no homogéneos:

Theorem *El conjunto de soluciones del sistema*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$$

es de la forma

$$\boldsymbol{y} = c_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + c_2 \cdot \boldsymbol{y}_2 + \ldots + c_n \cdot \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_p$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e $\boldsymbol{y}_p$ es una solución particular del problema no homogéneo.

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Vamos a resolver sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

donde **A** es una matriz cuadrada de coeficientes constantes, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T$ es un vector columna formado por funciones reales y continuas en un intervalo real I e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Comenzaremos por la resolución de sistemas homogéneos:

Sistemas homogéneos.

Vamos a introducir un método matricial para la resolución de sistemas homogéneos con coeficientes constantes, es decir, sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

Dicho método está basado en el cálculo de la exponencial de una matriz usando el teorema de Cayle-Hamilton (ya estudiado en el tema de Diagonalización de Matrices). Si recordamos brevemente lo que dice dicho teorema:

Theorem ***(Cayle-Hamilton)*** *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada y sea $p(x)$ su polinomio característico. Entonces $p(\boldsymbol{A}) = 0$.*

Example *Sea $\boldsymbol{A}$ la matriz dada por*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $p(x) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \lambda^2 - 5\lambda - 2$. Lo que viene a decir el teorema anterior es que

$$p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

cosa que puede comprobarse sin dificultad.

Volvemos a retomar ahora el Ejemplo 1 con el que comenzábamos este capítulo. Como vimos en el mismo, va a jugar un papel fundamental la función exponencial. Pero para generalizar al caso de matrices cuadradas no diagonales, vamos a hacer algunas consideraciones sobre como se calcula la **exponencial de una matriz**:

La exponencial de una matriz.

Sabemos que la función exponencial viene definida por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por ello, si **A** es una matriz cuadrada, vamos a definir la **exponencial de la matriz** A como

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n$$

Hay casos en los que es muy sencillo calcular la exponencial de una matriz. Por ejemplo, si tenemos una matriz diagonal $\mathbf{D} = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, se demuestra, sustituyendo en la expresión anterior, que

$$e^{\mathbf{D}} = diag(e^{d_1}, e^{d_2}, \ldots, e^{d_n})$$

Example *Si*

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

Además, la exponencial de una matriz cumple las siguientes propiedades:

- Si **A** y **B** son matrices cuadradas que conmutan (es decir, que verifican $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$), entonces
$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$$
- La solución del sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes
$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$
viene dada por
$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A}x}$$
ya que se verifica que $\mathbf{y}' = \frac{d}{dx}(\mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A}x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x)$.

En base a este último resultado ya conocemos lo que tenemos que hacer para resolver el sistema homogéneo, siendo la única ”pega” el que no sabemos calcular la exponencial de una matriz cuadrada cualquiera. Es decir, sabemos que la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

pero ¿cómo calculamos $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x}$? A continuación vamos a ver un método basado en el teorema de Cayle-Hamilton que permite hacer el cálculo con cierta facilidad, aunque los cálculos sean laboriosos.

Cálculo práctico de la exponencial.

Para fijar ideas, supongamos que $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz **A** y que tiene k raíces reales o complejas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ con multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Buscamos entonces polinomios $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$ con grado a lo sumo $r_i - 1$ para cada $1 \leq i \leq k$, de manera que se verifique la igualdad

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1(x)}{(x-\lambda_1)^{r_1}} + \frac{a_2(x)}{(x-\lambda_2)^{r_2}} + \ldots + \frac{a_k(x)}{(x-\lambda_k)^{r_k}}$$

de donde

$$1 = a_1(x)q_1(x) + a_2(x)q_2(x) + \ldots + a_k(x)q_k(x)$$

con $q_i(x) = p(x)/(x-\lambda_i)^{r_i}$, $1 \leq i \leq k$. Sustituyendo en la expresión anterior x por **A**, tendremos

$$\mathbf{I}_n = a_1(\mathbf{A})q_1(\mathbf{A}) + a_2(\mathbf{A})q_2(\mathbf{A}) + \ldots + a_k(\mathbf{A})q_k(\mathbf{A})$$

Como se tiene para todo $1 \leq i \leq k$,

$$e^{\lambda_i x \cdot \mathbf{I}_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{I}_n^j \cdot \frac{(\lambda_i x)^j}{j!} = e^{\lambda_i x} \cdot \mathbf{I}_n$$

entonces

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i x \cdot \mathbf{I}_n} e^{(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) \cdot x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}$$

De aquí, multiplicando por la izquierda ambos miembros por $q_i(\mathbf{A})$

$$q_i(\mathbf{A}) e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{r_i - 1} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}$$

dado que por el teorema de Cayle-Hamilton, se tiene que $q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j = p(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^{j - r_i} = \mathbf{0}$. Multiplicando nuevamente por la izquierda por $a_i(\mathbf{A})$ obtendremos

$$a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{r_i - 1} a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}$$

Sumando entonces esta última expresión desde 1 hasta k, y teniendo en cuenta la expresión obtenida anteriormente para $\mathbf{I}_n$, se llega a que la exponencial de una matriz puede calcularse por la fórmula

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i x} \cdot a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) \sum_{j=0}^{r_i - 1} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!} \right)$$

Example *Consideremos el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico

$$p(x) = x^2 - 7x + 6$$

que tiene por raíces $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 6$.

Calculamos ahora a_1 *y* a_2 *a partir de*

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-6} = \frac{(a_1 + a_2)x - 6a_1 - a_2}{p(x)}$$

obteniéndose que $a_1 = -1/5$, $a_2 = 1/5$. *Además, se obtiene*

$$q_1(x) = \frac{p(x)}{x-1} = x - 6, \qquad q_2(x) = \frac{p(x)}{x-6} = x - 1$$

Si aplicacamos ahora la última fórmula anterior, se tiene que

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{x}\left(-\frac{1}{5}\mathbf{I}_2\right)\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A}-6\mathbf{I}_2) + e^{6x}\left(\frac{1}{5}\mathbf{I}_2\right)\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2) =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema será por lo tanto

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$y_1(x) = \frac{1}{5}(e^{6x}(3c_1+2c_2)+e^{x}(2c_1-2c_2))$$

e

$$y_2(x) = \frac{1}{5}(e^{6x}(3c_1+2c_2)+e^{x}(-3c_1+3c_2))$$

siendo c_1 y c_2 constantes reales. Si tuviésemos alguna condición inicial, por ejemplo $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, plantearíamos un sistema de donde resultaría $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, por lo que la única solución del problema de condiciones iniciales sería

$$y_1(x) = \frac{1}{5}(3e^{6x}+2e^{x})$$
$$y_2(x) = \frac{1}{5}(3e^{6x}-3e^{x})$$

Example *Consideremos ahora el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

cuyo polinomio característico asociado a la matriz $\mathbf{A}$ es $p(x) = x^2 - 4x + 4$, que tiene por solución la raíz doble $\lambda = 2$. Entonces

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{(x-2)^2} = \frac{a_1}{p(x)}$$

de donde $a_1 = 1$ y

$$q_1(x) = \frac{p(x)}{(x-2)^2} = 1$$

Por tanto

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{2x}a_1(\mathbf{A})q_1(\mathbf{A})\sum_{i=0}^{1}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_2)^i\cdot\frac{x^i}{i!}$$

$$= e^{2x}\mathbf{I}_2\mathbf{I}_2\left(\mathbf{I}_2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}x\right) =$$

$$= e^{2x}\begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}$$

con lo que la solución del sistema vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Example *Si tomamos el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 5y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

su polinomio característico asociado a la matriz $\boldsymbol{A}$ *es* $p(x) = x^2 - 2x + 2$, *que tiene por solución la raíces complejas conjugadas* $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. *Entonces*

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{x - 1 - i} + \frac{a_2}{x - 1 + i}$$

de donde $a_1 = \frac{1}{2i}$ *y* $a_2 = -\frac{1}{2i}$. *Teniendo en cuenta que*

$$q_1(x) = x - 1 + i, \qquad q_2(x) = x - 1 - i$$

tendremos

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}x} &= e^{(1+i)x}\frac{1}{2i} \cdot \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{A} - (1-i)\boldsymbol{I}_2) - e^{(1-i)x}\frac{1}{2i} \cdot \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{A} - (1+i)\boldsymbol{I}_2) \\ &= e^x\left(e^{ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix} - e^{-ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\right) \\ &= e^x\begin{pmatrix} 2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} & -5\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} & -2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \end{pmatrix} \\ &= e^x\begin{pmatrix} 2\operatorname{sen}x + \cos x & -5\operatorname{sen}x \\ \operatorname{sen}x & -2\operatorname{sen}x + \cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dado que se verifica

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad y \qquad \operatorname{sen}x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Entonces toda solución del sistema viene dada por

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^x\begin{pmatrix} 2\operatorname{sen}x + \cos x & -5\operatorname{sen}x \\ \operatorname{sen}x & -2\operatorname{sen}x + \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Remark *Los 3 ejemplos anteriores resumen los casos que pueden darse para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Cuando el número de ecuaciones es mayor, pueden aparecer otros casos, pero básicamente la matriz exponencial tiene en sus coordenadas funciones de la forma*

$$x^n e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad y \qquad x^n e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Sistemas no homogéneos. El método de variación de constantes.

Volvamos ahora sobre el sistema no homogéneo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

y supongamos conocida la solución general del sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

Para terminar de resolver el sistema no homogéneo usaremos **el método de variación de constantes**. Para ello supongamos que la solución es de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{C}(x)$$

donde $\mathbf{C}(x)$ es una función a determinar. Derivando respecto a x obtendremos

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{C}(x) + e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{C}'(x)$$

Sustituyendo en el sistema no homogéneo, tendremos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$$

lo que implica que

$$e^{\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x)$$

Al ser la matriz $e^{\mathbf{A}x}$ invertible, y teniendo en cuenta que

$$e^{\mathbf{A}x} \cdot e^{-\mathbf{A}x} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}_n$$

concluimos que $e^{-\mathbf{A}x}$ es la inversa de $e^{\mathbf{A}x}$ y entonces

$$\mathbf{C}(x) = \int e^{-\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{b}(x)dx$$

Una vez calculada $\mathbf{C}(x)$ obtenemos la solución del sistema no homogéneo.

Example *Si consideramos el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + e^x \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

que también podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya vimos que la exponencial de la matriz del sistema era

$$e^{Ax} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix}$$

por lo que al ser

$$\boldsymbol{C}(x) = \int e^{-\boldsymbol{A}x} \cdot \boldsymbol{b}(x)dx$$

resulta

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \begin{pmatrix} 3e^{-5x} + 2 \\ 3e^{-5x} - 3 \end{pmatrix} dx = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \int (3e^{-5x} + 2)dx \\ \int (3e^{-5x} - 3)dx \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}e^{-5x} + 2x + c_1 \\ -\frac{3}{5}e^{-5x} - 3x + c_2 \end{pmatrix}$$

con lo que la solución es

$$\boldsymbol{y}(x) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}e^{-5x}+2x+c_1 \\ -\frac{3}{5}e^{-5x}-3x+c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{e^{x}}{25}\begin{pmatrix} 10x-3 \\ 3-15x \end{pmatrix}$$

Notemos que una solución particular del sistema es

$$\boldsymbol{y}_p(x) = \frac{e^{x}}{25}\begin{pmatrix} 10x-3 \\ 3-15x \end{pmatrix}$$

por lo que haciendo $k_1 = c_1/5, k_2 = c_2/5$, *tenemos que*

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{y}_p(x)$$

tal y como afirmaba el teorema ya conocido.

Example *Si consideramos ahora el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + e^{x} \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \\ \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1 \end{cases}$$

se verificará que

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

de donde $c_1 = 3$ *y* $c_2 = 22$, *de donde sustituyendo en la solución general concluimos que*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 13e^{6x} + e^{x}(10x-13) \\ 13e^{6x} + e^{x}(12-15x) \end{pmatrix}$$

es la única solución de dicho problema de condiciones iniciales.

Ejercicios.