Profesor**: Roque Molina Legaz**

TEMA 12: INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN. APLICACIONES

PROGRAMA DETALLADO:

1. **12.1 Introducción.**
   12.2 Integral doble de una función acotada en un rectángulo de $\mathbb{R}^2$: Definición y propiedades.
   12.3 Integrales iteradas: Teorema de Fubini:
   12.3.1 Teorema de Fubini en un rectángulo.
   12.3.2 Integración sobre regiones más generales.
   12.4 Cambio de variables en la integral múltiple. Casos particulares para las integrales dobles y triples.
   12.5 Aplicaciones de la integral múltiple:
   a. 12.5.1 Integral doble.
   12.5.2 Integral triple.

Introducción.

Las integrales iteradas o integrales múltiples son una extensión natural del concepto, ya estudiado en el tema 9, de integral definida de Riemann sobre un intervalo $[a,b]$. Resultarán de especial interés por sus aplicaciones, las extensiones a funciones de dos variables sobre dominios acotados de $\mathbb{R}^2$ (**integral doble**) y de funciones de tres variables sobre dominios acotados de $\mathbb{R}^3$ (**integral triple**).

Las notaciones usuales que se emplean para este tipo de integrales, en coordenadas cartesianas, son:

FUNCIÓN	DOMINIO	NOTACIÓN
$f(x)$	$[a,b] \subset \mathbb{R}$	$\int_a^b f(x)dx$
$f(x,y)$	$D \subset \mathbb{R}^2$	$\iint_D f(x,y)dxdy$
$f(x,y,z)$	$V \subset \mathbb{R}^3$	$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$
$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$	$I \subset \mathbb{R}^n$	$\int\cdots\int_I f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$

Como en el caso de la integral simple de Riemann, las definiciones de estas integrales a través de límites de sumas tienen un carácter abstracto. No obstante, sus diversas interpretaciones darán lugar a una gran variedad de aplicaciones, sobre todo en Física e Ingeniería.

Como caso particular de la integral múltiple, la integral doble de Riemann vendrá a formalizar un concepto sencillo e intuitivo, el de volumen, de manera que uno de los objetivos de este tema será el de dar sentido a la expresión

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

siendo D un dominio cerrado de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función acotada en D, de forma que V será un número que representará, si $f(x,y) \geq 0$, el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ comprendido entre la superficie $z = f(x,y)$ y su proyección sobre D.

Va a existir una gran similitud entre las definiciones (y por tanto, de propiedades y aplicaciones), de la integral múltiple con las ya estudiadas para la integral simple de Riemann. De hecho, se intentará, en lo posible, seguir un camino totalmente paralelo: En síntesis, el proceso consistirá en plantear particiones cada vez más finas del dominio de integración, lo que permitirá definir la integral superior y la inferior; de aquí, se llegará a la definición de integral múltiple de Riemann de una función acotada en un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ a través de un límite, cuando el diámetro de la partición tiende a cero.

No obstante, y aunque al introducción del concepto de integral múltiple puede hacerse directamente para $\mathbb{R}^n$, se introducirá por separado para la integral doble (y de forma semejante se hará para la integral triple). Como Apéndices se introducirán las integrales de línea y de superficie.

Integral doble de una función acotada en un rectángulo de $\mathbb{R}^2$: Definición y propiedades.

Definition *Se llama **rectángulo** de $\mathbb{R}^2$ al conjunto definido por*

$$[a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}$$

Definition *Se llama **partición P** del rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ a un conjunto $\mathbf{P} = P_1 x P_2$, donde P_1 es una partición del intervalo real $[a,b]$ y P_2 es una partición del intervalo $[c,d]$.*

De esta forma, si P_1 divide a $[a,b]$ en m subintervalos unidimensionales y P_2 divide a $[c,d]$ en n subintervalos, $\mathbf{P} = P_1 x P_2$ determinará una descomposición de $[a,b] \times [c,d]$ en $m \cdot n$ subrectángulos, a los que denotaremos por $I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{mn}$.

Definition *Se llama **norma de la partición P** de $I = [a,b] \times [c,d]$, y se representa por $\|\mathbf{P}\|$, al máximo área de los subrectángulos en los que **P** divide al rectángulo **I**.*

Definition *Una partición **P** de $[a,b] \times [c,d]$ se dice que es **más fina** que otra partición **Q** de $[a,b] \times [c,d]$, si cada P_i es más fina que la correspondiente Q_i (es decir, si todo subrectángulo de **Q** es unión de subrectángulos de **P**) y si $\|\mathbf{P}\| < \|\mathbf{Q}\|$. Lo representaremos por $\mathbf{P} \angle \mathbf{Q}$.*

Sea entonces $\mathbf{I} = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo compacto de $\mathbb{R}^2$, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función acotada y **P** una partición de **I** en subintervalos $I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{mn}$. En cada uno de los subrectángulos se consideran los valores extremos que alcanza f, a los que denotaremos por

$$m_{ij} = \inf\left\{f(\mathbf{x},\mathbf{y});\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in I_{ij}\right\},\ M_{ij} = \sup\left\{f(\mathbf{x},\mathbf{y});\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in I_{ij}\right\}.$$

Definition *Llamaremos **suma inferior** y **suma superior** de la función $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ respecto de la partición $\boldsymbol{P}$ en $[a,b]\times[c,d]$, a los números reales definidos, respectivamente, por*

$$s(f,\boldsymbol{P}) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} m_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j);\ S(f,\boldsymbol{P}) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} M_{ij}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

Remark *Por lo tanto, el volumen del cuerpo que limita la superficie $z = f(x,y)$ estará comprendido entre $s(f,\boldsymbol{P})$ y $S(f,\boldsymbol{P})$, es decir*

$$s(f,\boldsymbol{P}) \leq V \leq S(f,\boldsymbol{P})$$

Enunciaremos ahora unas propiedades, que verifican este tipo de sumas, cuyas demostraciones son análogas a las de la integral simple de Riemann, y que serán de gran utilidad en la definición de la integral múltiple:

Proposition *En las anteriores condiciones, si $\mu(\boldsymbol{I})$ es el área del rectángulo compacto $\boldsymbol{I} = [a,b]\times[c,d]$, y si denotamos por $m = inf\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in I\}$, $M = sup\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in I\}$, se verifican:*

(a) $s(f,\boldsymbol{P}) \leq S(f,\boldsymbol{P})$.

(b) $s(f,\boldsymbol{P}) \geq m \cdot \mu(I)$.

(c) $S(f,\boldsymbol{P}) \leq M \cdot \mu(I)$.

es decir,

$$m \cdot \mu(\boldsymbol{I}) \leq s(f,\boldsymbol{P}) \leq S(f,\boldsymbol{P}) \leq M \cdot \mu(\boldsymbol{I}).$$

Proposition *En las anteriores condiciones, sean $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ dos particiones del rectángulo compacto $\boldsymbol{I} = [a,b]\times[c,d]$, con $\boldsymbol{P}\angle\boldsymbol{Q}$. Entonces:*

(a) $s(f,\boldsymbol{P}) \geq s(f,\boldsymbol{Q})$.

(b) $S(f,\boldsymbol{P}) \leq S(f,\boldsymbol{Q})$.

Proposition *Si $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son dos particiones arbitrarias del rectángulo compacto $\boldsymbol{I} = [a,b]\times[c,d]$, siempre se verifica que $s(f,\boldsymbol{P}) \leq S(f,\boldsymbol{Q})$.*

De esta forma, observamos que si se toman particiones cada vez más finas del rectángulo compacto $\mathbf{I} = [a,b]\times[c,d]$ y con norma tendiendo a 0, se obtiene una sucesión monótona creciente de sumas inferiores y una sucesión monótona decreciente de sumas superiores. Como la primera sucesión

$$s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq \ldots$$

está acotada superiormente por $M \cdot \mu(\mathbf{I})$, y la segunda sucesión

$$S_1 \geq S_2 \geq \ldots \geq S_n \geq \ldots$$

está acotada inferiormente por $m \cdot \mu(\mathbf{I})$, ambas sucesiones serán convergentes. Así, tiene sentido considerar la siguiente definición:

Definition *Se llama **integral inferior** de Riemann de f en el rectángulo $\boldsymbol{I} = [a,b]\times[c,d]$, y se representa por $\int_{-\boldsymbol{I}} f$, al número límite de la sucesión de sumas inferiores obtenidas al considerar una sucesión de particiones de $\boldsymbol{I}$ cada vez más finas y con norma tendiendo a cero; se llama **integral superior** de Riemann de f en $\boldsymbol{I}$, y se representa por $\int_{\boldsymbol{I}}^{-} f$, al límite de la correspondiente* *sucesión de sumas superiores; es decir,*

$$\int_{-\boldsymbol{I}} f = \lim_n \left\{ s(f, \boldsymbol{P}_n); \ldots \angle \boldsymbol{P}_n \angle \boldsymbol{P}_{n-1} \angle \ldots \angle \boldsymbol{P}_1,\ \|\boldsymbol{P}_n\| \to 0 \right\}$$

y

$$\int_{\boldsymbol{I}}^{-} f = \lim_n \left\{ S(f, \boldsymbol{P}_n); \ldots \angle \boldsymbol{P}_n \angle \boldsymbol{P}_{n-1} \angle \ldots \angle \boldsymbol{P}_1,\ \|\boldsymbol{P}_n\| \to 0 \right\}.$$

Remark *Observemos que se verifica de forma inmediata,*

$$\int_{-\boldsymbol{I}} f \leq \int_{\boldsymbol{I}}^{-} f.$$

Definition *En las anteriores condiciones, se dice que una función acotada* $f : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es* ***integrable Riemann*** *(o simplemente* ***integrable****) en el intervalo* $\boldsymbol{I}$ *si*

$$\int_{-\boldsymbol{I}} f = \int_{\boldsymbol{I}}^{-} f.$$

En tal caso, al número real definido por cualquiera de ellas se le llama ***integral doble de Riemann*** *de* f *en rectángulo compacto* $\boldsymbol{I} = [a,b] \times [c,d]$ *y se representa por*

$$\iint_I f(x,y)dxdy$$

Veamos unas propiedades análogas a las ya conocidas para el caso de la integral simple:

Proposition ***(Criterio de integrabilidad de Riemann).*** *Sea* $\boldsymbol{I}$ *el rectángulo compacto* $\boldsymbol{I} = [a,b] \times [c,d]$ *y* $f : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ *acotada. Entonces,* f *es integrable Riemann en* $\boldsymbol{I}$ *si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una partición* P *de* $\boldsymbol{I}$ *tal que* $S(f,\boldsymbol{P}) - s(f,\boldsymbol{P}) < \varepsilon$.

Proposition *En las hipótesis anteriores, si* $f : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\boldsymbol{I}$*, entonces* f *es integrable en* $\boldsymbol{I}$.

Proposition *Sean* $f,g : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ *dos funciones acotadas e integrables en* $\boldsymbol{I}$*. Entonces:*

(a) $f \pm g$ *es integrable en* $\boldsymbol{I}$ *y* $\iint_{\boldsymbol{I}} (f \pm g) = \iint_{\boldsymbol{I}} f \pm \iint_{\boldsymbol{I}} g$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf *es integrable en* $\boldsymbol{I}$ *y* $\iint_{\boldsymbol{I}} (\lambda f) = \lambda \iint_{\boldsymbol{I}} f$.

(c) $f \cdot g$ *es integrable en* $\boldsymbol{I}$.

(d) $\frac{f}{g}$ *es integrable en* $\boldsymbol{I}$*, donde se supone que* $|g(x,y)| \geq k,\ \forall (x,y) \in \boldsymbol{I}$ *y para un cierto* $k > 0$.

(e) Si $f \geq 0$ *en* $\boldsymbol{I}$*, se tiene que* $\iint_{\boldsymbol{I}} f \geq 0$.

(f) Si $f \leq g$ *en* $\boldsymbol{I}$*, se tiene que* $\iint_{\boldsymbol{I}} f \leq \iint_{\boldsymbol{I}} g$.

(g) $|f|$ *es integrable en* $\boldsymbol{I}$ *y* $\left| \iint_{\boldsymbol{I}} f \right| \leq \iint_{\boldsymbol{I}} |f|$.

(h) Si P *es una partición de* $\boldsymbol{I}$ *en* m *subintervalos* $I_1, I_2, \ldots, I_m$, f *es integrable en* $\boldsymbol{I}$ *si y sólo si* f *es integrable en cada* I_k $(k = 1,2,\ldots,m)$*, y se*

verifica

$$\int\int_{I} f = \sum_{k=1}^{m} \int\int_{I_k} f.$$

Proposition ***(Teorema de la media)*** *Sea* $f : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ *continua y acotada en el rectángulo compacto* $\boldsymbol{I} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. *Se verifica que existe algún punto* $(c_1, c_2) \in \boldsymbol{I}$ *tal que*

$$\int\int_{I} f = f(c_1,c_2) \cdot \mu(\boldsymbol{I})$$

Integrales iteradas: Teorema de Fubini.

El proceso que acabamos de desarrollar para el cálculo de la integral múltiple (OJO: hasta ahora siempre hemos introducido el concepto para el caso de la integral doble, aunque de forma similar se puede hacer para la triple), también conocido como proceso de **aproximaciones sucesivas**, al igual que ocurría con el caso de la integral simple, tiene más interés teórico que práctico: basta con intentar calcular cualquier integral múltiple mediante este procedimiento para comprender que este cálculo ha de realizarse por otros procedimientos. Desde el punto de vista práctico, la herramienta básica para el cálculo de estas integrales es un resultado conocido como **teorema de Fubini** y que nos permitirá reducir el cálculo de integrales dobles a integrales simples. Lo mismo ocurrirá en el caso de la integral triple.

Teorema de Fubini en un rectángulo.

Normalmente, en el caso $n = 2$, al intervalo compacto **I** $=[a,b] \times [c,d]$, que es un rectángulo, lo representaremos por D, mientras que en el caso $n = 3$, a **I**, que es un paralelepípedo, lo representaremos por V.

Proposition ***(Teorema de Fubini en un rectángulo).*** *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función definida, acotada e integrable en* $D = [a,b] \times [c,d]$. *Supongamos que para cada* $x \in [a,b]$ *fijo, la integral* $\int_c^d f(x,y)dy$ *existe y vale* $A(x)$. *Entonces la integral* $\int_a^b A(x)dx$ *también existe y su valor coincide con* $\iint_D f(x,y)dxdy$, *es decir*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Análogamente, si suponemos que para cada $y \in [c,d]$ *fijo, la integral* $\int_a^b f(x,y)dx$ *existe y vale* $A(y)$, *también existirá* $\int_c^d A(y)dy$ *y su valor coincide con* $\iint_D f(x,y)dxdy$, *es decir*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Remark *A las integrales* $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$, $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$, *si existen, se les* *llaman **integrales iteradas** de f en I. Cuando f es continua, ambas integrales reiteradas existen y son iguales.*

Example *Calcular* $\iint_D (x+y)dxdy$ *en* $D = [0,1] \times [0,2]$.

Example *Calcular* $\iiint_V (xy+z)dxdydz$, *siendo* $V = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$.

Remark *Notemos con este último ejemplo, que no es preciso integrar primero respecto de z, después respecto de y y por último respecto de x. Por el contrario, es aconsejable elegir las iteraciones de modo que el cálculo de cada una de las integrales iteradas sea lo más simple posible. Esto no tiene demasiada importancia cuando el dominio de integración es un rectángulo o un paralelepípedo, aunque si lo tendrá cuando consideremos dominios más generales, como se verá en la sección siguiente.*

Remark *Normalmente, y cuando se van a calcular integrales múltiples, en lugar de expresar*

$$\iiint_V (xy+z)dxdydz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_2^3 (xy+z)dz \right] dy \right] dx$$

o cualquier otra posible combinación existente entre las 3 variables, por comodidad y por aclarar aún más el intervalo de variación de cada variable, expresaremos

$$\iiint_V (xy+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_2^3 (xy+z)dz$$

expresando implícitamente que no se trata de un producto de tres integrales, sino que se han de calcular las integrales iteradas comenzando siempre por la situada más a la derecha.

Integración sobre regiones más generales.

Si $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o 3) en lugar de ser un intervalo compacto fuese un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o 3) y $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ es una función continua, el teorema de Fubini anteriormente enunciado va a poder extenderse sin dificultad a estos nuevos conjuntos siempre que el dominio **D** cumpla alguna condición de ”regularidad” (en nuestro caso, supondremos que su contorno estará formado por curvas continuas), como veremos a continuación.

Proposition ***(Teorema de Fubini en dominios más generales).***

Sean $h, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas, con* $h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, *y sea* $\boldsymbol{D}$ *el conjunto* $\boldsymbol{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ h(x) \leq y \leq g(x)\}$. *Si* $f : \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ *es una función acotada y continua en S, entonces f es integrable en* $\boldsymbol{D}$ *y se verifica*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

La afirmación del teorema anterior se representa en la siguiente figura.

En la práctica, para hallar los límites de integración, primero se examina la variación de x ($a \leq x \leq b$); fijado entonces un valor de x arbitrario entre a y b, la ordenada y de los puntos de I varía entre $h(x)$ y $g(x)$.

Example *Calcular* $\iint_D xy\,dxdy$*, siendo D la región del cuadrado* $[0,1] \times [0,1]$ *comprendida entre* $y = x$ *y la curva* $y = x^2$*.*

Remark *No siempre es obligatorio fijar* $x \in [a,b]$ *y hacer variar y, sino que el mismo teorema anterior también es válido para el caso en que D sea de la forma*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ h(y) \leq x \leq g(y),\ c \leq y \leq d\right\}$$

con lo que se tendría

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dx\right]dy$$

Remark *Habitualmente, fijaremos una variable y haremos variar la otra según convenga al problema en cuestión. Por ejemplo, en el caso anterior es indiferente cual sea la variable que se fije.*

Example *Calcular* $\iint_D xy\,dxdy$*, siendo D el dominio definido por la intersección de los círculos* $x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1$*.*

Example *Calcular*

$$\iint_D x \cdot e^{-\frac{x^2}{y}}\,dxdy$$

extendida a la porción del plano delimitada por $x = 0,\ y = x^2,\ y = 1,\ y = 2$*.*

Remark *El teorema de Fubini en dominios más generales puede extenderse sin dificultad a dominios de la forma*

$$V = \left\{(x,y,z);\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\right\}$$

o cualquier otro tipo de posibilidades entre $x,\ y,\ z$*. La única dificultad radica en que ahora las correspondientes gráficas son en 3 dimensiones.*

Veamos un ejemplo que nos muestre el sentido geométrico de cada elemento:

Example *Consideremos la pirámide limitada por los planos* $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$ $x + y + z = 1$*, y vamos a estudiar la variabilidad de cada una de las 3 variables:*

Sea $P(x,y,z)$ *un punto interior a la pirámide. Su proyección sobre el plano OXY es el punto* $R(x,y,0)$*, mientras que la proyección de R sobre el eje OX es* $S(x,0,0)$*. Como la posición de este último punto nos indica la posible variación de la coordenada x de los puntos de nuestro recinto, tendremos que* $0 \leq x \leq 1$*.*

Puesto que la proyección de cualquier punto del recinto varía en el *triángulo de vértices* $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$, *fijado un valor para* x *en* $[0,1]$, *la coordenada* y *variará entre el punto* $S(x,0,0)$ *y el punto* $T(x,1-x,0)$, *por lo que* $0 \leq y \leq 1-x$, *para cada* $x \in [0,1]$.

Por último, la coordenada z *de un punto cualquiera* P *cuyas coordenadas* x *e* y *estén fijas en el triángulo de vértices* $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$, *variará entre la componente* z *de* R *y la componente* z *de* Q *(donde* Q *representa un punto del plano* $x+y+z=1$*), es decir,* $0 \leq z \leq 1-x-y$.

En resumen

$$V = \left\{(x,y,z);\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\right\}.$$

De esta forma, si queremos calcular $\iiint_V zdxdydz$, *siendo* V *la pirámide anterior, sólo habremos de resolver*

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xydz = \ldots = \frac{1}{120}$$

Example *Calcular*

$$\iiint\limits_V zdxdydz$$

siendo V *el tronco del cilindro* $x^2+y^2=1$ *limitado por los planos* $z=0$, $z=1$.

Example *Calcular*

$$\iiint\limits_V x^2yz^3dxdydz$$

siendo V *el sólido limitado por el plano* $y=0$ *y las superficies* $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

Example *Calcular*

$$\iiint\limits_V dxdydz$$

siendo V *el sólido limitado por el paraboloide* $z=2x^2+y^2$ *y el cilindro* $z=4-y^2$ *en el primer octante.*

Cambio de variables en la integral múltiple. Casos particulares.

Vamos a desarrollar la teoría del cambio de variables para el caso $n=2$ (de forma análoga se haría para $n=3$) :

Dada $\iint_D f(x,y)dxdy$ extendida a un dominio D delimitado por la curva $F(x,y)=0$, vamos a efectuar un cambio de variables y pasar de las variables (x,y) a unas nuevas variables (u,v), mediante la transformación dada por

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),$$

que supondremos biyectiva, al menos para los puntos (x,y) de D, y donde también consideraremos que el jacobiano de la transformación

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

es no nulo y es continuo y está acotado en cada punto de D. De esta forma nos aseguraremos, en virtud del teorema de la función inversa (estudiado en el tema 11), que u y v se expresan unívocamente en función de x e y. Supongamos además $\frac{\partial x}{\partial u} \neq 0$ y es continua en D.

Proposition *Bajo todas las anteriores hipótesis, se verifica*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot J \cdot dudv$$

Remark *Para el caso de la integral triple, tendríamos*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \cdot J \cdot dudvdw$$

Caso particular: Cambio de variable en la integral doble.

El cambio de variable más habitual en la integral doble es el cambio a **coordenadas polares**. Especialmente este cambio se utiliza en el caso en que el dominio es algún sector circular o la función a integrar es simétrica respecto del origen.

Como es sabido, este cambio viene dado por

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta$$

De esta manera, y al ser el jacobiano de la transformación $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$, se tiene:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \cdot \rho \cdot d\rho d\theta$$

Remark *En la mayor parte de los casos se toma ρ como primera variable de integración (es decir, ρ depende de θ), de forma que*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \cdot \rho \cdot d\rho$$

Example *Calcular $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, siendo D el recinto limitado por la circunferencia $x^2+y^2 = 1$.*

Example *Idem siendo D el recinto limitado por la circunferencia $x^2+y^2 = 2x$.*

Caso particular: Cambios de variables en la integral triple.

En este caso podemos destacar dos casos particulares: coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas.

Coordenadas esféricas.

Las **coordenadas esféricas (o polares esféricas)**, son análogas a las polares en el plano: cada punto P del espacio se representa por (ρ,θ,ϕ), donde ρ es la distancia al origen y θ y ϕ vienen dadas por

De esta forma, el cambio viene dado por

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

por lo que el jacobiano de la transformación siempre valdrá

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

y sustituyendo en la fórmula del cambio de variables

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi) \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \cdot d\theta d\phi d\rho$$

Remark *El uso de este tipo de coordenadas está especialmente indicado cuando en la frontera de V intervienen superficies esféricas y/o cónicas de eje 0Z, debido a la sencillez de sus ecuaciones:*

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \Leftrightarrow \rho = r$$

$$x^2+y^2 = (tan^2\alpha)z^2 \Leftrightarrow \phi = \alpha$$

Example *Calcular $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, siendo V el sólido comprendido entre $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1$.*

Coordenadas cilíndricas.

Cada punto se representa por (ρ,θ,z), siendo el par (ρ,θ) idéntico a las coordenadas polares en el plano, y z la 3ª componente en coordenadas cartesianas.

Así, se trata de realizar el cambio

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

por lo que el jacobiano de la transformación valdrá

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \rho$$

y sustituyendo en la fórmula del cambio de variables

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z) \cdot \rho \cdot d\theta d\rho dz$$

Remark *El empleo de coordenadas cilíndricas equivale a reducir la integral triple a una integral doble sobre la proyección de V en el plano 0XY y a la posterior* *resolución de ésta en coordenadas polares.*

Remark *Las coordenadas cilíndricas resultan especialmente adecuadas para dominios de integración V limitados por superficies de revolución de eje 0Z, ya que en sus ecuaciones intervienen expresiones de la forma* x^2+y^2.

Example *Calcular* $\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$*, siendo V la región del espacio comprendida entre* $z=0$ *y* $z=4-x^2-y^2$.

Example *Calcular* $\iiint_V dxdydz$*, siendo V la región del cilindro* $x^2+y^2=2y$ *que es interior a la esfera* $x^2+y^2+z^2=4$.

Aplicaciones de la integral múltiple.

Integral doble.

Cálculo de volúmenes.

Si tenemos una superficie representada por una función $z=f(x,y)$, acotada y positiva $\forall(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$, sabemos que el volumen limitado por dicha superficie, el cilindro de generatrices paralelas al eje $0Z$ y el plano $0XY$, viene dado por

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

Example *Varios ejemplos.*

Cálculo de áreas de recintos planos.

Para una región plana D comprendida entre dos curvas, se verifica

$$Area(D)=\iint_D dxdy$$

Cálculo del área de una superficie.

Sea $f(x,y)$ una función continua en una región acotada D del plano $0XY$. El área de una superficie obtenida por la intersección de $z=f(x,y)$ con el cilindro que tiene por base D viene dada por

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Cálculo de centros de gravedad y momentos de inercia de figuras planas.

Integral triple.

Volumen de un cuerpo.

Otra forma de hallar el volumen V de un cuerpo es aplicar

$$Volumen(V) = \iiint_V dxdydz$$

Cálculo de centros de gravedad y momentos de inercia de cuerpos en $\mathbb{R}^3$.