UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Capítulo 10

Límites y continuidad de funciones de varias variables.

PROGRAMA:

8.1 Definiciones previas.

8.1.1 Definición de espacio métrico. Ejemplos.

Definición 8.1 *Sea A un conjunto no vacío. Llamaremos* ***distancia*** *o* ***métrica*** *a toda aplicación $d : A \times A \to \mathbb{R}$ que cumpla, $\forall x, y, z \in A$:*

Paseo Alfonso XIII, 52 - 30203 Cartagena • Tel. 968 32 56 33 • Fax: 968 32 56 94

a) $d(x,y) \geq 0$.
b) $d(x,y) = 0$ *sí y sólo si* $x = y$.
c) $d(x,y) = d(y,x)$.
d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Al par (A,d) *se le llama* ***espacio métrico****, y al número real* $d(x,y)$*,* ***distancia entre los puntos*** x *e* y*.*

Por tanto, un espacio métrico es un conjunto y una distancia definida sobre él. No obstante, y como veremos en los ejemplos siguientes, en la mayoría de los casos no hay duda sobre la distancia que se usará en el correspondiente conjunto, por lo que normalmente suele identificarse el espacio métrico (A,d) con el conjunto A.

Ejemplo 8.1 *El conjunto* $A = \mathbb{R}$ *junto con la aplicación* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $d(x,y) = |y - x|$*, es un espacio métrico. A esta métrica se le suele llamar* ***distancia usual*** *en* $\mathbb{R}$ *(y es la que se usará normalmente).*

Ejemplo 8.2 *El conjunto* $A = \mathbb{R}$ *junto con la aplicación* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$*, es un espacio métrico.*

Ejemplo 8.3 *El conjunto* $A = \mathbb{R}^2$ *puede dar lugar a diferentes espacios métricos al considerar definidas en él las siguientes distancias* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *:*

$$d_2\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$$d_1\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

$$d_\infty\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \max\left\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\right\}$$

A d_2 *suele llamarse* ***distancia euclídea*** *(y coincide con la distancia entre dos puntos), mientras que a* d_1 *se le llama* ***distancia del valor absoluto*** *y a* d_∞ ***distancia del supremo o del máximo****. Así, se prueba que* $\mathbb{R}^2$ *junto a* d_1, d_2 *o* d_∞ *forma un espacio métrico. También se demuestra que si usamos cualquiera de las 3 distancias anteriores, los resultados que se obtienen son equivalentes (como veremos en la siguiente sección), por lo que siempre consideraremos a* $\mathbb{R}^2$ *como un espacio métrico independientemente de la distancia que se use.*

Ejemplo 8.4 *Las tres distancias definidas en el ejemplo anterior suelen extenderse en general al conjunto* $A = \mathbb{R}^n$*, por lo que se obtienen las siguientes distancias equivalentes:*

$$d_1\left((x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$$

$$d_2\left((x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

$$d_\infty\left((x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\right) = max\left\{|y_i - x_i|\,;\ i = 1,...,n\right\}$$

8.1.2 Entornos. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.

A partir de este momento (A,d) siempre representará a un espacio métrico.

Definición 8.2 *Dado un espacio métrico (A, d), se llama* ***entorno (o bola abierta) de centro*** *$a \in A$* ***y radio*** *r ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$) al conjunto definido por*

$$B(a,r) = \{x \in A;\ d(a,x) < r\}$$

De forma análoga puede definirse la ***bola cerrada,*** *$\overline{B(a,r)}$, y el* ***entorno reducido*** *(o* ***perforado)*** ***de centro*** *$a \in A$* ***y radio*** *r, $B^*(a,r)$, como los conjuntos*

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in A;\ d(a,x) \leq r\}$$
$$B^*(a,r) = B(a,r) - \{a\}$$

Ejemplo 8.5 *Entornos en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.*

Definición 8.3 *Un subconjunto $X \subset A$ es un* ***conjunto abierto*** *si $\forall x \in X$ existe una bola $B(x,r)$ contenida en X.*

Observación 1 *Dos distancias d y d' definidas sobre un mismo espacio métrico se dice que son* ***equivalentes*** *si dan lugar a los mismos conjuntos abiertos. Se prueba que en $\mathbb{R}^n$ todas las distancias son equivalentes.*

Definición 8.4 *Un subconjunto $X \subset A$ es un* ***conjunto cerrado*** *si su complementario $X^c = A - X$ es un conjunto abierto.*

8.1.3 Clasificación de los puntos de un e. m. respecto de un conjunto.

Un subconjunto X de un espacio métrico A clasifica a los puntos de éste en tres tipos diferentes: **puntos interiores, puntos exteriores y puntos frontera**:

Definición 8.5 *Un punto $a \in A$ es* ***interior*** *a $X \subset A$ si existe una $B(a,r) \subset X$. Al conjunto de los puntos interiores a X se le llama* ***interior de*** *X y se representa por $int(X)$ o $\overset{\circ}{X}$.*

Proposición 8.1 *Sea $X \subset A$. Se verifican:*

a) $\overset{\circ}{X} \subset X$.

b) $\overset{\circ}{X}$ es un conjunto abierto y es el mayor conjunto abierto contenido en X.

c) Un conjunto X es abierto $\Leftrightarrow X = \overset{\circ}{X}$.

Definición 8.6 *Un punto $a \in A$ es* ***exterior*** *a $X \subset A$ si es interior a X^C. Al conjunto de todos los puntos exteriores se le llama* ***exterior de*** *X y se representa por $ext(X)$.*

Un punto $a \in A$ es ***frontera*** *de $X \subset A$ si todo entorno suyo posee puntos de X y de X^C. Al conjunto de todos los puntos frontera se le llama* ***frontera de*** *X y se representa por $fr(X)$.*

Los 3 conjuntos $int(X)$, $ext(X)$ y $fr(X)$ son disjuntos dos a dos, y verifican

$$int(X) \cup ext(X) \cup fr(X) = A$$

8.1.4 Adherencia y conjunto derivado. Compactos en $\mathbb{R}^n$.

En esta sección estableceremos las definiciones y principales propiedades de **punto adherente** y **punto de acumulación**:

Definición 8.7 *Un punto $a \in A$ es* ***adherente*** *a un conjunto $X \subset A$ si todo entorno de a contiene puntos de X, es decir, si $\forall B(a,r)$, se verifica que $B(a,r) \cap X \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos adherentes a un conjunto se le llama* ***adherencia*** *o* ***clausura*** *y se designa por $\overline{X}$.*

Proposición 8.2 *Sea $X \subset A$. Se verifican:*
a) $X \subset \overline{X}$.
b) $\overline{X}$ es un conjunto cerrado y es el menor conjunto cerrado que contiene a X.
c) Un conjunto X es cerrado $\Leftrightarrow X = \overline{X}$.

Definición 8.8 *Un punto $a \in A$ es* ***de acumulación*** *a un conjunto $X \subset A$ si todo entorno reducido de a contiene puntos de X, es decir, si $\forall B^*(a,r)$, se tiene que $B^*(a,r) \cap X \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos de acumulación a un conjunto se le llama* ***conjunto derivado*** *y se representa por X'.*

Proposición 8.3 *Sea $X \subset A$. Se verifica que X es cerrado $\Leftrightarrow X' \subset X$.*

Definición 8.9 *A los puntos $x \in \overline{X}$ pero $x \notin X'$ se les llaman* ***puntos aislados*** *de X.*

Definición 8.10 ***(Caracterización de los conjuntos compactos de*** $\mathbb{R}^n$***)*** *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto sí y sólo sí es cerrado y acotado.*

8.1.5 Sucesiones en un espacio métrico.

Definición 8.11 *Se llama* ***sucesión*** *en el espacio métrico (A,d) a toda colección infinita y ordenada de elementos de A, es decir, a toda colección de elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (con $a_i \in A$, $\forall i$). Normalmente, consideraremos sucesiones cuyos elementos verifican una determinada relación (un determinado patrón) dependiente de un número natural n, de manera que a dicha sucesión la representaremos por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente por (a_n), donde a a_n le llamaremos* ***término general de la sucesión****.*

Definición 8.12 *Se llama* ***subsucesión*** *de la sucesión (a_n) a otra sucesión, a la que representaremos por (a_{n_k}), formada al tomar infinitos términos de (a_n) cuyos subíndices forman una sucesión $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ estríctamente creciente.*

Límite de una sucesión en un espacio métrico: Definición, ejemplos y propiedades.

Definición 8.13 *Sea (A,d) un espacio métrico y (a_n) una sucesión en A. Se dice que (a_n)* ***tiene por límite*** *el punto $a \in A$ si $d(a_n, a)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, es decir si*

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } d(a_n, a) < \varepsilon$$

Cuando una sucesión tiene límite se dice que es ***convergente*** *y se representa por $\lim a_n = a$.*

Si se particulariza esta definición para los espacios métricos que normalmente usaremos (y que son $A = \mathbb{R}^n$), se tiene:

- Si $A = \mathbb{R}$ (con la distancia usual), diremos que la sucesión de números reales (a_n) tiene por límite $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } |a_n - a| < \varepsilon$$

  o, lo que es equivalente, si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

- Si $A = \mathbb{R}^2$ (con la distancia euclídea d_2), diremos que la sucesión de pares de números reales (a_n, b_n) tiene por límite el par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$$

- Definiciones análogas pueden establecerse para $A = \mathbb{R}^2$ con la distancia d_1 o d_∞.

Pueden destacarse las siguientes 3 propiedades para las sucesiones en un espacio métrico cualquiera:

Proposición 8.4 *Si la sucesión (a_n) del espacio métrico (A, d) es convergente, su límite es único.*

Proposición 8.5 *Si (a_n) es convergente, entonces (a_n) está acotada.*

Proposición 8.6 *Si (a_n) es convergente, entonces cualquier subsucesión extraída de ella también es convergente y su límite es el mismo.*

Sucesiones de Cauchy: Espacios completos.

Otra definición que también va a desempeñar un papel importante es:

Definición 8.14 *Se dice que (a_n) es una* ***sucesión de Cauchy*** *en el espacio métrico (A, d) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \textit{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que si } n, m > n_0 \textit{ entonces } d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Las sucesiones convergentes están relacionadas con las sucesiones de Cauchy, ya que se verifica la siguiente propiedad:

Proposición 8.7 *Si (a_n) es una sucesión convergente, entonces (a_n) es una sucesión de Cauchy.*

Sin embargo, el recíproco de la anterior propiedad no es siempre cierto (es decir, hay sucesiones de Cauchy en un determinado espacio métrico A que no son convergentes en A), de ahí que resulta de interés la siguiente definición:

Definición 8.15 *Un espacio K es* ***completo*** *siempre que toda sucesión de Cauchy en K sea convergente en K.*

No obstante, para nosotros, y teniendo en cuenta los espacios métricos en los que vamos a trabajar (que siempre serán $A = \mathbb{R}^n$), los conceptos de sucesión de Cauchy y de sucesión convergente serán equivalentes, puesto que se verifica el siguiente resultado:

Proposición 8.8 *$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ es un espacio completo.*

8.2 Norma de un vector. Introdución a los espacios vectoriales normados.

Definición 8.16 *Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ se dice que es una* ***norma*** *en E si cumple:*
(a) $\|x\| = 0$ sí y sólo sí $x = 0$.
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall x \in E$.
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Definición 8.17 *A todo espacio vectorial E provisto de una norma $\|\cdot\|$, $(E, \|\cdot\|)$, se le llama* ***espacio vectorial normado****.*

Definición 8.18 *Se llama* ***espacio de Banach*** *a todo espacio vectorial normado E que sea completo.*

Fácilmente, puede probarse que la aplicación definida en un espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$, que a cada par de puntos (x, y) le hace corresponder el número real $\|x - y\|$ es una distancia, por lo que todo espacio vectorial normado es, en particular, un espacio métrico. A la distancia así definida, es decir, a la distancia dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, se le denomina **distancia asociada a la norma**.

Definición 8.19 *Sobre un espacio vectorial E dos normas, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$, se dice que son* ***equivalentes*** *si sus distancias asociadas son equivalentes.*

Un resultado a destacar, relacionado con esta última definición, es:

Proposición 8.9 *Sobre un espacio vectorial E de dimensión finita, todas las normas definidas sobre él son equivalentes. En particular, son equivalentes todas las normas definidas sobre $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 8.6 *Como ejemplo de aplicación de estos resultados, pueden establecerse las normas usuales que se consideran en $\mathbb{R}^n$ (respectivamente asociadas a las distancias d_1, d_2 y d_∞):*

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, ; \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \, ; \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

8.3 Funciones entre espacios métricos.

8.3.1 Definiciones.

En la Enseñanza Secundaria se suelen estudiar las propiedades fundamentales de las funciones de una variable, es decir, funciones del tipo $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nuestro objetivo será ahora el de estudiar funciones $f : A \to B$, siendo (A, d_A) y (B, d_B) dos espacios métricos arbitrarios, y viendo hasta que punto las propiedades conocidas para las funciones de una variable real son extensibles a este tipo de funciones más generales, así como obtener otro tipo de propiedades para estas funciones y que no aparecían en las funciones con una única variable. De nuevo, y aunque gran parte de las definiciones y propiedades que se van a establecer serán válidas para espacios métricos A y B cualesquiera, mayoritariamente haremos referencia a los espacios métricos $A = \mathbb{R}^n$ y $B = \mathbb{R}^m$ (siendo además el caso de mayor interés aquel en el que $m = 1$):

Definición 8.20 *Se llama* ***función real de varias variables reales*** *a toda aplicación*

$$\begin{aligned} f : X \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Se denomina ***función vectorial de variable vectorial*** *a toda aplicación*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Observación 2 *Una función vectorial equivale a un conjunto de m funciones reales de varias variables reales puesto que si $\mathbf{f}(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^m$, puede expresarse*

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$$

siendo cada función f_i una función real de varias variables reales, es decir, $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a la que se le llama ***función coordenada*** *de* $\mathbf{f}$. *Normalmente, a la función vectorial suele representarse por*

$$\mathbf{f} \equiv (f_1, f_2, ..., f_m)$$

Además, como se verá posteriormente, una gran parte de las propiedades de una función vectorial $\mathbf{f}$ *no son sino consecuencia inmediata de las propiedades de sus funciones coordenadas f_i.*

Definición 8.21 *Dada una función vectorial* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *se llama* ***dominio de definición*** *de* $\mathbf{f}$ *al conjunto determinado por*

$$D(\mathbf{f}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m\}$$

es decir, al conjunto

$$D(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ f_i(x) \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, ..., m\}$$

8.3.2 Representación gráfica. Curvas de nivel.

De modo análogo a como las funciones de una sola variable se representan mediante una curva en el plano, pueden representarse funciones reales con dos variables, $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, por medio de una superficie en $\mathbb{R}^3$:

Sea $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Esta función, a cada punto $(x, y) \in X$ le hace corresponder $f(x, y) = z \in \mathbb{R}$, con lo que se obtiene un punto $P(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$. Al lugar geométrico de los puntos P que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$, es decir, al conjunto

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x, y),\ \forall (x, y) \in D(f)\right\}$$

se le llama **gráfica** de la función f.

No obstante, esta representación gráfica tiene un doble inconveniente: Es imposible realizar una representación gráfica para funciones de tres o más variables, e incluso es bastante complicado realizar la representación gráfica para la mayoría de las funciones con dos variables. Por tal motivo en algunos casos es de gran utilidad el manejo de curvas de nivel:

Definición 8.22 *Se llama* ***curva de nivel*** *(a nivel k) a la proyección en un plano coordenado (por ejemplo, el plano OXY) de la intersección de la gráfica de f con un plano paralelo a dicho plano (por ejemplo, el plano $z = k$).*

Así, puede hacerse una idea sobre la gráfica de una función de 2 variables observando las curvaturas y distancias entre curvas de nivel a distintos niveles (separados a la misma distancia), puesto que la distancia entre las líneas de contorno proporcionan una medida de la inclinación de la superficie (la superficie sube o baja con rapidez en aquellas partes donde las líneas de contorno están muy próximas; en cambio, donde las líneas están más separadas, la superficie está más achatada o llana).

8.4 Límite de una función en un punto.

8.4.1 Definición y propiedades.

Veamos ahora como puede generalizarse el concepto de límite de una función en un punto (ya establecido para funciones reales con una variable) al caso más general de funciones con varias variables. Como se observará, la definición y las propiedades son prácticamente análogas al caso de funciones con una sola variable, cambiando poco más que la notación.

Definición 8.23 *Sea $f : X \subset A \to B$, con (A, d_A) y (B, d_B) dos espacios métricos arbitrarios, y $a \in X'$. Se dice que $f(x)$* **converge** *a $l \in B$ cuando x tiende hacia a, y se representa por $\lim_{x\to a} f(x) = l$, si se verifica que para todo valor de x próximo al punto a el valor que toma $f(x)$ en dicho punto se acerca al punto l, es decir si*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \exists\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0,\ \textit{tal que si } d_A(x,a) < \delta\ (\textit{con } x \in X, x \neq a),$$
$$\textit{entonces } d_B(f(x), l) < \varepsilon$$

Si particularizamos esta definición para los espacios métricos en los que usualmente se va a trabajar, es decir, si se toma $A = \mathbb{R}^n$ y $B = \mathbb{R}^m$, y bajo las anteriores hipótesis, se tendrán las siguientes definiciones:

- **Funciones con una sola variable** ($f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$): Se obtiene, evidentemente, la noción anteriormente establecida:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ tal que si } |x-a| < \delta,\ x \neq a, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon)$$

- **Funciones reales con varias variables** ($f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$): La definición es análoga a la anterior, sólo que considerando la respectiva distancia en $\mathbb{R}^n$. Así, si se toma por ejemplo la distancia euclídea d_2:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ tal que si } \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} < \delta,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{a}, \text{ entonces } |f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon\right)$$

- **Funciones vectoriales** ($\mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$): El cálculo de límites de este tipo de funciones se reduce al cálculo de límites de funciones del anterior tipo, puesto que se verifica que si $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ es una función vectorial, entonces para que exista $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y sea $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_m)$, es necesario y suficiente que exista el límite en el punto $\mathbf{a}$ de cada una de sus funciones coordenadas f_i y coincida con l_i, es decir

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_m) \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = l_i,\ \forall i = 1, 2, ..., m$$

  Así, calcular el límite de una función vectorial no es sino calcular el límite de varias funciones reales con varias variables, de ahí que en lo que resta de capítulo insistiremos principalmente en el cálculo de límites de funciones reales con varias variables.

Entre las principales propiedades, destacamos:

Proposición 8.10 *En las anteriores condiciones, si existe el límite de una función en un punto* **a**, *éste es único.*

Proposición 8.11 *En las anteriores condiciones, si existe el límite de una función en un punto* $\mathbf{a}$, *esta función está acotada en un entorno del punto* $\mathbf{a}$.

Proposición 8.12 *Sea* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\mathbf{a}$ *un punto de acumulación de* X. *Entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$ *sí y sólo sí para toda sucesión* $(\mathbf{x}_n)$ *de puntos de* X *convergente hacia* $\mathbf{a}$ *se tiene que el límite de la sucesión* $(f(\mathbf{x}_n))$ *es* l.

Este último resultado viene a afirmar que para que exista $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ y sea l, sean cuales sean los puntos que elijamos de X que se aproximen al punto $\mathbf{a}$, los valores que toma la función en dichos puntos se aproximan a l.

En base a este resultado podemos establecer los siguientes tipos particulares de límites (y que nos ayudarán a estudiar la existencia de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$).

8.4.2 Límites direccionales y límites iterados.

Por comodidad en cuanto a la notación, en lo siguiente nos centraremos en el estudio de la existencia del límite para una función real con dos variables reales, es decir, en el estudio de $\lim_{x\to(a,b)} f(x,y) = l$, siendo $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y (a,b) un punto de acumulación de X.

Vamos a utilizar la última proposición para intentar estudiar la existencia de $\lim_{x\to(a,b)} f(x,y)$, es decir, lo que vale la función $f(x,y)$ cuando nos aproximamos al punto (a,b) :

- Una primera forma de aproximación al punto (a,b) es analizar los valores que toma f en las proximidades de (a,b), tomando puntos cada vez más próximos a (a,b) y que se encuentren en una curva determinada que pasa por dicho punto. A estos límites así obtenidos les llamaremos **límites direccionales**. Como es imposible evaluar f a lo largo de todas las curvas que pasan por (a,b), nos limitaremos a evaluar la función sobre dos tipos particulares de curvas: rectas y parábolas que pasan por (a,b), es decir calcularemos $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ teniendo en cuenta que entre las variables existen las relaciones:

$$\begin{array}{c} y = m(x-a) + b \text{ (ec. de la recta que pasa por } (a,b)) \\ y = m(x-a)^2 + b \text{ (ec. de la parábola que pasa por } (a,b)) \\ x = m(y-b)^2 + a \text{ (ec. de la parábola que pasa por } (a,b)) \end{array}$$

  De esta forma, lo que inicialmente es un límite en dos variables, se reduce al cálculo de un límite en una sola variable.

- También podemos considerar la aproximación al punto (a,b) a través de las coordenadas, es decir, tomando el límite cuando $x \to a$ (siendo y una constante) y posteriormente hacer $y \to b$; o viceversa, es decir, tomando primero límites cuando $y \to b$ (siendo x una constante) y posteriormente hacer $x \to a$. En resumen, se trata de calcular los siguientes límites

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$$

  A estos límites así obtenidos se les llama **límites iterados**.

Observación 3 *Las dos formas anteriormente descritas de cálculo de límites, no son sino dos tipos particulares de evaluar los valores que toma la función en las proximidades de un punto. ¿Cual es la relación existente entonces entre ambos tipos particulares de límites y la* *existencia del límite doble? Evidentemente, si existe el límite doble, han de existir los límites direccionales y los límites iterados y ambos ser iguales. No obstante, es posible que existan los límites direccionales e iterados, y coincidan entre ellos, y que sin embargo no exista el límite doble. Estas consideraciones se resumen en las dos siguientes propiedades.*

Proposición 8.13 *Si existe* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$*, entonces han de existir los límites direccionales y su valor ha de ser* l.

Proposición 8.14 *Si existe* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ *y existen los límites iterados, entonces el valor de éstos ha de ser* l.

Observación 4 *Los recíprocos de las anteriores proposiciones no son ciertos (como veremos en ejemplos), es decir:*

- *Si existen los límites direccionales y valen* l*, no puede asegurarse nada sobre la existencia de* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.
- *Si existen los límites iterados y valen* l*, no puede asegurarse nada sobre la existencia de* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.

En ambos casos, a lo sumo podremos asegurar que, caso de que exista, su valor ha de ser l.

Así, como puede observarse, los límites direccionales e iterados nos determinan la no existencia del límite doble, aunque no nos ayudan para demostrar cuando existe el límite doble.

8.4.3 Cambio a coordenadas polares.

Entonces, para intentar resolver el problema de la existencia del límite doble, vamos a utilizar un tercer procedimiento, el **cambio a coordenadas polares**, que viene determinado por el cambio de variables

$$x = a + \rho\cos\theta, \qquad y = b + \rho\sin\theta$$

donde $\theta \in (0, 2\pi]$ es el ángulo (**argumento**) de la aproximación al punto (a, b) y ρ (**módulo**) es la distancia del punto (x, y) al punto (a, b). Así, para calcular el $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ realizaremos el cambio anterior, quedando

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f\left(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta\right)$$

de forma que **si este límite no existe o depende del ángulo de la aproximación** θ**, podremos afirmar que no existe el límite doble. Además, si se verifica que este último límite vale** l **y que los límites iterados y direccionales existen y también valen** l**, aceptaremos que** $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.

8.4.4 Operaciones con límites.

Al igual que ocurre con las funciones de una sola variable, se verifica:

Proposición 8.15 *Sean* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funciones vectoriales,* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X'$ *y supongamos que existen* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *y* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$. *Entonces:*

a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f} \pm \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

b) Si $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}))(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

c) Si $m = 1$ *y* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x})}$.

8.5 Funciones continuas de varias variables.

8.5.1 Definición de función continua en un punto.

Definición 8.24 *Sea* $\mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función vectorial y* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X$. *Se dice que la función* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *es* ***continua en el punto*** $\mathbf{a}$ *si existe* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *y coincide con el valor de* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

A partir de la relación existente entre los límites de funciones vectoriales con los límites de funciones reales de varias variables reales se deduce el siguiente resultado:

Proposición 8.16 *Sea* $\mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función vectorial. Entonces* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *es continua en el punto* $\mathbf{a} \in X$ *sí y sólo sí cada función componente* $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua en l punto* $\mathbf{a} \in X$, $\forall i = 1, 2, ..., m$.

Proposición 8.17 *(Operaciones con funciones continuas) Sean* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funciones vectoriales continuas en* $\mathbf{a} \in X$. *Entonces:*

a) $\mathbf{f} \pm \mathbf{g}$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

b) Si $m = 1$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

c) Si $m = 1$ *y* $\mathbf{g}(\mathbf{a}) \neq 0$, $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})}$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

Proposición 8.18 *(Continuidad de la función compuesta) Sea* $\mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continua en* $\mathbf{a} \in X$ *y* $\mathbf{g} : Y \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, *con* $\mathbf{f}(X) \subset Y$, *continua en el punto* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$. *Entonces la función compuesta* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *es continua en el punto* $\mathbf{a}$.

8.5.2 Propiedades de las funciones continuas en un conjunto compacto.

Al igual que sucede en funciones de una sola variable, se verifican los siguientes resultados:

Teorema 8.19 *(Teorema de Weierstrass) Sea* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua en* X, *siendo* X *compacto. Entonces* f *está acotada superior e inferiormente y existen dos puntos* $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$ *tal que en ellos la función alcanza sus valores máximo y mínimo, es decir*

$$f(\mathbf{x}') = \max\{f(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}\} = M \qquad y \qquad f(\mathbf{x}'') = \min\{f(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}\} = m$$

Teorema 8.20 *(Valores intermedios) Sea* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua en* X, *con* X *compacto. Si* M *y* m *son, respectivamente, los valores máximo y mínimo que alcanza* f *en* X, *para cada* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $m < k < M$, *existe un* $\mathbf{x} \in X$ *tal que* $f(\mathbf{x}) = k$.