UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Capítulo 6

Integración de funciones de una variable real.

PROGRAMA DETALLADO:

6.1 Integral de Riemann:

- 6.1.1 Partición de un intervalo.
- 6.1.2 Sumas inferiores y suma superiores. Definición de función integrable.
- 6.1.3 Sumas de Riemann. Aplicación al cálculo de límites de sucesiones.

6.2 Propiedades de las funciones integrables.

6.3 Función integral. Regla de Barrow.

6.4 Métodos elementales de integración:

- 6.4.1 Integración por cambio de variable.
- 6.4.2 Integración por partes.

TEMA 7: CÁLCULO DE PRIMITIVAS.
〃 8: INTEGRALES IMPROPIAS.
〃 9: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL.

6.1 Integral de Riemann.

El concepto de **integral definida en sentido de Riemann** (para nosotros, simplemente **integral definida**) se origina a partir del concepto de área, de forma que el valor del área comprendida entre la curva $f(x)$ con $a \leq x \leq b$, se representará por

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde se supondrá que la función f está acotada y es positiva en el intervalo $[a,b]$. Caso de que la función $f(x)$ posea tramos positivos y negativos, éstos se analizarán por separado, de manera que, a todos los efectos, no supone pérdida de generalidad el considerar que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Paseo Alfonso XIII, 52 - 30203 Cartagena • Tel. 968 32 56 33 • Fax: 968 32 56 94

6.1.1 Partición de un intervalo.

Definición 6.1 *Dado un intervalo de la recta real, $[a,b]$, se dice que el conjunto*

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

*es una **partición** de $[a,b]$, si se verifica que $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$.*

Definición 6.2 *Se llama **norma de la partición** P, y se representa por $\|P\|$, a la mayor distancia entre dos puntos consecutivos de la misma, es decir*

$$\|P\| = \max_{i=1,...,n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

En otras palabras, considerar una partición de un intervalo no es sino dividirlo en trozos más pequeños, siendo la norma de dicha partición la longitud del trozo mayor.

Definición 6.3 *Dadas dos particiones de un mismo intevalo, P y Q, se dice que P es **más fina** que Q si $\|P\| < \|Q\|$ y todos los puntos de Q también están en P; es decir, si P divide al intervalo en más subintervalos y éstos son más pequeños que los de Q.*

Sea entonces $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea P una partición de $[a,b]$, que divide a dicho intervalo en n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Así, pueden considerarse los valores mínimo y máximo que alcanza la función f en cada uno de ellos, a los que denotaremos, respectivamente, por m_i y M_i, es decir

$$m_i = \min\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \max\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Así, los productos $m_i(x_i - x_{i-1})$ y $M_i(x_i - x_{i-1})$ representarán, respectivamente, las áreas de los rectángulos formados por el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y los valores mínimo y máximo de dicha función, siendo obvio que el área comprendida entre la gráfica de la función f y el eje de abcisas en este subintervalo se mantiene entre las áreas de ambos rectángulos.

6.1.2 Sumas inferiores y suma superiores. Definición de función integrable.

En este sentido surge la siguiente definición, que nos permitirá establecer propiedades interesantes:

Definición 6.4 *Con la notación anterior, se denomina* **suma inferior** *de la partición P asociada a la función f en el intervalo $[a,b]$, a la suma formada por todas las áreas de los rectángulos inferiores en cada subintervalo, es decir*

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

Se denomina **suma superior** *de la partición P asociada a la función f en el intervalo $[a,b]$, a la suma formada por todas las áreas de los rectángulos superiores en cada subintervalo, es decir*

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Veamos algunas propiedades que tienen este tipo de sumas:

Proposición 6.1 *En las anteriores condiciones, se verifican:*
a) $s(P) \leq Area \leq S(P)$.
b) $m(b-a) \leq s(P)$, *siendo* $m = \min\{f(x);\ x \in [a,b]\}$.
c) $S(P) \leq M(b-a)$, *siendo* $M = \max\{f(x);\ x \in [a,b]\}$.

Por tanto

$$m(b-a) \leq s(P) \leq Area \leq S(P) \leq M(b-a)$$

siendo ambos extremos cantidades constantes.

Proposición 6.2 *Sean P y Q dos particiones de un mismo intervalo $[a,b]$, con P más fina que Q. Entonces:*
a) $s(P) \geq s(Q)$.
b) $S(P) \leq S(Q)$.

Proposición 6.3 *Para todo par de particiones P_1 y P_2 de un mismo intervalo $[a,b]$, siempre se tiene que* $s(P_1) \leq S(P_2)$.

En base a las anteriores consideraciones, se observa que la aproximación al área encerrada bajo la curva se mejora al tomar particiones del intervalo cada vez más finas con norma tendiendo a cero (es decir, considerando un número de subdivisiones del intervalo $[a,b]$ que tienda a infinito).

Así, si se considera una sucesión de particiones del intervalo, (P_n), cada vez más finas con norma tendiendo a cero, y calculando para cada una de ellas sus correspondientes sumas inferior y superior, obtendremos, respectivamente, la sucesión de sumas inferiores, $(s(P_n))$, y la de sumas superiores, $(S(P_n))$. La primera de ellas es monótona creciente y acotada superiormente por $M(b-a)$, mientras que la segunda es monótona decreciente y acotada inferiormente por $m(b-a)$. Por tanto, ambas sucesiones son convergentes. Así, tiene sentido considerar la siguiente definición:

Definición 6.5 *Se llama* ***integral inferior*** *de f en el intervalo $[a,b]$, al límite de la sucesión de sumas inferiores obtenida anteriormente, y se representa por $\underline{\int_a^b} f$.*

Se llama ***integral superior*** *de f en el intervalo $[a,b]$, al límite de la sucesión de sumas superiores obtenida anteriormente, y se representa por $\overline{\int_a^b} f$.*

Es decir

$$\underline{\int_a^b} f = \lim s(P_n); \quad \overline{\int_a^b} f = \lim S(P_n)$$

Como consecuencia de lo anterior, es inmediato comprobar que el área de la función f se encuentra entre estos dos valores.

Definición 6.6 *Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es* ***integrable en sentido Riemann*** *(o simplemente* ***integrable****) cuando coinciden la integral inferior y superior de f en el intervalo $[a,b]$, es decir, cuando*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

A dicho valor común se le denomina ***integral definida*** *de f en $[a,b]$, y se representa por $\int_a^b f(x)dx$.*

Por tanto, si f es integrable en $[a,b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim s(P_n) = \lim S(P_n)$$

Ejemplo 6.1 *Probar que toda función constante ($f(x) = k$ (cte)) es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$.*

Otro resultado (también teórico) que nos ayuda a estudiar si una función es integrable en un intervalo es:

Proposición 6.4 *(Criterio de integrabilidad) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(P) - s(P) < \varepsilon$.*

Ejemplo 6.2 *Probar que $f(x) = x^2$ es integrable en $[0,1]$ y calcular el valor de su integral.*

Ejemplo 6.3 *Probar que la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 \ si \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable en $[0,2]$.

6.1.3 Sumas de Riemann. Aplicación al cálculo de límites de sucesiones.

Otro procedimiento, también teórico aunque con interesantes aplicaciones, de obtención de la integral definida es por medio del estudio de las denominadas **sumas de Riemann** de una partición:

Supongamos que f es una función integrable en $[a,b]$, y sea P una partición de dicho intervalo en subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Si ξ_i es un punto arbitrario de dicho subintervalo, se verifica, trivialmente, que

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i (\forall i = 1, 2, ..., n),$$

por lo que se tendrá

$$s(P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(P)$$

Entonces:

Definición 6.7 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada e integrable y sea* P *una partición de* $[a,b]$. *Se denomina* ***suma de Riemann*** *de* f *en* $[a,b]$ *asociada a* P, *al valor*

$$S_R(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Así, si (P_n) es una sucesión de particiones de $[a,b]$ cada vez más finas y con norma tendiendo a cero, y si para cada una de ellas se calculan la suma inferior, superior y de Riemann, se obtendrán 3 sucesiones numéricas tales que sus términos generales verifican

$$s(P_n) \leq S_R(P_n) \leq S(P_n)$$

Al ser, por hipótesis, la función f integrable en $[a,b]$, sabemos que

$$\lim s(P_n) = \lim S(P_n) = \int_a^b f(x)dx,$$

por lo que también habrá de ser

$$\lim S_R \equiv \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Por tanto, otra forma de calcular el valor de la integral de una función en $[a,b]$ (una vez que se tiene la certeza de que dicha función es integrable) es mediante el límite de la correspondiente suma de Riemann.

La ventaja que depara utilizar esta última forma de obtener el valor de la integral de una función integrable es que se pone de manifiesto que el valor de la misma es independiente de la sucesión de particiones (P_n) que se tome del intervalo $[a,b]$ y de los puntos arbitrarios ξ_i.

Por tanto, y desde un punto de vista práctico, se recomienda el uso de las siguientes elecciones:

- Tomar como partición de $[a,b]$ aquella que lo divide en n partes iguales, es decir,

$$P_n = \left\{a = x_0,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b\right\}$$

(notemos que la norma de esta partición, $\|P_n\| = \dfrac{b-a}{n}$, converge a 0 cuando n tiende a infinito).

- En cada subintervalo de la partición

$$[x_{i-1}, x_i] = \left[a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}\right]$$

se tomará como punto intermedio el extremo superior de dicho intervalo, es decir

$$\xi_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

Proposición 6.5 *En base a las anteriores consideraciones, el cálculo de la integral de Riemann de f en $[a,b]$ puede obtenerse a partir del límite*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Ejemplo 6.4 *Probar que la función $f(x) = e^x$ es integrable en $[0,1]$ y calcular el valor de su integral mediante sumas de Riemann.*

Observación 1 *Hemos de notar que tanto el procedimiento de las sumas inferiores y sumas superiores, como el de las sumas de Riemann, son de fácil uso en computación, siendo más rápido el método de sumas de Riemann, debido a la menor cantidad de cálculos que han de realizarse.*

Además de servirnos para el cálculo de integrales definidas, las sumas de Riemann también tienen otra interesante aplicación: el **cálculo de algunos límites de sucesiones**. La idea consiste, básicamente, en expresar un determinado límite de una sucesión como una suma de Riemann; de esta forma, el cálculo de dicho límite, y usando la anterior igualdad, se reduce al cálculo de una integral definida (aunque para ello, habremos de establecer una forma diferente de calcular integrales definidas; esta forma, como se verá posteriormente, será la regla de Barrow).

Ejemplo 6.5 *Calcular los siguientes límites de sucesiones:*

$$a)\ \lim \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

$$b)\ \lim \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+n}\right)$$

6.2 Propiedades de las funciones integrables.

Veamos a continuación algunas propiedades que verifican las funciones integrables, algunas de las cuales tienen que ver con el valor de la correspondiente integral:

Proposición 6.6 *Se verifican, de forma inmediata:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Proposición 6.7 *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Proposición 6.8 *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función monótona en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Proposición 6.9 *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Observación 2 *Hemos de remarcar que los 3 resultados anteriores nos permiten asegurar que existe una cantidad muy grande de funciones que son integrables (las que son continuas, las que son monótonas, etc.) sin necesidad de que tener que establecer la integrabilidad de las mismas en base a la definición de integral de Riemann. De esta forma, para cualquiera de estas funciones podemos pasar a calcular el valor de su integral mediante el cálculo del límite de sus sumas de Riemann (Proposición 6.5), sin tener que calcular para nada sus sumas superiores e inferiores. No obstante, y como ya ha quedado puesto de manifiesto, usar la Proposición 6.5 para calcular integrales (a pesar de que es más ventajoso que usar sumas superiores e inferiores) no deja de ser engorroso (basta con que la integral a calcular sea complicada para que sea prácticamente imposible calcular el límite de la correspondiente suma de Riemann), por lo que habremos de establecer alguna otra forma más práctica de calcular integrales definidas.*

Proposición 6.10 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$. Se verifican:*

a) Si $c\in(a,b)$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

b) Si $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $\alpha\cdot f$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b \alpha\cdot f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$$

c) Si $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es otra función integrable en $[a,b]$, entonces $f\pm g$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

d) Si $f(x)\geq 0$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

e) Si $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función integrable en $[a,b]$, con $f(x) \leq g(x)$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

f) La función $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Observación 3 *Si $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función integrable en $[a,b]$, el producto $f(x) \cdot g(x)$ es integrable en $[a,b]$, pero*

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))\, dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

No obstante, puede establecerse una relación entre la integral del producto y el producto de las integrales: Esta relación es conocida como ***Desigualdad de Schwartz*** *y establece que*

$$\left(\int_a^b (f(x) \cdot g(x))\, dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2\, dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\, dx$$

Teorema 6.11 ***(Teorema de la media integral)*** *Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(c)$$

Ejercicio 6.1 *Interpretar gráficamente la igualdad dada por el teorema de la media.*

6.3 Función integral. Regla de Barrow.

Si consideramos una función $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea integrable, se tiene que para todo punto $x \in [a,b]$, la función también es integrable en $[a,x]$, por lo que tiene sentido considerar $\int_a^x f(t)dt$, resultado que dependerá de x. De esta forma se observa que a partir de una función $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea integrable podemos definir una nueva función $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

y a la que se llama **función definida mediante una integral** o **función integral** asociada a f en $[a,b]$.

Pueden establecerse determinadas propiedades para esta nueva función F a partir de propiedades que verifique la función original f :

Proposición 6.12 ***(1er teorema fundamental del Cálculo Integral)*** *Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$.*

Proposición 6.13 ***(Segundo teorema fundamental del Cálculo Integral)*** *Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $[a,b]$ y se verifica que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.*

Este último resultado nos conduce al concepto de función primitiva de una función f :

Definición 6.8 *Una función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable se dice que es una* **primitiva** *de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si se verifica que $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.*

Observación 4 *Del 2º th. fundamental del Cálculo Integral se deduce que si f es continua, su función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ siempre es una primitiva suya. Por tanto, ya tenemos una primera forma de calcular primitivas de una función continua: basta con considerar su función integral asociada. No obstante, y como estableceremos en el capítulo siguiente, intentaremos en lo posible calcular primitivas de una función que vengan en forma explícita, es decir, que en su expresión no aparezca el símbolo integral.*

Proposición 6.14 *Si F y G son dos primitivas de una misma función f, se tiene que*

$$F(x) - G(x) = cte.$$

Observación 5 *De este último resultado se desprende que es posible que una misma función f tenga infinitas primitivas, pero sin embargo la diferencia entre dos cualesquiera de ellas siempre es una constante. Es por este motivo por el que a la primitiva de una función continua suele denotarse por*

$$\int f(x)dx + cte$$

La importancia del cálculo de primitivas (al que dedicaremos el capítulo siguiente) se observa a partir del siguiente resultado (que nos permitirá calcular integrales definidas sin tener que acudir al cálculo de límites de sucesiones, ya sean de sumas de Riemann o sumas superiores e inferiores):

Proposición 6.15 ***(Regla de Barrow)*** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva suya, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \equiv [G(x)]_a^b$$

6.4 Métodos elementales de integración.

En esta última sección vamos a recordar los dos principales métodos de integración estudiados hasta ahora en el Bachillerato: el cambio de variable y la integración por partes, incidiendo sobre todo en el primero de ellos, y en como cuando se realiza un cambio de variable en una integral definida también es preciso cambiar las cotas de integración.

6.4.1 Integración por cambio de variable.

Proposición 6.16 ***(Integración por cambio de variable)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ una función de clase $C^{(1)}$ en $[\alpha,\beta]$, y tal que $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Entonces se verifica*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Ejemplo 6.6 *Calcular*

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

6.4.2 Integración por partes.

Proposición 6.17 *(Integración por partes) Sean $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y tales que sus funciones derivadas u' y v' son integrables en $[a,b]$. Entonces se verifica*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

expresión que suele abreviarse en la forma

$$\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. (TEMA 7)

INTEGRALES IMPROPIAS. (TEMA 8)

APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL. (TEMA 9)

(De los temas 7, 8 y 9 no hay transparencias.)