UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

1º de Ingeniero Industrial.
Asignatura: Cálculo. Curso 03/04
Profesor: Roque Molina Legaz

Capítulo 5

Sucesiones y series numéricas.

PROGRAMA:

5.1 Sucesiones de números reales:

- 5.1.1 Definiciones y propiedades.
- 5.1.2 Operaciones con límites.
- 5.1.3 Cálculo de límites indeterminados.
- 5.1.4 Sucesiones de Cauchy. Espacios completos.

5.2 Series de números reales:

- 5.2.1 Definiciones y propiedades.
- 5.2.2 Series de términos positivos.
- 5.2.3 Series de términos cualesquiera.

5.1 Sucesiones de números reales.

Definición 5.1 *Se llama* ***sucesión de números reales*** *a toda colección infinita y ordenada de elementos de* $\mathbb{R}$*, es decir, a toda colección de elementos* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *(con* $a_i \in \mathbb{R}$*,* $\forall i$*). Normalmente, consideraremos sucesiones cuyos elementos verifican una determinada relación (un determinado patrón) dependiente de un número natural* n*, de manera que a dicha sucesión la representaremos por* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, o simplemente por* (a_n)*, donde a* a_n *le llamaremos* ***término general de la sucesión****.*

Definición 5.2 *Se llama* ***subsucesión*** *de la sucesión* (a_n) *a otra sucesión, a la que representaremos por* (a_{n_k})*, formada al tomar infinitos términos de* (a_n) *cuyos subíndices forman una sucesión* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *estríctamente creciente.*

El objetivo de ete capítulo es estudiar las sucesiones de números reales desde una doble perspectiva: por un lado, calcular su límite (si existe), cosa que haremos en esta sección; y, por otro lado, intentar saber lo que vale la suma de sus infinitos términos (que será a lo que llamaremos **serie numérica**, como veremos en la sección siguiente).

Paseo Alfonso XIII, 52 - 30203 Cartagena • Tel. 968 32 56 33 • Fax: 968 32 56 94

5.1.1 Definiciones y propiedades.

Comenzamos dando la definición de sucesión convergente:

Definición 5.3 *Una sucesión de números reales* (a_n) ***tiene por límite el número real*** a *si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } |a_n - a| < \varepsilon$$

ó lo que es lo mismo si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Cuando una sucesión no tiene por límite un número real, se dice que es **no convergente**. Así, entre las sucesiones no convergentes pueden distinguirse aquellas que tienen límite infinito (**sucesiones divergentes**) y las que no tienen límite ni finito ni infinito (**oscilantes**).

Definición 5.4 *Así, se dice que una sucesión* (a_n) *tiene* ***límite*** $+\infty$ *si*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ K > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } a_n > K$$

y se dice que tiene ***límite*** $-\infty$ *si*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ K > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } a_n < -K$$

Pueden destacarse las siguientes 3 propiedades para las sucesiones de números reales:

Proposición 5.1 *Si la sucesión* (a_n) *es convergente, su límite es único.*

Proposición 5.2 *Si* (a_n) *es convergente, entonces* (a_n) *está acotada.*

Proposición 5.3 *Si* (a_n) *es convergente, entonces cualquier subsucesión extraída de ella también es convergente y su límite es el mismo*

Además, este tipo particular de sucesiones también verifican las siguientes propiedades:

Proposición 5.4

a) Sean (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones de números reales convergentes hacia el mismo límite* a. *Si* (c_n) *es otra sucesión tal que* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para* $n > n_0$, *entonces* (c_n) *es convergente y* $\lim c_n = a$.

b) Si (a_n) *es una sucesión creciente (resp. decreciente) acotada superiormente (resp. inferiormente) entonces es convergente y su límite es el supremo (resp. el ínfimo) del conjunto de números reales que forman sus términos.*

c) Si $\lim a_n = a$, *con* $a < x$ *(resp.* $a > x$*), entonces los términos de* (a_n) *son menores (resp. mayores) que* x *a partir de un* n_0.

d) Si $a_n < b_n$, *entonces* $\lim a_n < \lim b_n$.

5.1.2 Operaciones con límites.

Proposición 5.5 *(Operaciones con límites finitos) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales con límites respectivos a y b. Entonces:*

a) $\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$.

b) $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.

c) Si $b \neq 0$, $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

d) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim (\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$.

e) Si $k > 0$, $\lim k^{a_n} = k^{\lim a_n}$.

f) Si $a > 0$, $\lim (\log a_n) = \log(\lim a_n)$.

g) Si $a > 0$, $\lim \left(a_n^{b_n}\right) = (\lim a_n)^{\lim b_n}$.

Proposición 5.6 *(Operaciones con límites infinitos)*

a) Si $\lim a_n = +\infty$ *y* $\lim b_n = +\infty$ *o es constante, entonces* $\lim (a_n + b_n) = +\infty$.

b) Si $\lim a_n = +\infty$ *y* $\lim b_n = +\infty$ *o es cte*> 0, *entonces* $\lim (a_n \cdot b_n) = +\infty$.

c) Si $\lim a_n = +\infty$ *y* $\lim b_n$*=cte, entonces* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d) Si $\lim a_n = 0$ *y* $\lim b_n = \pm\infty$ *o cte, entonces* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

De los casos anteriores se han omitido las operaciones que dan lugar a expresiones de la forma $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ y $\dfrac{0}{0}$, que dan lugar a **indeterminaciones** (es decir, son expresiones de las que a priori no puede saberse lo que vale su límite, sino que tendremos que hacer las correspondientes operaciones para solucionar dicha indeterminación). Puesto que además se verifica

$$\lim \left(a_n^{b_n}\right) = e^{\lim b_n \log a_n}$$

también serán indeterminaciones las expresiones de la forma 1^∞, ∞^0 y 0^0.

5.1.3 Cálculo de límites indeterminados.

- **Límites de expresiones racionales.**
- **Límites de expresiones irracionales.**
- **El número e:**

Se verifica que la sucesión de término general $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es convergente y se tiene que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2.718382...$$

El resultado anterior puede generalizarse, puesto que también se verifica que si $\lim a_n = +\infty$, entonces

$$\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

• **Infinitésimos e infinitos. Equivalencias:**

Definición 5.5 *Se llama* ***infinitésimo*** *a toda sucesión con límite cero. Se llama* ***infinito*** *a toda sucesión con límite infinito.*

Proposición 5.7 *El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo.*

Definición 5.6 *Dos infinitésimos (resp. infinitos) (a_n) y (b_n) son* ***equivalentes****, si* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$. *Se indicarán por $a_n \sim b_n$.*

Proposición 5.8 ***(Tabla de infinitésimos equivalentes)***

- $\log(1 + a_n) \sim a_n$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $\log(a_n) \sim a_n - 1$ *(si* $\lim a_n = 1$*)*
- $\sin a_n \sim a_n$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $\tan a_n \sim a_n$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $\arcsin a_n \sim a_n$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $\arctan a_n \sim a_n$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $e^{a_n} - 1 \sim a_n$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $k^{a_n} - 1 \sim a_n \log k$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*
- $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha a_n$ *(si* $\lim a_n = 0$*)*

Proposición 5.9 ***(Tabla de infinitos equivalentes)***

- $a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p \sim a_0 n^p$.
- $\log(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p) \sim \log n^p$.
- $\log \varphi(n) \sim \log n^p$, *siendo $\varphi(n)$ una función racional de grado $p \neq 0$.*
- $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ ***(Fórmula de Stirling)***.

Los infinitésimos e infinitos equivalentes son importantes ya que, en determinados límites, podremos aplicar el siguiente resultado:

Proposición 5.10 ***(Principio de sustitución)*** *Todo infinitésimo o infinito que sea* ***factor o divisor*** *en un límite puede sustituirse por uno equivalente sin que se altere el valor de dicho límite.*

El principio de sustitución nos permite establecer una fórmula muy simple para resolver indeterminaciones de la forma 1^∞ :

$$\lim \left(a_n^{b_n}\right) = e^{\lim b_n (a_n - 1)}$$

• **El criterio de Stolz:**

Este criterio es de aplicación para resolver límites de la forma $\frac{a_n}{b_n}$, siempre que ambas sucesiones cumplan determinadas condiciones.

Proposición 5.11 ***(Criterio de Stolz)*** *Si la sucesión (b_n) es creciente y divergente, y si la expresión $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ tiene límite, entonces se verifica*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

Este criterio también es válido si $\lim a_n = \lim b_n = 0$, *siendo (b_n) decreciente.*

5.1.4 Sucesiones de Cauchy. Espacios completos.

Otra definición que también va a desempeñar un papel importante dentro del estudio de las sucesiones (aunque no tanto dentro de las sucesiones de números reales) es:

Definición 5.7 *Se dice que (a_n) es una **sucesión de Cauchy** en $\mathbb{R}$ si*

$$\forall\varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n, m > n_0 \text{ entonces } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Las sucesiones convergentes están relacionadas con las sucesiones de Cauchy, ya que se verifica la siguiente propiedad:

Proposición 5.12 *Si (a_n) es una sucesión convergente, entonces (a_n) es una sucesión de Cauchy.*

Sin embargo, el recíproco de la anterior propiedad no es siempre cierto en un cuerpo cualquiera K (es decir, hay sucesiones de Cauchy en un determinado cuerpo K que no son convergentes en K), de ahí que resulta de interés la siguiente definición:

Definición 5.8 *Un cuerpo K es **completo** siempre que toda sucesión de Cauchy en K sea convergente en K.*

No obstante, en $\mathbb{R}$, los conceptos de sucesión de Cauchy y de sucesión convergente serán equivalentes, puesto que se verifica:

Proposición 5.13 *$\mathbb{R}$ es un espacio completo.*

5.2 Series de números reales.

5.2.1 Definiciones y propiedades.

El objetivo de esta última sección es el de intentar calcular la suma de los infinitos términos de una sucesión (a_n), es decir, intentar saber lo que vale

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

si no de forma exacta, al menos sí teniendo una ligera idea de lo que se obtendría como resultado de dicha suma infinita.

Para ello, a partir de una sucesión de números reales (a_n) formaremos una nueva sucesión (S_n) cuyos términos vienen dados por

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ ...,\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\ ...$$

Definición 5.9 *A esta nueva sucesión (S_n) así construida se le llama **serie de números reales** y se le denota por*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \quad o \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad o \text{ simplemente por } \sum a_n$$

Definición 5.10 *Diremos que la serie $\sum a_n$ es* **convergente** *si existe y es finito el $\lim S_n$. En este caso, se dice que la* **suma de la serie** *es el valor de dicho límite, y se representa por $\sum a_n = \lim S_n$.*

Si $\lim S_n = \pm\infty$ se dice que la serie $\sum a_n$ es **divergente** *y si no existe $\lim S_n$ se dice que la serie $\sum a_n$ es* **oscilante**.

Ejemplo 5.1 *Series geométricas y series telescópicas.*

El objetivo que vamos a perseguir en lo siguiente será el de estudiar la convergencia o divergencia de una serie, y en el caso de que sea convergente, intentar hallar lo que vale su suma. Así, una forma lógica de actuar a la hora de estudiar la convergencia de una serie sería calcular lo que vale su suma. Sin embargo, y como veremos a lo largo de toda esta sección, no siempre será posible hallar la suma de una serie numérica (en la mayoría de ellas no tendremos procedimientos para poder sumarlas), y tendremos que conformarnos con establecer criterios que nos aseguren si una serie es o no convergente, independientemente del cálculo de su suma.

Los primeros resultados que nos ayudarán a estudiar la convergencia de una serie aparecen recogidos en la siguiente:

Proposición 5.14 ***(Propiedades generales de las series de números reales):***

a) ***(Condición necesaria de convergencia)*** *Si una serie $\sum a_n$ es convergente, entonces se verifica que $\lim a_n = 0$ (o, lo que es equivalente, si $\lim a_n \neq 0$, es imposible que la serie sea convergente). Sin embargo, esta condición solo es necesaria, es decir, si $\lim a_n = 0$ eso no asegura nada sobre la convergencia de la serie.*

b) ***(Condición general de convergencia de Cauchy)*** *Una serie $\sum a_n$ es convergente si y sólo si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall p > 0$.*

Ejemplo 5.2 *Estudio de la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$.*

Como el estudio de una serie numérica no es sino el cáculo de un determinado límite en particular, las operaciones que se pueden realizar con las series numéricas son análogas a las que se pueden realizar con los límites finitos:

Proposición 5.15 ***(Operaciones con series numéricas)***

a) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, entonces $\sum (a_n \pm b_n)$ es convergente y se tiene que $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$.

b) Si $\sum a_n$ es convergente y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\sum \lambda a_n$ es convergente y se tiene $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$.

c) Si $\sum a_n$ es convergente y $\sum b_n$ es divergente, entonces $\sum (a_n \pm b_n)$ es divergente.

d) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son divergentes, entonces no podemos afirmar nada sobre $\sum (a_n \pm b_n)$.

5.2.2 Series de términos positivos.

Entre todas las series de términos reales, las más simples y más fáciles de analizar son las de **términos no negativos** (es decir, series de la forma $\sum a_n$ tales que $a_n \geq 0$), puesto que, como veremos en la primera de sus propiedades, las correspondientes sucesiones de sumas parciales son monótonas crecientes, por lo que su convergencia va a ser consecuencia de su acotación. Además, estas series serán de gran utilidad en el análisis de series de términos cualesquiera, como veremos posteriormente. En concreto, pueden establecerse los siguientes resultados:

Proposición 5.16 *Toda serie de términos positivos siempre es convergente o divergente (no puede ser oscilante).*

Ejemplo 5.3 *La serie armónica es divergente.*

Veamos a continuación unos criterios para estudiar la convergencia de series de términos positivos, que nos permitirán, de una forma simple, conocer si una serie es convergente o divergente, independientemente de que podamos hallar su suma. Entre estos criterios es de destacar el **criterio de comparación**, puesto que será básico en la demostración del resto de los criterios:

Proposición 5.17 ***(Criterio de comparación o de Gauss)*** *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos tales que se verifica $a_n \leq b_n$ $\forall n$. Entonces:*
a) Si $\sum b_n$ es convergente, también lo es $\sum a_n$.
b) Si $\sum a_n$ es divergente, también lo es $\sum b_n$.

Un caso particular del criterio anterior, y que también realiza la comparación entre dos series, es:

Corolario 5.18 ***(Series asintóticamente proporcionales)*** *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos tales que $\lim \frac{a_n}{b_n} = l$. Entonces:*
a) Si $l \neq 0$ y $l \neq \infty$, ambas series tienen el mismo carácter.
b) Si $l = 0$ y $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.
c) Si $l = 0$ y $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.
d) Si $l = \infty$ y $\sum b_n$ es divergente, entonces $\sum a_n$ es divergente.
e) Si $l = \infty$ y $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum b_n$ es convergente.

Corolario 5.19 ***(Cocientes de polinomios)*** *Sea $\sum a_n$ una serie con $a_n = \frac{P_r(n)}{Q_s(n)}$, siendo $P_r(n)$ y $Q_s(n)$ polinomios de grados r y s respectivamente. Entonces $\sum \frac{P_r(n)}{Q_s(n)}$ es convergente si $s - r > 1$ y divergente si $s - r \leq 1$.*

Otros criterios que también podemos destacar para este tipo de series son:

Proposición 5.20 ***(Criterio de la raíz o de Cauchy)*** *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \sqrt[n]{a_n} = r$. Entonces la serie es convergente si $r < 1$ y divergente si $r > 1$; si $r = 1$, este criterio no aporta información.*

Proposición 5.21 ***(Criterio del cociente o de D'Alembert)*** *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Entonces la serie es convergente si $r < 1$ y divergente si $r > 1$; si $r = 1$, este criterio no aporta información.*

Proposición 5.22 ***(Criterio de Raabe)*** *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = r$. Entonces la serie es convergente si $r > 1$ y divergente si $r < 1$; si $r = 1$, este criterio no aporta información.*

5.2.3 Series de términos cualesquiera.

Finalizaremos este capítulo con el estudio de aquellas series que tienen infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Para estas series los problemas de convergencia ofrecerán mayores dificultades, y sólo para algunas series en concreto podremos conseguir resultados prácticos y generales.

Una primera forma de estudiar la convergencia de estas series es estudiar su **convergencia absoluta**:

Definición 5.11 *Una serie de términos cualesquiera $\sum a_n$ es* ***absolutamente convergente****, si la serie $\sum |a_n|$ (es decir, si la serie obtenida de la anterior al considerar todos sus términos positivos) es convergente.*

La convergencia absoluta nos ayuda a estudiar la convergencia de una serie ya que se verifica:

Proposición 5.23 *Si una serie es absolutamente convergente entonces dicha serie es convergente.*

No obstante, hemos de remarcar que la anterior condición sólo es necesaria y no suficiente para estudiar la convergencia de una serie de términos cualesquiera, es decir, hay series convergentes pero que en valor absoluto son divergentes. Precisamente, a las series que son convergentes pero no absolutamente convergentes se les llamará **series semiconvergentes**.

Otro caso que también puede analizarse fácilmente es el caso particular en que la serie sea alternada (es decir, los términos son alternativamente positivos y negativos; son series de la forma $\sum (-1)^{n+1} a_n$, con $a_n > 0\ \forall n$). A este tipo particular de series, además de poder estudiar su convergencia absoluta, podemos aplicarle el siguiente criterio:

Proposición 5.24 ***(Criterio de Leibnitz)*** *Si (a_n) es una sucesión monótona decreciente con límite cero, entonces la serie alternada $\sum (-1)^{n+1} a_n$ es convergente. Además, si S_n representa su suma n-ésima (es decir, la suma de sus n primeros términos), el error cometido al aproximar la suma S de la serie mediante S_n es menor que el primer término que se desprecia, es decir, se verifica*

$$0 \leq (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1}$$

La última forma que utilizaremos para estudiar la convergencia de series de términos cualesquiera $\sum a_n$ será considerar dos series de términos positivos $\sum x_n$ y $\sum y_n$, la primera formada por todos los términos positivos de $\sum a_n$ y la segunda por sus términos negativos cambiados de signo, ambas tomadas en el mismo orden en que aparecen en $\sum a_n$. Así, existirán tres posibilidades para el carácter de $\sum a_n$, como se muestra en el siguiente resultado:

Proposición 5.25 *En las anteriores condiciones, se verifican:*

(a) Si las dos series de términos positivos asociadas son convergentes, la serie $\sum a_n$ es convergente y se tiene

$$\sum a_n = \sum x_n - \sum y_n$$

(b) Si una de ellas es convergente y la otra es divergente, la serie $\sum a_n$ es divergente.

(c) Si ambas son divergentes, no podremos afirmar nada sobre el carácter de $\sum a_n$.