UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Departamento de Matemática Aplicada
y Estadística



# Capítulo 4

# Fórmula de Taylor en funciones de una variable real.

PROGRAMA:

**4.1 Introducción.**

**4.2 Fórmula de Taylor. Ejemplos.**

**4.3 Fórmula de McLaurin de algunas funciones elementales.**

**4.4 Aplicaciones de la fórmula de Taylor en una variable:**

4.4.1 Cálculo aproximado de expresiones numéricas.

4.4.2 Aplicación a la determinación de extremos relativos.

4.4.3 Desarrollos limitados:

Aplicación al cálculo de límites indeterminados.

## 4.1 Introducción.

Las funciones elementales más usuales ($\sin x$, $\cos x$, $\log x$, etc.) presentan grandes inconvenientes cuando se intenta calcular su valor en determinados puntos. No ocurre así con las funciones polinómicas, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, donde las operaciones a realizar son simplemente sumas y productos. Por tal motivo, tendrá especial interés obtener fórmulas que permitan aproximar éstas u otras funciones elementales por polinomios. Como es natural, cuando se realiza una aproximación es preciso obtener estimaciones del error cometido, de manera que se intentará conseguir acotaciones de los respectivos errores, para que cuando se realice una aproximación se tenga la seguridad de que el correspondiente error no supere una cierta cantidad.

Una primera aproximación al cálculo de los valores de una función en un punto se obtiene a partir del teorema de Lagrange: Si $f(x)$ es derivable en un entorno del punto $a$, $U(a)$, se tendrá $\forall x \in U(a)$,

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

con $c$ comprendido entre $x$ y $a$. Así, si el entorno de $a$ fuese lo suficientemente pequeño, podríamos aproximar $f'(c)$ por $f'(a)$, por lo que obtendríamos la aproximación

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$$



Paseo Alfonso XIII, 52 - 30203 Cartagena • Tel. 968 32 56 33 • Fax: 968 32 56 94

es decir, es posible aproximar, en un entorno de $a$, a la función $f(x)$ por un polinomio de primer grado.

Por tanto, el objetivo de la fórmula de Taylor será el de aproximar una función (ya sea de una o varias variables) por un polinomio (de una o varias variables) de un grado determinado, estableciendo además el error cometido mediante esta aproximación.

## 4.2 Fórmula de Taylor. Ejemplos.

**Definición 4.1** *Sea $f(x)$ una función que admite derivada hasta el orden $n$ en el punto $a$. Se llama **polinomio de Taylor de grado $n$ de $f$ en el punto $a$**, a la expresión dada por:*

$$P_{n,f,a}(x) \equiv f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

Este polinomio coincide con $f$ en el punto $a$, aunque no coincidirá en todo su dominio, de manera que la función

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x),$$

conocida como **resto** o **término complementario de orden $n$ de $f$ en $a$**, será, en general, no nula. Lo que será evidente es que cuanto mejor conozcamos $R_{n,a}(x)$, mejor se conocerá el grado de aproximación entre el polinomio de Taylor y la función $f$. El siguiente resultado nos da información sobre el comportamiento de tal aproximación:

**Proposición 4.1** *Si $f$ es derivable hasta el orden $n-1$ en un entorno de $a$ y existe $f^{(n)}(a)$, entonces $R_{n,a}(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $n$ en el punto $a$, es decir*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Conclusión inmediata de este resultado será que $R_{n,a}(x)$ se aproxima a cero (es decir, el polinomio se aproxima a la función) no sólo cuanto más cerca estemos del punto $a$, sino también cuanto mayor sea el grado del polinomio.

**Definición 4.2** *A la expresión*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x)$$

*se le llama **fórmula de Taylor de orden $n$ de $f$ en el punto $a$**. En el caso particular en que $a = 0$, a la fórmula de Taylor se le conoce como **fórmula de McLaurin***

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n,0}(x)$$

Con el objetivo de profundizar en el estudio de $R_{n,a}(x)$ veremos diferentes formas de expresar este resto de orden $n$ :

- **Forma infinitesimal**: Si denotamos

$$\alpha(x) = \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$$

tendremos que

$$R_{n,a}(x) = (x-a)^n \, \alpha(x), \quad \text{con } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

A esta forma de expresar el resto se le llama **forma infinitesimal**, y será utilizada posteriormente para el cálculo de límites.

- **Forma de Lagrange:** Si la función $f$ admite derivada hasta el orden $n+1$ en un entorno de $a$, $U(a)$, entonces $\forall x \in U(a)$ el resto puede expresarse en la forma

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo $c$ un valor comprendido entre $x$ y $a$.

A esta última forma de expresar el resto se le llama **forma de Lagrange** y a la expresión

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

se le llama **fórmula de Taylor con resto de Lagrange**, y es la que se suele utilizar la mayoría de las veces.

## 4.3 Fórmula de MacLaurin de algunas funciones elementales.

En esta sección vamos a establecer la expresión de McLaurin para algunas de las funciones más usuales. Para ello, nos basaremos en el cálculo de derivadas sucesivas:

- Para $f(x) = e^x$ se tiene:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

- Para $f(x) = \log(1+x)$ se tiene:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{(1+c)^{-n-1}}{n+1}x^{n+1}$$

- Para $f(x) = \sin x$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1,0}(x),$$

siendo

$$R_{2n+1,0}(x) = \frac{\sin\left(c + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

- $f(x) = \cos x$ :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1,0}(x),$$

siendo

$$R_{2n+1,0}(x) = \frac{\cos\left(c + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

- $f(x) = (1+x)^\alpha$ :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_{n,0}(x)$$

siendo

$$R_{n,0}(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+c)^{\alpha-(n+1)}\, x^{n+1}$$

- $f(x) = Shx$ :

$$Shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1,0}(x),$$

siendo

$$R_{2n+1,0}(x) = \frac{Ch\,(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

- $f(x) = Chx$ :

$$Chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1,0}(x),$$

siendo

$$R_{2n+1,0}(x) = \frac{Sh\,(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

**Ejercicio 4.1** *Calcular los primeros términos (hasta grado 7) de los desarrollos de McLaurin de las funciones* $\tan x$, $Thx$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\arg Shx$ *y* $\arg Thx$. *¿Porqué no es posible calcular el desarrollo de McLaurin para la función* $\arg Chx$?

## 4.4 Aplicaciones de la fórmula de Taylor en una variable.

### 4.4.1 Cálculo aproximado de expresiones numéricas.

Normalmente no siempre será posible sustituir en su dominio una función $f(x)$ por un polinomio $P(x)$. No obstante, esta sustitución sí que será posible cuando se trate de un intervalo cerrado en el que estén acotadas las sucesivas derivadas de $f(x)$. La longitud del intervalo dependerá de la función y, como veremos en ejemplos, una variación de dicha longitud llevará aparejada, en general, una variación del grado del polinomio.

**Ejemplo 4.1** *Cálculo aproximado del valor numérico de e.*

### 4.4.2 Aplicación a la determinación de extremos relativos.

En el capítulo anterior se recordaba la definición de extremo relativo y la condición necesaria que ha de ocurrir para que un punto $a$ sea candidato a ser extremo relativo (en concreto, ser punto crítico, es decir, $f'(a) = 0$). Puesto que esta condición no es suficiente, puede probarse como la fórmula de Taylor ayuda a establecer una caracterización de extremo relativo según que sea el orden de la primera derivada que no se anula en el punto $a$. En concreto, se prueba que para que exista un extremo relativo en un punto crítico $a$, la primera derivada que no se anule en $a$ ha de ser de orden par, mientras que todas las derivadas de orden impar anteriores han de ser nulas. Cuando ocurre al revés, es decir, cuando la primera derivada que no se anula es de orden impar, siendo las anteriores nulas, no hay extremo relativo, sino que aparece lo que denominamos **punto de inflexión**.

**Ejemplo 4.2** *Problema de aplicación de extremos relativos.*

### 4.4.3 Desarrollos limitados: Aplicación al cálculo de límites indeterminados.

Básicamente, vamos a llamar **desarrollo limitado** de una función $f(x)$ en un punto $a$, al desarrollo de Taylor de $f(x)$ en el punto $a$ con su resto expresado en la forma infinitesimal (aunque ahora, por comodidad en la notación, lo expresaremos en forma ligeramente distinta). Más en concreto:

**Definición 4.3** *Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ admite un* ***desarrollo limitado de orden $n$ en el punto*** *$a \in I$ si existe un polinomio de grado $n$ tal que para $x \in I$ se verifica*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

*siendo $o\left((x-a)^n\right)$ un infinitésimo en $x = a$ de orden superior a $(x-a)^n$, es decir, una función tal que*

$$\lim_{x\to a} o\left((x-a)^n\right) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to a} \frac{o\left((x-a)^n\right)}{(x-a)^n} = 0$$

Parece evidente que puede existir alguna relación entre los desarrollos limitados con la fórmula de Taylor. De hecho, se verifica:

**Proposición 4.2** *Si una función $f$ admite desarrollo de Taylor de orden $n$ en $a$, este desarrollo es un desarrollo limitado de orden $n$ en $a$, tomando como $o\left((x-a)^n\right)$ la función $R_{n,a}(x)$.*

Expresado en otras palabras, si una función $f$ es derivable $n+1$ veces en un entorno de $a$, su desarrollo limitado coincide con su fórmula de Taylor, aunque el resto, en lugar de expresarlo en la forma infinitesimal o de Lagrange, lo expresaremos en la forma $o\left((x-a)^n\right)$, pero sólo para indicar que es un infinitésimo de orden superior a $(x-a)^n$.

Antes de ver su aplicación al cálculo de límites indeterminados, veamos algunas de las operaciones que podemos realizar con este tipo de desarrollos. Por comodidad, todas estas operaciones serán enunciadas para desarrollos limitados en el punto $a = 0$ :

**Proposición 4.3** ***(Operaciones con desarrollos limitados)*** *Sean $f$ y $g$ dos funciones que admiten desarrollos limitados de orden $n$ en $x = 0$, con polinomios $p$ y $q$ respectivamente. Entonces:*

*a) La función $f \pm g$ admite en $x = 0$ un desarrollo limitado de orden $n$, siendo su polinomio $p \pm q$.*

*b) El producto $f(x) \cdot g(x)$ admite en $x = 0$ un desarrollo limitado de orden $n$, siendo su polinomio el obtenido al prescindir en el producto $p(x) \cdot q(x)$ de todos aquellos términos de grado mayor que $n$.*

*c) Si $g(0) \neq 0$, el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ admite en $x = 0$ un desarrollo limitado de orden $n$, siendo su polinomio el obtenido al dividir $p(x)$ entre $q(x)$, ordenados según potencias crecientes de $x$, hasta grado $n$.*

*d) Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, la función compuesta $g \circ f$, suponiendo que existe dicha composición, admite en $x = 0$ un desarrollo limitado de orden $n$, siendo el polinomio correspondiente el obtenido de suprimir en $q \circ p$ los términos de grado mayor que $n$.*

**Ejemplo 4.3** *Ejemplos de operaciones con desarrollos limitados.*

**Aplicación al cálculo de límites.**

Para la resolución de ciertas indeterminaciones, un método bastante eficaz consiste en localizar expresiones equivalentes a la dada (es decir, con igual límite que la original) mediante la obtención de desarrollos limitados de las funciones elementales que componen dicha expresión y de ese modo resolver la indeterminación.

**Ejemplo 4.4** *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - \tan(x^3)}{x^9}$$

**Ejemplo 4.5** *Otros ejemplos.*