UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Capítulo 3

Derivación de funciones de una variable real.

PROGRAMA:

3.1. Definición de derivada. Primeras propiedades.

3.2 Derivadas sucesivas.

3.3 Reglas de la derivación. Derivadas de las funciones elementales. Derivada de la función compuesta y de la función inversa.

3.4 Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

3.5 Teoremas del valor medio: Consecuencias. Regla de L'Hôpital.

3.1 Definición de derivada. Primeras propiedades.

Definición 3.1 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $a \in I$. Se dice que f es* ***derivable en el punto*** *a cuando existe y es finito el límite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si f es derivable en a, al valor de dicho límite se le llama ***derivada*** *de f en a, y se representa por $f'(a)$.*

Equivalentemente, f es derivable en a sí y sólo sí existe y es finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observación 1 *Definición de derivadas laterales y su relación con la existencia de $f'(a)$.*

Proposición 3.1 ***(Relación con la continuidad)*** *Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.*

Definición 3.2 *A la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene por pendiente el número $f'(a)$, es decir, a la recta de ecuación*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

se le llama ***recta tangente*** *a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.*

Paseo Alfonso XIII, 52 - 30203 Cartagena • Tel. 968 32 56 33 • Fax: 968 32 56 94

3.2 Derivadas sucesivas.

Si una función $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todos los puntos de I, se dice que f es **derivable** en I.

Así, si f es derivable en I puede definirse una nueva función, a la que representamos por f', dada por

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

y a la que llamaremos **función derivada de la función** f (o simplemente, **derivada** de f). A su vez es posible que esta nueva función f' sea derivable en un conjunto $J \subset I$, por lo que tendrá sentido considerar una nueva función, a la que representaremos por f'', y que viene definida por

$$\begin{aligned} f'' : J &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x) = (f'(x))' \end{aligned}$$

y a la que llamaremos **función derivada segunda** de f. Análogamente pueden definirse $f''', f^{IV}, \ldots$

3.3 Reglas de la derivación. Derivadas de las funciones elementales. Derivada de la función compuesta y de la función inversa.

Proposición 3.2 *(Reglas de la derivación) Se verifican:*

a) Si $f(x) = k$ (cte), entonces $f'(x) = 0$.

b) Si $f(x) = k \cdot g(x)$, siendo g una función derivable, entonces $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

c) Si $f(x) = u \pm v$, siendo u y v funciones de variable x derivables, entonces $f'(x) = u' \pm v'$.

d) Si $f(x) = u \cdot v$, siendo u y v funciones de variable x derivables, entonces $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$.

e) Si $f(x) = \frac{u}{v}$, siendo u y v funciones de variable x y derivables, con $v(x) \neq 0$, entonces $f'(x) = \frac{u' \cdot v - uv'}{v^2}$.

Proposición 3.3 *(Derivadas de las funciones elementales) Se verifican:*

a) Si $f(x) = x^\alpha$, entonces $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

b) Si $f(x) = \log_a x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$. En particular, si $f(x) = \log x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.

c) Si $f(x) = k^x$, entonces $f'(x) = k^x \log k$. En particular, si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

d) Si $f(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = \cos x$.

e) Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\sin x$.

f) Si $f(x) = \tan x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

g) Si $f(x) = \arcsin x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

h) Si $f(x) = \arccos x$, entonces $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

i) Si $f(x) = \arctan x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

j) Si $f(x) = Shx$, entonces $f'(x) = Chx$.

k) Si $f(x) = Chx$, entonces $f'(x) = Shx$.

l) Si $f(x) = Thx$, entonces $f'(x) = \frac{1}{Ch^2 x} = 1 - Th^2 x$.

m) Si $f(x) = ArgShx$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

n) Si $f(x) = ArgChx$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

ñ) Si $f(x) = ArgThx$, entonces $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Proposición 3.4 *(Derivada de la función compuesta) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in I$ y sea $g : J \to \mathbb{R}$ derivable en $f(a)$, con $f(I) \subset J$. Entonces la función compuesta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ esderivable en a y se verifica la relación siguiente (conocida como* ***regla de la cadena****)*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Ejemplo 3.1 *(Fórmula de la derivación logarítmica) Derivada de una función de la forma $y = f(x)^{g(x)}$.*

Proposición 3.5 *(Derivada de la función inversa) Sea $f : I \to J$ estríctamente monótona y continua en I. Si f es derivable en $a \in \overset{\circ}{I}$ y $f'(a) \neq 0$ entonces la función inversa $f^{-1} : J \to I$ es derivable en el punto $b = f(a)$ y se tiene*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

3.4 Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Definición 3.3 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que f es* ***creciente*** *en $a \in I$ si existe un entorno de a, $(a-\delta, a+\delta)$, tal que si $a', a'' \in (a-\delta, a+\delta)$ con $a' < a < a''$, entonces $f(a') \leq f(a) \leq f(a'')$.*

Igualmente, se dice que f es ***decreciente*** *en $a \in I$ si existe un entorno de a, $(a-\delta, a+\delta)$, tal que si $a', a'' \in (a-\delta, a+\delta)$ con $a' < a < a''$, entonces $f(a') \geq f(a) \geq f(a'')$.*

Si en ambas definiciones se cambia el signo $\leq$ (respect. $\geq$) por $<$ (respect. $>$) se dirá que f es ***estrictamente creciente*** *(respect.* ***estrictamente decreciente****) en a.*

La relación existente entre la derivada y el crecimiento de una función viene dada por las dos siguientes propiedades:

Proposición 3.6 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in I$. Se verifican:*

a) Si f es creciente en a, entonces $f'(a) \geq 0$.

b) Si f es decreciente en a, entonces $f'(a) \leq 0$.

Proposición 3.7 *Se verifican:*

a) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in I$ y $f'(a) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en a.

b) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in I$ y $f'(a) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en a.

Definición 3.4 *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un* ***máximo relativo*** *en $a \in \overset{\circ}{I}$ si existe un entorno de a, $(a-\delta, a+\delta)$, tal que $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.*

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un ***mínimo relativo*** *en $a \in \overset{\circ}{I}$ si existe un entorno de a, $(a-\delta, a+\delta)$, tal que $f(x) \geq f(a)$ $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.*

Proposición 3.8 *(Condición necesaria de extremo relativo) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in \overset{\circ}{I}$. Si f presenta en a un extremo relativo, entonces $f'(a) = 0$ (se dice que a es un* ***punto crítico*** *de f).*

Observación 2 *Como es bien sabido esta condición sólo es necesaria, no es suficiente (es decir, no basta con que $f'(a) = 0$ para que f tenga en a un extremo relativo). Sin embargo, si que nos ayuda en el cálculo de extremos relativos, puesto que nos informa que los posibles candidatos a ser extremos relativos han de estar entre los puntos críticos de la función. Para obtener una condición suficiente de extremo relativo es preciso acudir al cálculo de la derivada segunda, como se verá en el tema de la fórmula de Taylor.*

3.5 Teoremas del valor medio: Consecuencias. Regla de L'Hôpital.

Los resultados más importantes que tienen que ver con el hecho de que una función sea derivable en todo un intervalo son los siguientes 3 teoremas:

Teorema 3.9 ***(Th. de Rolle)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 3.10 ***(Th. del valor medio o de Cauchy)*** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), siendo $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema 3.11 ***(Th. de los incrementos finitos o de Lagrange)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$$

Entre las consecuencias más importantes que se pueden obtener de estos teoremas, destacamos:

Proposición 3.12 ***(Caracterización de las funciones constantes)*** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en I con $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$. Entonces $f(x) = k$ (constante) en I.*

Proposición 3.13 ***(Separación de raíces en una ecuación $f(x) = 0$)*** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable. Entonces:*
a) Entre cada dos raíces de $f(x) = 0$ existe al menos una raíz de $f'(x) = 0$.
b) Entre dos raíces consecutivas de $f'(x) = 0$ existe a lo sumo una raíz de $f(x) = 0$.

Del teorema de Cauchy se deduce un resultado muy útil en el cálculo de límites de funciones: las reglas de L'Hôpital.

Proposición 3.14 ***(Primera regla de L'Hôpital)*** *Sean f y g funciones definidas y derivables en un entorno reducido del punto a, $I = (a-\delta, a+\delta)^*$, y tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, con $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$. Entonces, si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, se verifica*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Proposición 3.15 ***(Segunda regla de L'Hôpital)*** *Sean f y g funciones definidas y derivables en un entorno reducido del punto a, $I = (a-\delta, a+\delta)^*$, y tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$. Entonces, si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, se verifica*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Observación 3 *Aplicación al resto de indeterminaciones.*