UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Capítulo 2

Límites y continuidad de funciones de una variable real.

PROGRAMA:

2.1 Límites en funciones de una variable.

2.1.1 Funciones reales de una variable real: Definiciones.

Anexo: Funciones hiperbólicas.

Definición 2.1 *Se llama **seno hiperbólico**, a la función* $Sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $Shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

*Se llama **coseno hiperbólico**, a la función* $Ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $Chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

*Se llama **tangente hiperbólica**, a la función* $Th : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $Thx = \dfrac{Shx}{Chx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Paseo Alfonso XIII, 52 - 30203 Cartagena • Tel. 968 32 56 33 • Fax: 968 32 56 94

Proposición 2.1 *Se verifican:*

a) $Sh0 = 0$ *y* Shx *es una función impar. Además,* $\lim_{x\to+\infty} Shx = +\infty$ *y* $\lim_{x\to-\infty} Shx = -\infty$.

b) $Ch0 = 1$, $Chx \geq 1$ $(\forall x)$, Chx *es una función par y* $\lim_{x\to+\infty} Chx = \lim_{x\to-\infty} Chx = +\infty$. *Así, en realidad,* $Ch : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$.

c) $Th0 = 0$, $-1 \leq Thx \leq 1$ $(\forall x)$, Thx *es una función impar y* $\lim_{x\to+\infty} Thx = 1$, $\lim_{x\to-\infty} Thx = -1$. *Así,* $Th : \mathbb{R} \to (-1, 1)$.

Proposición 2.2 *Se verifican:*

a) $Ch^2x - Sh^2x = 1$ *o* $1 - Th^2x = \dfrac{1}{Ch^2x}$.

b) $Sh(x+y) = ShxChy + ChxShy$; $Sh(x-y) = ShxChy - ChxShy$.

c) $Ch(x+y) = ChxChy + ShxShy$; $Ch(x-y) = ChxChy - ShxShy$.

d) $Th(x+y) = \dfrac{Thx + Thy}{1 + ThxThy}$; $Th(x-y) = \dfrac{Thx - Thy}{1 - ThxThy}$.

e) $Sh(2x) = 2ShxChx$; $Ch(2x) = Ch^2x - Sh^2x$; $Th(2x) = \dfrac{2Thx}{1 + Th^2x}$.

Observación 1 *A las funciones inversas de las hiperbólicas (que existen si se restringen adecuadamente los dominios y rangos de las primeras) se les denominan, respectivamente,* ***argumento del seno hiperbólico*** ($\arg Shx$)*,* ***argumento del coseno hiperbólico*** ($\arg Chx$) *y* ***argumento de la tangente hiperbólica*** ($\arg Thx$)*. Puede probarse que se verifican las relaciones*

$$\arg Shx = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arg Chx = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ \forall x \geq 1$$

$$\arg Thx = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ \forall x \in (-1, 1)$$

2.1.2 Límites de funciones reales de una variable real.

Definición y propiedades.

Intuitivamente, el que $f(x)$ tenga límite l cuando x tiende al punto a, significa que $f(x)$ se acerca tanto como se quiera a l siempre que x esté lo suficientemente próximo al punto a. De las siguientes gráficas, sólo (1), (3) y (6) tienden hacia l en a.

Hemos de notar que no es preciso que la función esté definida en a para que exista $\lim_{x\to a} f(x) = l$ (es decir, no tiene nada que ver $f(a)$ con $\lim_{x\to a} f(x)$; no obstante, cuando ambos valores coincidan, cosa que suele ser bastante habitual, se dice que la función $f(x)$ es continua en a, como veremos en secciones siguientes).

Esta definición puede formalizarse de la forma siguiente:

Definición 2.2 *Sea* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* a *un punto de acumulación de* X, $a \in X'$. *Se dice que* $f(x)$ ***converge*** *a* l *cuando* x *tiende hacia* a, *y se representa por* $\lim_{x\to a} f(x) = l$, *si se verifica que para todo valor de* x *próximo al punto* a *el valor que toma* $f(x)$ *en dicho punto se acerca al punto* l, *es decir si para cada entorno de* l, $B(l, \varepsilon)$, *existe un entorno reducido de* a, $B^*(a, \delta)$, *tal que la imagen de cada punto del mismo está en el entorno de* l.

Figura~2.1:

Expresada esta definición en términos del valor absoluto, se tiene que

$$\begin{gathered}\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ sí y sólo sí} \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0, \text{ tal que si } |x - a| < \delta \text{ (con } x \in X,\ x \neq a), \\ \text{entonces } |f(x) - l| < \varepsilon\end{gathered}$$

o lo que es lo mismo si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in (a - \delta, a + \delta)\,, \text{ con } x \neq a, \text{ entonces } f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Gráficamente esto significa que dentro de la franja horizontal del plano comprendida entre $l - \varepsilon$ y $l + \varepsilon$ están las imágenes de todos los puntos del entorno perforado $(a - \delta, a + \delta)^*$.

Entre las propiedades más importantes relacionadas con este concepto, destacamos:

Proposición 2.3 *Si existe el límite de una función en un punto, éste es único.*

Proposición 2.4 *Si una función tiene límite en un punto, está acotada en un entorno de dicho punto.*

Proposición 2.5 *Se verifican:*

a) Si $\lim_{x \to a} f(x) = l < \alpha$*, entonces existe un entorno de* a *donde la función toma valores menores que* α.

b) Si $\lim_{x \to a} f(x) = l > \beta$*, entonces existe un entorno de* a *donde la función toma valores mayores que* β.

c) Si $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$*, entonces existe un entorno de* a *donde la función tiene el mismo signo que su límite.*

Proposición 2.6 *Sean* $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones tales que verifican* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *en un entorno de* a*. Si* $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$*, entonces* $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Proposición 2.7 *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = m$*, donde* $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, entonces* $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$ *y* $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$*. Además, si* $m \neq 0$*, la función* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *está definida en un entorno de* a *y se tiene que* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

Proposición 2.8 *Sea* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x \to a} f(x) = l$*. Entonces:*

a) $\lim_{x \to a} K^{f(x)} = K^{\lim_{x \to a} f(x)} = K^l$*, cualquiera que sea* $K > 0$.

b) $\lim_{x \to a} \log (f(x)) = \log \left(\lim_{x \to a} f(x) \right) = \log l$.

c) Si $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es otra función con* $\lim_{x \to a} g(x) = m > 0$*, entonces* $\lim_{x \to a} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^{\lim_{x \to a} g(x)} = l^m$.

Límites laterales.

Ejemplo 2.1 *Funciones definidas por ramas. Asíntotas de funciones.*

Límites infinitos y límites en el infinito.

Definición 2.3 *Sea* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Se dice que* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \ \exists \delta > 0, \ \textit{tal que si } |x - a| < \delta, \ x \neq a, \ \textit{entonces } f(x) \geq A$$

De igual forma, se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \ \exists \delta > 0, \ \textit{tal que si } |x - a| < \delta, \ x \neq a, \ \textit{entonces } f(x) \leq -A$$

Proposición 2.9 *Se verifican:*

a) Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *con* $f(x) > 0$ *(respectivamente,* $f(x) < 0$*), entonces* $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

b) Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$*, entonces* $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Definición 2.4 *Sea* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$*. Se dice que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K > 0, \ \textit{tal que si } x \geq K \ \textit{entonces } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definición 2.5 *Sea* $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$*. Se dice que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K > 0, \ \textit{tal que si } x \leq -K \ \textit{entonces } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Infinitésimos e infinitos. Indeterminaciones.

Al igual que ocurría en el cálculo de límites de sucesiones, una forma fácil de calcular algunos límites de funciones es mediante el uso de equivalentes (infinitésimos o infinitos). La teoría, como veremos a continuación, es totalmente análoga a la establecida para el caso de sucesiones de números reales:

Definición 2.6 *Se llama* ***infinitésimo en el punto*** a *(pudiendo ser* $a = \pm\infty$*) a toda función* $f(x)$ *tal que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Definición 2.7 *Se llama* ***infinito en el punto*** a *(pudiendo ser* $a = \pm\infty$*) a toda función* $f(x)$ *tal que* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Entre las propiedades más importantes, destacamos:

Proposición 2.10 *El producto de un infinitésimo en un punto por una función acotada en un entorno de dicho punto, es otro infinitésimo.*

Ejemplo 2.2 *Calcular* $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

A la hora de operar con infinitésimos o infinitos, y al igual que ocurría en el caso de las sucesiones de números reales, existen determinadas operaciones que carecen de sentido:

Así, no tiene sentido considerar el caso del cociente de dos infinitésimos (se tiene la indeterminación $\frac{0}{0}$), ni el cociente de dos infinitos (indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$), ni el producto de un infinito por un infinitésimo (indeterminación $\infty \cdot 0$), ni la diferencia de dos infinitos del mismo signo (indeterminación $\infty - \infty$); además, como se verifica

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = e^{\lim_{x\to a} g(x)\log f(x)}$$

también serán indeterminaciones los casos $1^\infty, \infty^0$ y 0^0 (ya que todos ellos dan lugar, al aplicar la anterior expresión, a la indeterminación $\infty \cdot 0$).

Definición 2.8 *Dos infinitésimos o infinitos en el punto* a, $f(x)$ *y* $g(x)$, *se dice que son* ***equivalentes en el punto*** a, *si* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. *Se representarán por* $f(x) \sim g(x)$ *(si* $x \to a$*).*

Proposición 2.11 ***(Principio de sustitución)*** *Todo infinitésimo o infinito en un punto* a *que sea factor o divisor en un límite cuando* $x \to a$, *puede sustituirse por un equivalente en dicho punto sin que se altere el valor de dicho límite.*

Proposición 2.12 ***(Tabla de equivalencias más usuales)*** *Se verifican las siguientes equivalencias:*

$$\begin{array}{cc}
\sin x \sim x \ (si\ x\to 0) & 1-cos x \sim \frac{x^2}{2} \ (si\ x\to 0) \\
\tan x \sim x \ (si\ x\to 0) & arc\sin x \sim x \ (si\ x\to 0) \\
arc\tan x \sim x \ (si\ x\to 0) & a^x - 1 \sim x\log a \ (si\ x\to 0) \\
e^x - 1 \sim x \ (si\ x\to 0) & \log(1+x) \sim x \ (si\ x\to 0) \\
\log x \sim x-1 \ (si\ x\to 1) & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (si\ x\to 0) \\
a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0x^n \ (si\ x\to\infty) & \log(a_0x^n + \ldots + a_n) \sim \log x^n \ (si\ x\to\infty)
\end{array}$$

Observación 2 *Las anteriores equivalencias pueden generalizarse, ya que de forma análoga a como se demuestra, por ejemplo, que* $\sin x \sim x$ *(si* $x\to 0$*), puede probarse la equivalencia más general* $\sin f(x) \sim f(x)$ *si* $x \to a$, *siempre que* $f(x) \to 0$ *cuando* $x \to a$.

Observación 3 *A partir de las equivalencias anteriores y del principio de sustitución podemos establecer la siguiente igualdad que nos permitirá resolver la indeterminación* 1^∞ :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = e^{\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$$

2.2 Continuidad de funciones reales de una variable real.

2.2.1 Definición y primeras propiedades.

Como ya se ha establecido, la definición de límite de una función f en un punto a hace referencia al valor que toma la función en un entorno reducido del punto a, aunque para nada se necesita el valor de la función f en a. Cuando se verifique que el valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ coincida con el de $f(a)$ se dirá que f es continua en el punto a :

Definición 2.9 *Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **continua en el punto** a si existe $f(a)$ y existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y ambos resultados coinciden.*

La definición anterior, expresada en términos de valor absoluto, es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \text{ tal que si } |x - a| < \delta, \text{ con } x \in X, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definición 2.10 *Una función $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua en el conjunto** X, si es continua en todos los puntos de X.*

Observación 4 *Cuando una función f no es continua en un punto a se dice que f es **discontinua** en a. Las discontinuidades se clasifican en:*

*a) **Discontinuidad evitable:** Es la que se produce cuando existe $f(a)$ y existe $\lim_{x \to a} f(x)$ pero ambos resultados son distintos.*

*b) **Discontinuidad de salto (o de 1ª especie)**: Es la que se produce cuando existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y existe $\lim_{x \to a^-} f(x)$ pero ambos resultados son diferentes.*

*c) **Discontinuidad de 2ª especie:** Es la que se produce cuando no existe uno (o ambos) de los dos límites laterales.*

Proposición 2.13 ***(Operaciones con funciones continuas)** Sean $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in X$. Se verifican:*

a) $f \pm g$ es continua en a.

b) $f \cdot g$ es continua en a.

c) Si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Proposición 2.14 ***(Continuidad de la función compuesta)** Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $a \in X$ y $g : Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(X) \subset Y$, continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en el punto a.*

Proposición 2.15 ***(Continuidad de la función inversa)** Si $f : I \to J$, siendo I, J intervalos de $\mathbb{R}$, es una biyección estrictamente creciente o decreciente, entonces f es continua en I y su función inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua en J.*

2.2.2 Propiedades de las funciones continuas en un intervalo compacto.

Hasta este momento se han establecido las principales propiedades y operaciones que verifican las funciones continuas en un punto a. Entre las propiedades que verifican las funciones continuas en todo un intervalo $I = [a, b]$, son de destacar:

Teorema 2.16 *(Teorema de Weierstrass) Toda función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un compacto $I = [a,b]$ y continua en él, está acotada superior e inferiormente y existen dos puntos $x', x'' \in I$ tal que en ellos la función alcanza sus valores máximo y mínimo, es decir,*

$$f(x') = \max\{f(x); x \in [a,b]\} \ \ y \ f(x'') = \min\{f(x); x \in [a,b]\}$$

Teorema 2.17 *(Teorema de Bolzano) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo. Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema 2.18 *(Propiedad de los valores intermedios) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea k un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$.*

2.2.3 Continuidad uniforme.

Una clase especial dentro de las funciones continuas en un conjunto son las denominadas **uniformemente continuas**, que son aquellas para los cuales si dos puntos de su dominio están muy próximos, también lo están sus respectivas imágenes:

Definición 2.11 *Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua** en X si se verifica que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo par de puntos $x', x'' \in X$ que verifiquen que $|x' - x''| < \delta$, entonces $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Observación 5 *Se ha de destacar que la continuidad uniforme es una propiedad global (se verifica en todo un conjunto). El δ que aparece en la definición depende sólamente de ε y no de los puntos elegidos de X.*

Observación 6 *Evidentemente que si una función $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, también es continua. Sin embargo el recíproco no siempre es cierto. No obstante, si que se verifica el recíproco siempre que se exija alguna hipótesis adicional, como muestra el siguiente resultado:*

Teorema 2.19 *(Teorema de Heine) Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si X es compacto, entonces f es uniformemente continua.*