Asignatura**: Matemáticas I**
Profesor**: Roque Molina Legaz**

TEMA 6: ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Programa detallado:

En este tema estudiaremos espacios vectoriales reales a los que les añadiremos una nueva operación, el producto escalar, que a cada par de vectores le hace corresponder un número real. También estudiaremos otros conceptos que se derivan de la introducción de esta operación, así como introduciremos algunos tipos de aplicaciones que tienen un significado geométrico. Finalizaremos viendo un tipo particular de diagonalización: la diagonalización ortogonal.

6.1 Producto escalar.

Definition *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Llamamos* ***producto escalar*** *a toda aplicación*

$$<,>: VxV \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{u},\vec{v}) \mapsto <\vec{u},\vec{v}>$$

que verifica las siguientes propiedades:

$$<\vec{u}+\vec{w},\vec{v}> = <\vec{u},\vec{v}> + <\vec{w},\vec{v}>,\ \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V.$$

$$<\alpha\cdot\vec{u},\vec{v}> = \alpha <\vec{u},\vec{v}>,\ \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$<\vec{u},\vec{v}> = <\vec{v},\vec{u}>,\ \forall \vec{u},\vec{v} \in V.$$

$$<\vec{u},\vec{u}> \geq 0,\ \forall \vec{u} \in V.$$

$$<\vec{u},\vec{u}> = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \mathbf{0}.$$

En este caso, se dice que el par formado por $(V,<,>)$ es un ***espacio vectorial euclídeo****.*

Example *En $\mathbb{R}^n$, si consideramos la aplicación definida por*

$$<,>: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \mapsto <(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)> := x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

se verifica que $(\mathbb{R}^n,<,>)$ es un espacio euclídeo. Al producto escalar así definido se le llama ***producto escalar canónico*** *de $\mathbb{R}^n$.*

Example *El producto escalar usual entre vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ definido por*

$$< \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} >= |\vec{\boldsymbol{u}}||\vec{\boldsymbol{v}}|\cos(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$$

también verifica las anteriores condiciones.

Example *Sea $V = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ el conjunto (que es un espacio vectorial) de las funciones reales que son continuas en un intervalo de la forma $[a,b]$. Podemos entonces definir*

$$<,>: VxV \to \mathbb{R}$$

$$(f,g) \mapsto< (f,g) >:= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Puede comprobarse que esta definición cumple las anteriores propiedades de producto escalar.

Remark *Suele ser habitual, sobre todo en el caso de vectores en $\mathbb{R}^n$, representar al producto escalar mediante el símbolo $\bullet$; es decir*

$$< \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} >\equiv \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}$$

Matriz de Gram. Expresión matricial del producto escalar.

Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ una base de V. Si denotamos por a_{ij} al producto escalar de los vectores $\vec{u_i} \cdot \vec{u_j}$, es decir

$$a_{ij} = \vec{u_i} \cdot \vec{u_j}$$

definimos:

Definition *Se llama **matriz de Gram** respecto de la base B a la matriz dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remark *Notemos que como se verifica que $\vec{u_i} \cdot \vec{u_j} = \vec{u_j} \cdot \vec{u_i}$, la anterior matriz siempre es simétrica.*

Example *Sea $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcular su matriz de Gram para el producto escalar usual.*

Example *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (polinomios de grado menor o igual que 2) se considera la operación dada por*

$$< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

a) Probar que la operación anterior define un producto escalar.

b) Calcular su matriz de Gram asociada para la base usual $B = \{1, x, x^2\}$.

6.2 Normas y ángulos.

Sabemos que cuando estudiamos vectores por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, al hallar el módulo de un vector $\vec{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^3$ y relacionarlo con el producto escalar, se llega a

$$<\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}>\equiv\vec{\mathbf{x}}\bullet\vec{\mathbf{x}}=\left(\text{módulo del vector }\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)^2$$

Apoyándonos en esta relación (que se verifica para vectores geométricos) vamos a introducir una definición más general (y que coincidirá con la de módulo de un vector si la particularizamos a $\mathbb{R}^n$):

Definition *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se llama* ***norma del vector x*** *al número real dado por*

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$$

Se verifican las siguientes propiedades para la norma de un vector:

Proposition *Sean $\vec{x},\vec{y}\in V$. Entonces:*

a) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

b) $\|\alpha\cdot\vec{x}\| = \alpha\|\vec{x}\|,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

c) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2\right)$

d) $\left|<\vec{x},\vec{y}>\right| \le \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.

e) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$.

Definition *Se dice que un vector $\vec{x}\in V$ es* ***unitario*** *si $\|\vec{x}\| = 1$. De esta forma, si $\vec{x}\in V$ es un vector cualquiera no nulo, siempre es posible obtener un vector unitario en su misma dirección. Para ello basta con tomar $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$.*

Example *En $\mathbb{R}^n$ si se considera el producto escalar canónico, la norma de un vector $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ viene dada por*

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>} = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

Example *En $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, la norma de un vector $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ viene dada por*

$$\|f\| := \sqrt{<f,f>} = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2dx}$$

Definition *Sean $\vec{x},\vec{y}\in V$. Entonces se define la* ***distancia*** *de $\vec{x}$ a $\vec{y}$ como $\boldsymbol{d}\left(\vec{x},\vec{y}\right) := \|\vec{x}-\vec{y}\|$ o $\|\vec{y}-\vec{x}\|$. Se prueba que esta distancia así definida cumple con todas las propiedades de "distancia" (ver tema introductorio al Cálculo Infinitesimal en varias variables), por lo que todo espacio vectorial euclídeo es, en particular, un espacio métrico.*

Definition *Sean $\vec{x},\vec{y}\in V$ dos vectores no nulos. Se define el* ***ángulo*** *entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como*

$$\theta = \arccos\frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

Remark *De la anterior definición resulta que*

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$$

6.3 Vectores ortogonales y ortonormales. El método de Gram-Schmidt.

Definition *Dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in V$ de un espacio vectorial euclídeo son* ***ortogonales*** *si $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$. Suelen representarse por $\vec{x} \perp \vec{y}$.*

Remark *Si dos vectores no nulos son ortogonales, éstos forman un ángulo recto, ya que $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$ equivale a $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.*

Proposition *Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales, se verifica el siguiente resultado (conocido como* ***teorema de Pitágoras****):*

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Definition *Si $U = \{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_p}\}$ es un subespacio vectorial de V, se dice que U es un* ***sistema ortogonal*** *de V si los vectores que lo forman son ortogonales dos a dos.*

Definition *Si $B = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_r}\}$ es una base de V, diremos que B es una* ***base ortonormal*** *si es un sistema ortogonal y los vectores que la componen son unitarios.*

A continuación presentamos el método de Gram-Schmidt, que nos permitirá obtener una base ortonormal a partir de una base cualquiera de un espacio vectorial V :

El método de Gram-Schmidt.

Proposition ***(Método de Gram-Schmidt)*** *Sea $B = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ una base de un espacio vectorial euclídeo V. Definimos un nuevo conjunto de vectores de V de la forma siguiente:*

$$\begin{aligned}
\vec{u_1} &= \vec{e_1} \\
\vec{u_2} &= \vec{e_2} - \frac{< \vec{u_1}, \vec{e_2} >}{< \vec{u_1}, \vec{u_1} >}\vec{u_1} \\
\vec{u_3} &= \vec{e_3} - \frac{< \vec{u_1}, \vec{e_3} >}{< \vec{u_1}, \vec{u_1} >}\vec{u_1} - \frac{< \vec{u_2}, \vec{e_3} >}{< \vec{u_2}, \vec{u_2} >}\vec{u_2} \\
&\ldots \\
\vec{u_n} &= \vec{e_n} - \frac{< \vec{u_1}, \vec{e_n} >}{< \vec{u_1}, \vec{u_1} >}\vec{u_1} - \cdots - \frac{< \overrightarrow{u_{n-1}}, \vec{e_n} >}{< \overrightarrow{u_{n-1}}, \overrightarrow{u_{n-1}} >}\overrightarrow{u_{n-1}}
\end{aligned}$$

Entonces $U = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ es una base ortogonal, de manera que

$$\left\{ \frac{\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|}, \ldots, \frac{\vec{u_n}}{\|\vec{u_n}\|} \right\}$$

será una base ortonormal.

Example *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se pide:*

a) Determinar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $(1,2,1,0), (0,-1,1,0)$ y $(1,1,-2,1)$.

b) Obtener, mediante el método anterior, una base de vectores ortonormales *para el subespacio*

$$S =< (1,2,-1,0),(0,1,1,0),(1,0,-2,1) >$$

Example *Obtener, para el producto escalar canónico, una base ortonormal para los siguientes subespacios vectoriales:*

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$$
$$S_3 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y = 0,\ z+2t = 0\right\}$$

Exercise ***Varios***

6.4 Subespacios ortogonales. Proyección ortogonal.

Definition *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Entonces:*

- Si $\vec{\mathbf{v}} \in V$ *y S es un subespacio vectorial de V, se dice que* ***v*** *es* ***ortogonal*** *a S si* $< \vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} >= 0,\ \forall\vec{\mathbf{w}}\in S.$ *Se demuestra que para probar que un vector* ***v*** *es ortogonal a S si lo es a los vectores de una base de S.*

- Si S y T son subespacios de V, se dice que S y T son ***ortogonales*** *si* $< \vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} >= 0,\ \forall\vec{\mathbf{v}}\in S$ *y* $\forall\vec{\mathbf{w}}\in T.$ *Se demuestra que lo anterior ocurre sí y sólo si cualquier base de S es ortogonal a cualquier base de T.*

Definition *- Si S es un subespacio vectorial de V, se define el s**ubespacio ortogonal** de S como el conjunto*

$$S^{\perp} = \left\{\vec{\mathbf{v}} \in V \mid < \vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} >= 0,\ \forall\vec{\mathbf{w}}\in S\right\}$$

Proposition *Si S es un subespacio vectorial de V, entonces:*

a) $S \cap S^{\perp} = 0$

b) $(S^{\perp})^{\perp} = S.$

c) $V^{\perp} = 0$ *y* $0^{\perp} = V.$

d) Si V es finitamente generado, entonces $V = S \oplus S^{\perp}.$

Example *En* $\mathbb{R}^4$ *con el producto escalar usual, obtener el subespacio ortogonal suplementario de*

$$S = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t = 0,\ 2x+y-z+3t = 0\right\}$$

Del último de los resultados anteriores se deduce que si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, cualquier vector $\vec{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^n$ se puede expresar como $\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}$, con $\vec{\mathbf{v}}\in S$ y $\vec{\mathbf{w}}\in S^{\perp}$. Así, se define la **proyección ortogonal de** $\vec{\mathbf{v}}$ **en** S como el vector $\vec{\mathbf{v}}\in S$, es decir, $P_S(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{v}}$. Por tanto, $\vec{\mathbf{x}}-P_S(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{w}}\in S^{\perp}$.

Example *Hallar la proyección ortogonal del vector* $(1,2,1)$ *sobre el subespacio*

$$S = < (0,1,2),(1,2,3) >$$

Example *Idem para el vector* $(7,1,-6,9)$ *sobre el subespacio*

$$S = < (1,-2,0,0),(0,1,2,1),(-1,0,1,1) >$$

Definition *Si* $\vec{\mathbf{v}} \in V$ *y S es un subespacio vectorial de V, se define la* ***distancia*** *de* $\vec{\mathbf{v}}$ *a S como*

$$d\left(\vec{\mathbf{v}},S\right) = inf\left\{d\left(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\right) \mid \vec{\mathbf{w}}\in S\right\}$$

Remark *Se verifica que* $d\left(\vec{\mathbf{v}},S\right) = d\left(\vec{\mathbf{v}},P_S(\vec{\mathbf{x}})\right)$*, lo que quiere decir que el vector* $P_S(\vec{\mathbf{x}})$ *es el más próximo a* $\vec{\mathbf{v}}$ *de todos los vectores de S.*

Example *En* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual, obtener la proyección ortogonal del subespacio*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$$

y calcular a partir de esta proyección la distancia de S a los vectores $(1,1)$, $(1,-1)$ *y* $(2,0)$.

Example *En* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual, se considera el subespacio*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z = 0\}$$

a) Calcular su subespacio ortogonal.

b) Obtener la proyección ortogonal y la distancia de vector $(2,-1,0)$ *a S.*

c) Calcular la proyección ortogonal y la simetría de base el subespacio S.
(Antes de hacer este último apartado es preciso ver la sección de teoría siguiente).

6.5 Transformaciones ortogonales. Endomorfismos con significado geométrico.

Volvemos ahora a las aplicaciones lineales, y les vamos a incorporar el producto escalar. Así, queremos ocuparnos de las aplicaciones lineales que ”funcionan bien” en su relación con las longitudes y los ángulos, es decir, que son ”compatibles” con la estructura euclídea que se añade a los espacios vectoriales. Como veremos, esta compatibilidad radica en la conservación del producto escalar; es decir, el producto escalar de dos vectores es igual al producto escalar de sus imágenes.

Estas aplicaciones, que llamaremos ortogonales, no son muy novedosas. De hecho, en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, estas transformaciones son los movimientos en el plano o en el espacio ordinario; estos movimientos convierten cualquier figura en otra que es igual a aquella (tiene misma forma y mismo tamaño).

Definition *Una aplicación lineal* $f : V \to W$ *entre dos espacios vectoriales euclídeos es una* ***aplicación ortogonal*** *si conserva el producto escalar, es decir si cumple*

$$< f(\mathbf{u}),f(\mathbf{v}) >=< \mathbf{u},\mathbf{v} >, \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

Proposition *Una aplicación ortogonal f verifica:*

a) Conserva las normas, es decir $\|f(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|,\ \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$.

b) Conserva los ángulos, es decir $ang(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = ang(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.

c) f es inyectiva.

Definition *Llamaremos **transformación ortogonal** a toda aplicación ortogonal entre el mismo espacio vectorial euclídeo V; es decir, a toda $f : V \to V$ ortogonal.*

A continuación nos centraremos en el estudio de determinadas transformaciones ortogonales:

Definition *Se dice que una transformación ortogonal $f : V \to V$ es una **homotecia de razón** $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(\boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{v}$. Claramente, para toda base B de V se tiene que la matriz asociada a f en dicha base viene dada por $M_B(f) = \alpha\mathbb{I}$.*

Definition *Sean S y T dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^n$. Se define la **proyección de base** S **y dirección** T como el endomorfismo $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $P(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in S$ y $P(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{u} \in T$. Claramente, si B es una base de $\mathbb{R}^n$ resultante de unir una base de S con una base de T, entonces*

$$M_B(P) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{rx(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)xr} & \mathbb{O}_{(n-r)x(n-r)} \end{pmatrix}$$

*siendo r la dimensión de S. En el caso particular en el que $T = S^\perp$, a la aplicación anterior se le llama **proyección ortogonal** de base S.*

Definition *Sean S y T dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^n$. Se define la **simetría de base** S **y dirección** T como el endomorfismo $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $G(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in S$ y $G(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$, $\forall \boldsymbol{u} \in T$. Claramente, si B es una base de $\mathbb{R}^n$ resultante de unir una base de S con una base de T, entonces*

$$M_B(P) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{rx(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)xr} & -\mathbb{I}_{(n-r)x(n-r)} \end{pmatrix}$$

*siendo r la dimensión de S. En el caso particular en el que $T = S^\perp$, a la aplicación anterior se le llama **simetría ortogonal** de base S.*

Definition *Si $\theta \in [0, 2\pi]$, se dice que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una rotación de ángulo θ si existe una base B tal que*

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Example *Resolver el último apartado del ejemplo anterior.*

Example *Dado el subespacio de $\mathbb{R}^3$*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0,\ x + y = 0\right\}$$

calcular la simetría ortogonal de base S.

Example *En $\mathbb{R}^3$, calcular la homotecia de razón $\alpha = -2$ y su matriz con respecto a la base canónica.*

Example *En* $\mathbb{R}^2$ *calcular el giro de ángulo* $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

6.6 Diagonalización ortogonal.

Recordamos que se dice que una matriz cuadrada P es **ortogonal**, si $PP^T = P^TP = \mathbb{I}$, o lo que es lo mismo, si $P^{-1} = P^T$. Entonces:

Definition *Dos matrices cuadradas A y C son* ***ortogonalmente semejantes*** *si existe una matriz ortogonal P tal que* $C = P^{-1}AP = P^TAP$.

Definition *Una matriz cuadrada A se dice que es* ***diagonalizable ortogonalmente*** *si es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal, es decir, si existe P ortogonal tal que* $P^{-1}AP = P^TAP = Diagonal$.

Proposition *Se verifican:*

a) Si A es una matriz real cuadrada simétrica (y por tanto diagonalizable) y consideramos en $\mathbb{R}^n$ *el producto escalar canónico, entonces los subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.*

b) Si B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ *con el producto escalar canónico y P es la matriz cuyos vectores columna son los vectores de B, entonces P es ortogonal.*

c) Toda matriz real simétrica es diagonalizable ortogonalmente.

Example *Probar que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable ortogonalmente, y hallar su matriz de paso P ortogonal.