Asignatura**: Matemáticas I**
Profesor**: Roque Molina Legaz**

Remark *Este tema se ha elaborado con apuntes de los profesores del Dpto de Matemática Aplicada y Estadística, Antonio Guillamón Frutos y Silvestre Paredes Hernández.*

TEMA 7: INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

PROGRAMA DETALLADO:

7.1 Introducción y ejemplos.
7.2 Solución gráfica de problemas lineales.
7.2.1 Ejemplos.

Introducción y Ejemplos

Un caso particular de problemas de optimización son los problemas de optimización o programación lineal. Un problema de programación lineal tiene como objetivo la optimización (maximización o minimización) de una función lineal bajo restricciones de igualdad y/o desigualdad lineales en las incógnitas, donde tanto el número de variables como el número de restricciones es finito.

A pesar de este planteamiento tan restrictivo, ya que el modelo se limita a la utilización de cierto tipo de funciones que no son frecuentes en el mundo real, las técnicas de programación lineal son utilizadas en multitud de problemas al intentar optimizar algún aspecto del comportamiento de un sistema, como puede ser la asignación de recursos, la planificación de producción, problemas de dietas, el tiempo de evolución de un proceso, control de contaminación, etc.

La programación lineal ha demostrado desde hace tiempo su utilidad como modelo significativo de numerosos problemas de distribución y de fenómenos económicos.

La programación lineal es un caso especial de optimización matemática con restricciones en el que todas las funciones que aparecen en el problema son lineales en las incógnitas. A pesar de este planteamiento tan restrictivo, ya que el modelo se limita a la utilización de un tipo particular de funciones, que por otra parte no son muy frecuentes en los modelos reales, las técnicas de programación lineal son utilizadas en muchos problemas.

Se exponen a continuación algunos ejemplos clásicos de situaciones que tienen una formulación natural dentro del ámbito de la programación lineal.

Example (Problema de la dieta) *Con este problema tratamos de determinar la dieta más económica que satisfaga las necesidades nutritivas mínimas básicas para una buena salud. Dicho problema lo tendría, por ejemplo, el médico encargado de la dieta de un colegio o el dueño de una granja. Para plantear el problema supongamos que podemos adquirir n alimentos diferentes, siendo c_i el precio del i-ésimo alimento.*

Para componer una dieta necesitamos una serie de nutrientes básicos como proteínas, vitaminas, hierro, etc.; supongamos por tanto que hay m nutrientes básicos. Con el fin de conseguir la dieta equilibrada, cada individuo debe recibir al menos b_j unidades diarias del nutriente j-ésimo. Cada alimento i contendrá una determinada cantidad del nutriente j por unidad; sea a_{ji} la cantidad de nutriente j que tiene cada unidad del alimento i.

Si definimos la variable x_i como número de unidades del alimento i que forman parte de la dieta, el problema consistirá en seleccionar los valores de estas variables $\{x_i\}$ de forma que minimicen el coste total, pero satisfaciendo las necesidades nutritivas. El coste de los alimentos empleados estará representado mediante la función objetivo

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

mientras que las restricciones nutritivas vendrán dadas por el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}$$

además hay que tener en cuenta que las variables son no negativas:
$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n.$

Example (Problema del transporte) *Supongamos que una empresa elabora un determinado producto y dispone para ello de m sucursales en distintos puntos de m Una empresa debe enviar las cantidades $a_1, \dots, a_m$ de cierto producto desde m lugares y recibirse en cantidades $b_1, \dots, b_n$ en n destinos.*

Si c_{ij} es el coste de envío por unidad de producto desde el origen i hacia el destino j, deseamos determinar las cantidades x_{ij} a enviar desde el origen i al destino j para que se minimice el coste total del transporte, satisfaciendo las necesidades de demanda de cada destino.

Para formular el problema como un problema de programación lineal se dispone la siguiente matriz:

$$\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \dots & x_{1n} & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} & a_m \\ \hline b_1 & \dots & b_n & \end{array}$$

La i-ésima fila define las variables asociadas al origen i-ésimo, mientras que la columna j-ésima determina las variables asociadas al j-ésimo destino. El problema consiste en situar variables no negativas, x_{ij}, en la matriz, de modo que la suma de la i-ésima fila sea a_i, la suma de la j-ésima columna sea b_j y la suma:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

que representa el costo total del transporte sea mínima. Resulta por tanto el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \textstyle\sum_{ij} c_{ij}x_{ij} \\ &\text{Sujeto a} \\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n \\ &x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i,j \end{aligned}$$

Obviamente para que las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

sean consistentes, se debe dar la relación:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

es decir la cantidad recibida es igual a la cantidad enviada.

Example (Problema de almacenamiento) *Queremos dirigir un almacén comprando y vendiendo la existencia de cierta mercancía con el fin de maximizar el beneficio en un periodo de tiempo determinado. El almacén tiene una capacidad fija C y hay un coste r por cada unidad almacenada durante un periodo de tiempo. Sabemos que el precio de la mercancía varía en determinados periodos de tiempo (meses). En un periodo cualquiera se mantiene al mismo precio tanto de compra como de venta. Inicialmente el almacén está vacío y al final del periodo también tiene que estar vacío.*

Para la formulación de este problema introducimos variables para cada periodo de tiempo. Sea x_i el nivel de existencias en almacén al principio del periodo i. Sea u_i la cantidad comprada durante i y s_i la cantidad vendida en ese mismo periodo. Si queremos controlar la dirección del almacén durante n periodos de tiempo, tenemos que plantear el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i s_i - r x_i \\ &\text{Sujeto a} \\ &x_{i+1} = x_i + u_i - s_i \quad i = 1, \ldots, n \\ &0 = x_n + u_n - s_n \\ &x_i + z_i = C \\ &x_1 = 0 \\ &x_i, u_i, s_i, z_i \geq 0 \end{aligned}$$

Donde p_i es la ganancia de cada objeto vendido, es decir, el precio de venta menos el precio de compra.

Si por ejemplo $n = 3$ tenemos:

$-u_1 \quad +s_1$			0
	$-x_2 \quad -u_2 \quad +s_2$ $x_2 \qquad\qquad +z_2$	$+x_3$	0 C
		$-x_3 \quad -u_3 \quad +s_3$ $x_3 \qquad\qquad +z_3$	0 C

Se puede observar que la matriz de coeficientes puede separarse en bloques corres pondientes a las variables en los distintos periodos de tiempo. Los únicos bloques con valores distintos de 0 son los diagonales y los situados inmediatamente encima de la diagonal. Esta estructura es la usual en los problemas que implican tiempo.

Example (Problema de producción) *Sea una instalación que puede dedicarse a n actividades productivas diferentes, y supongamos que cada actividad produce diferentes cantidades de m productos. Cada actividad puede realizarse a cualquier nivel $x_i \geq 0$, pero a nivel unitario, la actividad i-ésima cuesta c_i y produce a_{ji} unidades del j-ésimo producto, podemos plantear el problema de minimizar costes como un problema de programación lineal.*

Si suponemos linealidad en la capacidad de producción, y se da un conjunto de m números, $b_1, \ldots, b_m$, que describen las necesidades de producción de los m bienes. Podemos pensar en producir estos a un costo mínimo, en este caso estamos planteando un problema de programación lineal similar al primer problema expuesto (problema de la dieta).

Ejemplos.

Example ***(Problema de la dieta)****. Con este problema tratamos de determinar la dieta más económica que satisfaga las necesidades nutritivas mínimas básicas para una buena salud. Dicho problema lo tendría, por ejemplo, el médico encargado de la dieta de un colegio o el dueño de una granja.*

Supongamos que podemos adquirir n alimentos diferentes, y que c_i es el precio del i-ésimo alimento. Para realizar una dieta necesitamos una serie de nutrientes básicos como proteínas, vitaminas, hierro, etc. Supongamos por tanto que hay m nutrientes básicos. Para conseguir la dieta equilibrada, cada individuo debe recibir al menos b_j unidades del nutriente j-ésimo cada día. Cada alimento i va a contener una determinada cantidad del nutriente j por unidad. Sea a_{ji} la cantidad de nutriente j que tiene cada unidad del alimento i.

Si hacemos x_i = número de unidades del alimento i en la dieta, el problema consiste en seleccionar los valores de $\{x_i\}$ de forma que minimicen el coste total:

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeto a las restricciones nutritivas:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}$$

junto con $x_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, n$.

• **Ejemplo del problema de la dieta**

El departamento de Nutrición del Hospital General Mountain View prepara 30 menús de cena, uno por cada día del mes. Una comida consiste en espagueti, pavo, patatas, espinacas y pastel de manzana. El director del departamento de Nutrición, determina que esta comida debe proporcionar 63000 mg de proteínas, 10 mg de hierro, 15 mg de niacina, 1 mg de tiamina y 50 mg de vitamina C. Cada 100 gramos de esta comida proporciona la cantidad de nutriente y grasas indicadas en la tabla.

	Proteínas	Hierro	Niacina	Tiamina	Vit. C	Grasas
Espagueti	5000	1.1	1.4	0.18	0	5000
Pavo	29300	1.8	5.4	0.06	0	5000
Patatas	5300	0.5	0.9	0.06	10	7900
Espinacas	3000	2.2	0.5	0.07	28	300
P. manzana	4000	1.2	0.6	0.15	3	14300

Para evitar demasiada cantidad de un tipo de comida, no debe incluirse en ella más de 300 g de espagueti, 300 g de pavo, 200 g de patatas, 100 g de espinacas y 100 g de pastel de manzana. Se desea determinar la composición de una comida que satisface los requerimientos nutricionales y proporciona la mínima cantidad de grasas.

FORMULACIÓN

1. Variables de decisión.

x_1 = número de 100 g de espaguetis a incluir.
x_2 = número de 100 g de pavo a incluir.
x_3 = número de 100 g de patatas a incluir.
x_4 = número de 100 g de espinacas a incluir.
x_5 = número de 100 g de pastel de manzana a incluir.

2. Función objetivo.

Minimizar $5000x_1 + 5000x_2 + 7900x_3 + 300x_4 + 14300x_5$ (grasas)

3. Restricciones.

$$
\begin{array}{lllllllllll}
5000x_1 & + & 29300x_2 & + & 5300x_3 & + & 3000x_4 & + & 4000x_5 & \geq & 63000 & \text{(proteínas)} \\
1.1x_1 & + & 1.8x_2 & + & 0.5x_3 & + & 2.2x_4 & + & 1.2x_5 & \geq & 10 & \text{(hierro)} \\
1.4x_1 & & 5.4x_2 & & 0.9x_3 & & 0.5x_4 & + & 0.6x_5 & \geq & 15 & \text{(niacina)} \\
0.18x_1 & & 0.06x_2 & & 0.06x_3 & & 0.07x_4 & + & 0.15x_5 & \geq & 1 & \text{(tiamina)} \\
 & & & & 10x_3 & & 28x_4 & + & 3x_5 & \geq & 50 & \text{(vit, C)}
\end{array}
$$

$$0 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_3 \leq 2,\ 0 \leq x_4 \leq 1,\ 0 \leq x_5 \leq 1.$$

Example ***(Problema del transporte)****. Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de ordenador tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan 1000, 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costes de transporte, en céntimos de euro/pieza, son los que aparecen en la tabla siguiente*

	Tienda A	*Tienda B*	*Tienda C*
Fábrica I	*3*	*7*	*1*
Fábrica II	*2*	*2*	*6*

¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

En este tipo de problemas se exige que toda la producción sea distribuida a los centros de ventas en las cantidades que precisa cada uno; por tanto, no pueden generarse inventario del producto ni en las fábricas ni en los centros de ventas. En consecuencia, los 800 artículos producidos en la Fábrica I deben distribuirse en las cantidades x, y, z *a A, B y C, de manera que*

$$x + y + z = 800$$

Pero, además, si desde la Fábrica I se envían x unidades a la Tienda A, el resto, hasta las 1000 necesarias en A, deben ser enviadas desde la Fábrica II; esto es, $1000 - x$ *unidades serán enviadas desde la Fábrica II a la Tienda A. Del mismo modo, si desde la Fábrica I a la Tienda B se envían y unidades, el resto necesario,* $700 - y$*, deben enviarse desde la Fábrica II. Y lo mismo para C, que recibirá z desde I y* $600 - z$ *desde II. En la siguiente tabla de distribución se resume lo dicho:*

Envios	*a la Tienda A* (1000)	*a la Tienda B* (700)	*a la Tienda C* (600)
Desde la Fábrica I (800)	x	y	$800 - x - y$
Desde la Fábrica II (1500)	$1000 - x$	$700 - y$	$x + y - 200$

La última columna la hemos obtenido de la siguiente forma: Como $x + y + z = 800$ *, se tiene que* $z = 800 - x - y$*, de donde,* $600 - z = 600 - (800 - x - y) = x + y - 200$*. Ahora bien, todas las cantidades anteriores deben ser mayores o iguales que cero. Por tanto, se obtienen las siguientes desigualdades:*

$$x \geq 0;\ 1000 - x \geq 0;\ y \geq 0;\ 700 - y \geq 0;\ 800 - x - y \geq 0;\ x + y - 200 \geq 0$$

Simplificando las desigualdades anteriores, se obtienen las siguientes inecuaciones:

$$1000 \geq x \geq 0;\ 700 \geq y \geq 0;\ 800 \geq x + y \geq 0$$

Recordemos que nuestro objetivo es abaratar al máximo los costes de transporte. Estos costes se hallan multiplicando las cantidades enviadas a desde cada fábrica a cada tienda por los respectivos costes de transporte unitario. Así, se obtiene:

$$Z = f(x,y) = 3x + 2(1000 - x) + 7y + 2(700 - y) + (800 - x - y) + 6(x + y - 200) =$$
$$= 6x + 10y + 3000$$

En definitiva, el programa lineal a resolver es :

$$\begin{aligned} Minimizar\ &:\ Z = 6x + 10y + 3000 \\ sujeto\ a\ &:\ 1000 \geq x \geq 0 \\ &\ 700 \geq y \geq 0 \\ &\ 800 \geq x + y \geq 0 \end{aligned}$$

La región factible se da en la imagen del margen. Sus vértices son A(200,0) ; B(800,0) ; C(100,700) ; D(0,700) y E(0,200).El coste, el valor de Z en cada uno de esos puntos, es:

$$Z(A) = 4200;\ Z(B) = 7800;\ Z(C) = 10600;\ Z(D) = 10000;\ Z(E) = 5000$$

Por tanto el mínimo se da en A , cuando $x = 200$ *e* $y = 0$*. Luego, las cantidades a distribuir son:*

Envios	a la Tienda A (1000)	a la Tienda B (700)	a la Tienda C (600)
Desde la Fábrica I (800)	200	0	600
Desde la Fábrica II (1500)	800	700	0

Example ***(Problema de almacenamiento)***. *Un barco tiene las siguientes capacidades de almacenamiento en sus bodegas de popa, centro y proa. Los dueños del barco pueden elegir una porción o toda la carga de los productos A, B y C, cuyas características se tabulan a continuación.*

BODEGA	CAPACIDAD (TM)	CAPACIDAD (M^3)
PROA (1)	3.000	130.000
CENTRO (2)	2.000	100.000
POPA (3)	1.500	30.000

PRODUCTOS	TM A TRANSPORTAR	M^3/TM	BENEFICIO (miles euros/TM)
A	3.500	60	8
B	2.500	50	7
C	2.000	25	6

Para plantear este problema, definimos las variables x_{ij} =toneladas del producto j ($j = A,B,C$) a cargar en la bodega i ($i = 1,2,3$). Así, el problema consiste en maximizar el beneficio del viaje, o lo que es lo mismo, maximizar la función objetivo, que viene dada por

$$Z = 8(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 7(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) + 6(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C})$$

sujeto a las siguientes restricciones: (Vemos primero las de capacidad en TM de cada bodega; despues la capacidad en $M^{\cdot 3}$ de cada bodega; y por último el límite de capacidad de cada producto)

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 3.000$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 2.000$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 1.500$$
$$60x_{1A} + 50x_{1B} + 25x_{1C} \leq 130.000$$
$$60x_{2A} + 50x_{2B} + 25x_{2C} \leq 100.000$$
$$60x_{3A} + 50x_{3B} + 25x_{3C} \leq 30.000$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 3.500$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 2.500$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \leq 2.000$$

y por supuesto, también ha de ser

$$x_{ij} \geq 0 \ (j = A,B,C) \ (i = 1,2,3)$$

Example ***(Problema de producción / asignación de recursos)****. Supongamos que una fábrica de cervezas produce tres tipos distintos: negra (N), rubia (R) y sin alcohol (S). Para su obtención son necesarios, además de agua y lúpulo, para los cuales no hay limite, malta y levadura, que limitan la capacidad diaria de producción. La siguiente tabla nos da la cantidad necesaria de cada sustancia para producir un litro de cada una de las respectivas cervezas, los kilos disponibles de cada recurso y el beneficio por litro de cada cerveza producida. El problema del fabricante consiste en decidir cuánto debe de fabricar de cada cerveza para que el beneficio diario total sea el máximo.*

	N	*R*	*S*	*Disponibilidad*
Malta	*2*	*1*	*2*	*30*
Levadura	*1*	*2*	*2*	*45*
Beneficio	*4*	*7*	*3*	

Siguiendo el esquema inicial, tomamos como variables de decisión:

$$x_1 = \text{producción en litros de N por día}$$
$$x_2 = \text{producción en litros de R por día}$$
$$x_3 = \text{producción en litros de S por día}$$

Un plan para producir, x_1 litros de N, x_2 litros de R y x_3 de S se denomina plan o programa de producción que representamos por el vector (x_1,x_2,x_3).

Está claro que no es posible utilizar más recursos de los disponibles, de forma que si observamos la tabla de los datos, vemos que:

$$x_1 \text{ litros de N necesitan } 2 \cdot x_1 \text{ kilos de malta}$$
$$x_2 \text{ litros de R necesitan } 1 \cdot x_2 \text{ kilos de malta}$$
$$x_3 \text{ litros de S necesitan } 2 \cdot x_3 \text{ kilos de malta}$$

y que la disponibilidad diaria de malta es de 30 kilos. Por tanto, las tres variables de decisión deben satisfacer la desigualdad:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30$$

que representan

$$(\text{recursos utilizados}) \leq (\text{recursos disponibles})$$

Esta imposición sobre las variables x_j es una de las restricciones al problema. Análogamente, si observamos la siguiente fila de la tabla de recursos, y teniendo en cuenta la disponibilidad diaria de levadura, tendremos la restricción

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45$$

Habría que añadir también las condiciones de no negatividad de las variables de decisión, es decir:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3)$$

pues no tiene sentido un plan de fabricación con cantidades negativas para las variables x_j.

Finalmente el último apartado sería la construcción de la función objetivo. En este caso pretendemos que el beneficio total sea máximo, por tanto la función objetivo será el beneficio diario que obtenemos por los x_1 *litros diarios de N, los* x_2 *litros de R y los* x_3 *litros de S, es decir, será la función:*

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

que hay que maximizar. En resumen podemos formular el problema de asignación de recursos o de planificación de producción, como el de determinar los valores para x_1, x_2, x_3 *que resuelven el problema*

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeto a} & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Solución Gráfica de Problemas Lineales

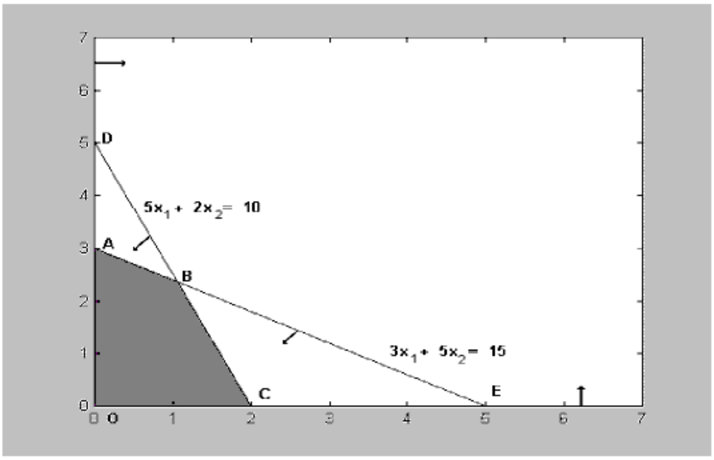
En problemas de programación lineal de 2 o 3 variables podemos utilizar un procedimiento gráfico para resolverlos. Aunque en realidad rara vez surgen problemas de este tipo, esta técnica es muy útil para ayudar visualmente a comprender muchos conceptos y términos utilizados posteriormente.

Las fases del proceso de solución gráfico son:

1. Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas, donde las variables de decisión estén representadas por los ejes.
2. Dibujar en el sistema coordenado las restricciones del problema, incluyendo las de no negatividad. Notar que una restricción de desigualdad define una región limitada por una línea recta (2D) o un plano (3D) al considerar esa restricción como una igualdad. La intersección de todas las regiones se denomina *región factible o espacio de soluciones*, que es un conjunto convexo. Si esta región no es vacía seguimos en el punto siguiente, en caso contrario, no existe ninguna solución que satisfaga simultáneamente todas las restricciones y el problema es *infactible*.
3. Determinar los puntos extremos (aquellos que son intersección de dos o más restricciones) del espacio de soluciones. Evaluar la función objetivo en esos puntos, y aquel o aquellos que maximicen (o minimicen) el objetivo, corresponden a las soluciones óptimas del problema. Ilustraremos este método mediante un ejemplo:

Example *Tengamos el problema siguiente:*

$$\text{Maximizar} \quad z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{Sujeto a}$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Solución gráfica de un problema lineal

Los extremos son $\{A = (0,3); B = (20/19, 45/19); C = (2,0), O = (0,0)\}$ *con valores para la función objetivo* $\{3, 85/19, 4, 0\}$ *respectivamente. Por tanto el valor óptimo se encuentra en* $(20/19, 45/19)$. *(figura anterior).*

Un método gráfico alternativo se tiene a partir de las *líneas de isobeneficio* (en caso de maximización) o de *isocoste* (en el de minimización). Cada isolínea contiene el conjunto de puntos en los que la función objetivo toma el mismo valor. Notar el hecho de que al ser todas las restricciones lineales, la región factible es un conjunto convexo y al ser la función objetivo lineal, una solución óptima estará en uno de los puntos extremos de la región factible.

Cuando dos puntos extremos del conjunto están unidos y son soluciones óptimas del problema, entonces el problema posee *soluciones óptimas alternativas*, y podemos afirmar que todos los puntos que existen en el segmento que une a los dos puntos extremos óptimos son solución del problema. En este caso el problema posee un número infinito de soluciones óptimas.

Cuando la región factible del problema es vacía, entonces no hay ningún vector **x** que satisfaga todas las restricciones simultáneamente y el problema se denomina *infactible*.

Si alguna de las restricciones no influye en la determinación de la región factible se dice que es una restricción *redundante*.

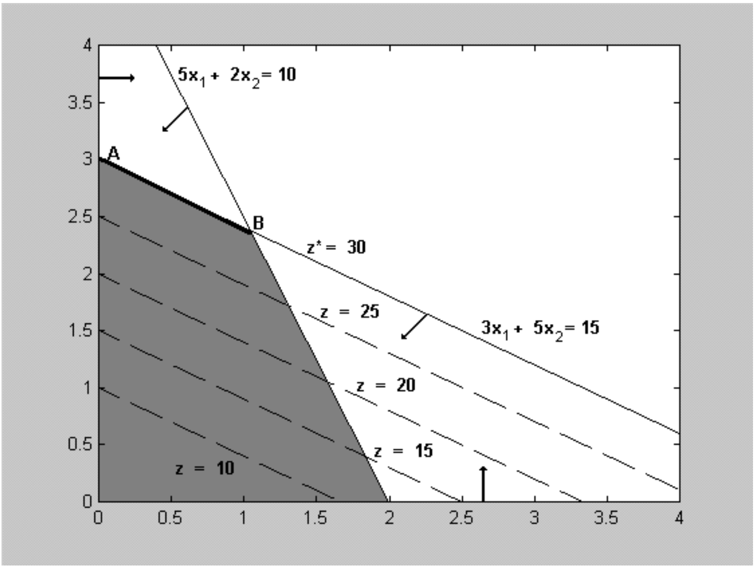
El problema es un *modelo no acotado* o con *solución no acotada* cuando la solución óptima del problema es ∞, es decir para cualquier punto de la región factible, siempre se puede encontrar otro punto factible que nos dé un menor (mayor en el caso de maximización) valor para la función objetivo (*valor infinito*), o también cuando siendo el valor óptimo de la función objetivo finito, es solución un punto cuyas componentes tienden a infinito (*solución infinita*). En estos casos se debería revisar el planteamiento inicial del problema, porque no se puede esperar, por ejemplo, que con recursos limitados obtengamos beneficios ilimitados.

Ejemplos

Damos a continuación varios ejemplos en 2 dimensiones (para una mejor visualización) de los posibles tipos de soluciones que podemos encontrar al resolver un problema de programación lineal.

Example (Soluciones alternativas)

$$\begin{aligned}
&\textit{Maximizar} \quad z = 6x_1 + 10x_2 \\
&\textit{Sujeto a} \\
&\qquad 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
&\qquad 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

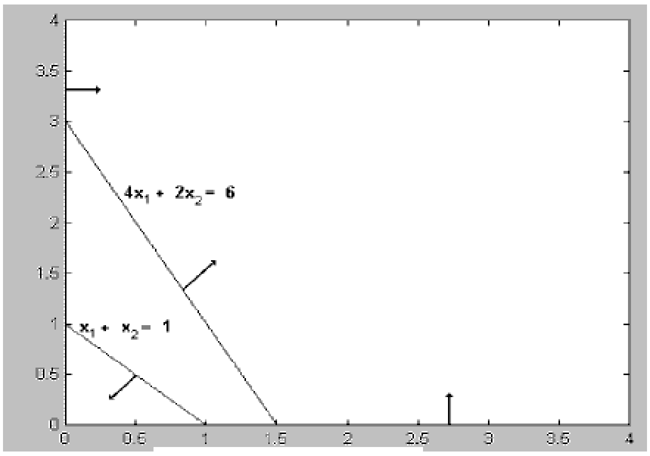


Problema lineal con soluciones alternativas

Observamos en la figura que cualquier punto sobre el segmento A – B es una solución óptima del problema.

Example (Problema infactible)

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimizar} \quad z = x_1 + x_2 \\
&\textit{Sujeto a} \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 1 \\
&\qquad 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



Problema lineal infactible

No hay intersección ⇒ La región factible es vacía (figura anterior). En este caso convienene examinar nuevamente el problema variando ligeramente las restricciones iniciales.

Example (Restricciones redundantes)

$$\text{Maximizar} \quad z = 2x_1 + x_2$$

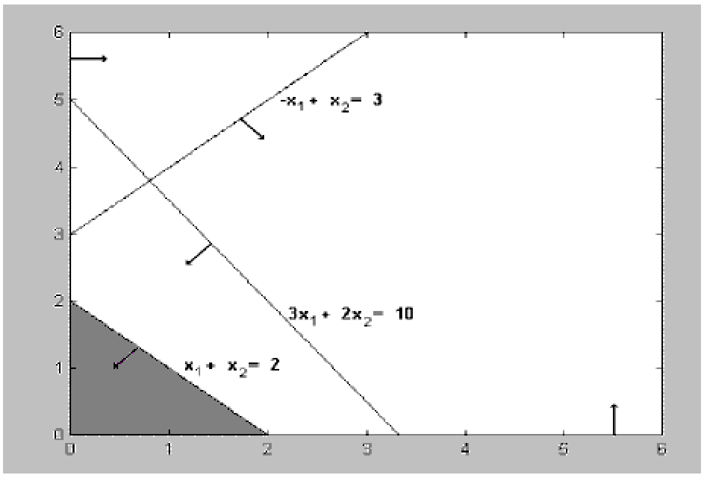
$$\text{Sujeto a}$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Problema lineal con restricciones redundantes

Como se puede apreciar en la figura anterior, las dos últimas restricciones son redundantes, y podemos prescindir de ellas.

Example (Problema no acotado. Valor infinito)

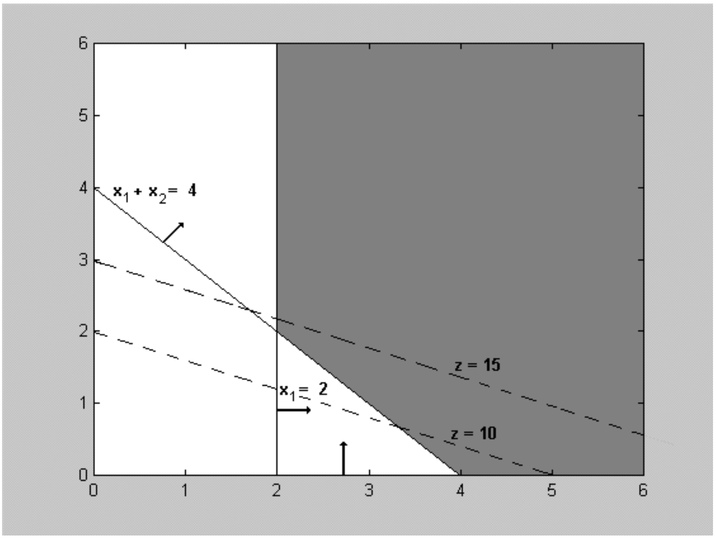
$$Maximizar \quad z = 2x_1 + 5x_2$$

$$Sujeto\ a$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Problema lineal no acotado (valor infinito)

Está claro a partir de la figura anterior que al maximizar $z = 2x_1 + 5x_2$*, la solución sería* (∞, ∞)*, y por tanto el problema es no acotado. El valor de z se puede hacer tan grande como queramos.*

Example (Problema no acotado. Solución infinita)

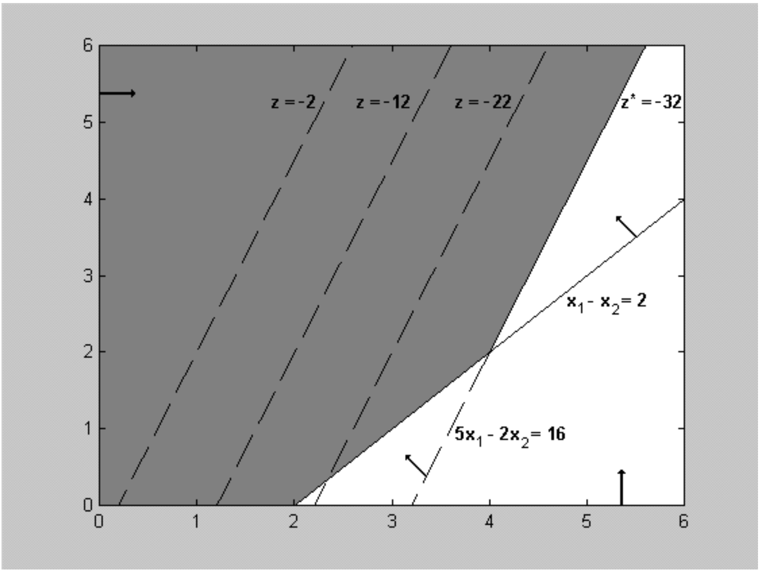
$$Minimizar \quad z = -10x_1 + 4x_2$$

$$Sujeto\ a$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Problema lineal no acotado (solución infinita)

El mínimo se alcanza para $z = -32$*, que es finito; pero, como se aprecia en la figura anterior a lo largo de toda la semirecta con origen* $(4,2)$*, hay infinitos puntos, y también puntos solución cuyas coordenadas tienden a* ∞*.*