Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 5: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

PROGRAMA DETALLADO:

5.1 Valores y vectores propios. Polinomio característico.

Dado un endomorfismo $f : V \to V$, siendo V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, y llamando A a su matriz asociada en una cierta base de V, vamos a estudiar en este tema si existe un cambio de base tal que la nueva matriz asociada a f en esta nueva base, A' (que sabemos es semejante a A; es decir, sabemos que existe una matriz invertible P tal que $A' = P^{-1}AP$) sea lo más sencilla posible. En concreto, veremos cuando es posible conseguir que A' sea diagonal.

En este estudio que pretendemos realizar en este tema, veremos que juegan un papel fundamental aquellos vectores $\mathbf{v} \in V$ no nulos tales que $f(\mathbf{v})$ es proporcional a $\vec{\mathbf{v}}$, es decir $f(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, o en forma matricial $A \cdot \vec{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{v}}$:

Definition *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se dice que λ es un **valor propio** (o **autovalor**) de A si existe un vector $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot \vec{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{v}}$, es decir tal que*

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

*En tal caso, se dice que $\vec{\mathbf{v}}$ es el **vector propio** (o **autovector**) asociado al valor propio λ. Al conjunto de todos los vectores propios asociados a un mismo valor propio λ, que se demuestra que forman un subespacio vectorial de V, se le llama **subespacio vectorial propio asociado al valor propio** λ, y lo representaremos por*

$$V_\lambda = \left\{ \vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_v \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_v \end{pmatrix} \right\}$$

Proposition *Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valores propios distintos de $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces:*

a) V_λ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

b) $V_\lambda \cap V_\mu = \emptyset$.

c) Si $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_r}\} \subseteq V_\lambda$ y $\{\overrightarrow{w_1}, \ldots, \overrightarrow{w_s}\} \subseteq V_\mu$ son conjuntos de vectores libres entonces $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$ es un sistema libre.

¿Cómo calcular los valores propios? El siguiente resultado nos indica lo que tenemos que hacer:

Proposition *Los valores propios son las soluciones de la ecuación (llamada **ecuación característica**)*

$$|A - \lambda \mathbb{I}_n| = 0$$

Remark *Al polinomio $p(x) = |A - x\mathbb{I}_n|$ se le llama **polinomio característico**. De la anterior proposición se deduce que los valores propios de una matriz cuadrada no son sino las raíces de su polinomio característico.*

Definition *Se define la **multiplicidad de un valor propio** de una matriz cuadrada como la multiplicidad de éste como raíz de su polinomio característico.*

Example *Hallar los valores propios y los subespacios vectoriales propios asociados del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:*

$$f(x, y, z) = (3x, x + 2y, 4x + 2z)$$

Example *Idem para las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2 Definición y caracterización de matrices diagonalizables.

Definition *Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existe una matriz P invertible, $P \in GL_n(\mathbb{R})$, tal que $P^{-1}AP = D$, siendo D una matriz diagonal.*

El siguiente resultado nos caracteriza cuando una matriz es diagonalizable:

Proposition *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sus valores propios con multiplicidades respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_r$ (evidentemente, $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$). Entonces A es diagonalizable sí y sólo si su polinomio característico $p(x)$ solo tiene raíces reales y la multiplicidad de cada valor propio λ_i coincide con la dimensión del subespacio propio asociado V_{λ_i}.*

Remark *En base al resultado anterior se demuestra:*

a) Si una matriz cuadrada de orden n tiene n valores propios distintos, ésta es diagonalizable.

b) Toda matriz simétrica es diagonalizable.

Example *Estudiar si son diagonalizables las matrices del ejemplo anterior.*

Example *Analizar si es diagonalizable el endomorfismo de* $\mathbb{R}^4$ *dado por:*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2, x_3 + x_4, -x_3 - x_4)$$

Remark *Observamos que el término diagonalizable se lo aplicamos indistintamente a una matriz o a un endomorfismo (en este último caso, nos referimos a su matriz asociada). Lo mismo ocurre con los términos valores y vectores propios, multiplicidades, etc.*

El resultado anterior nos dice cuando una matriz es diagonalizable. Pero en caso que lo sea... ¿seremos capaces de hallar la matriz P tal que $P^{-1}AP = D$? En tal caso, ¿cual es la matriz diagonal D que se obtiene? Efectivamente ésto es posible, como nos indica el siguiente resultado:

Proposition *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *una matriz diagonalizable, y sean* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *sus valores propios con multiplicidades respectivas* $m_1, m_2, \ldots, m_r$. *Entonces A es semejante a una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios, contados cada uno tantas veces como multiplicidad tienen. Además la matriz P asociada a dicha matriz (y a la que se denomina* ***matriz de paso****) es la matriz cuyos* m_1 *primeros vectores columnas son los elementos de una base de* V_{λ_1}*, los* m_2 *siguientes vectores columnas son los elementos de una base de* V_{λ_2}*, etc.*

Example *Estudiar si el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *dado por*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 10z, 2x + y + 10z, -x - y - 6z)$$

es diagonalizable. En caso afirmativo, obtener la matriz de paso P y la matriz diagonal D.

5.3 Dos aplicaciones de la diagonalización.

Cálculo de potencias de matrices diagonalizables.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable, e imaginemos que pretendemos calcular A^k, siendo k un número natural. Veamos como la diagonalización de matrices nos da una forma fácil de obtener dicha potencia:

Como A es diagonalizable, existirá P regular tal que $P^{-1}AP = D.$ Por tanto se tendrá que $A = PDP^{-1}$. Así,

$$A^k = A \cdot A \cdots^{(k)} A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots^{(k)} (PDP^{-1}) = P \cdot D \cdots^{(k)} D \cdot P^{-1} = PD^kP^{-1}$$

lo cual nos da un método para el cálculo de la potencia $k - sima$ de una matriz, que puede ser más sencillo que multiplicar A por sí mismo k veces, ya que la potencia $k - sima$ de una matriz diagonal es otra matriz diagonal cuyo elemento (i, i) es la potencia $k - sima$ de la matriz original.

Example

El teorema de Cayle-Hamilton. Aplicación al cálculo de la inversa de una matriz.

El teorema de Cayle-Hamilton, cuyo enunciado daremos a continuación, nos permitirá, entre otras cosas, resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, cosa que veremos en un posterior tema. Aquí veremos otra aplicación (cálculo de la inversa de una matriz mediante el cálculo de potencias de la misma):

Theorem ***Teorema (Cayle-Hamilton)****: Si $p(x)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(A) = 0$.*

Este resultado nos permite calcular la inversa de una matriz cuadrada regular:

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ y $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es su polinomio característico, como $p(A) = 0$ tendremos

$$0 = A^{-1} \cdot p(A) = A^{-1}(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 \mathbb{I}_n) =$$
$$= A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 \mathbb{I}_n + a_0 A^{-1}$$

de donde, despejando A^{-1} resultará

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 \mathbb{I}_n)$$

Example *Aplicando el teorema anterior, calcular la inversa de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota final.

Cuando estudiemos el concepto de ortogonalidad, veremos que un endomorfismo simétrico (o matriz simétrica) se puede diagonalizar ”ortogonalmente”.