Asignatura**: Matemáticas I**
Profesor**: Roque Molina Legaz**

TEMA 4: APLICACIONES LINEALES

PROGRAMA DETALLADO:

4.1 Aplicaciones lineales. Primeras propiedades y ejemplos.

En este tema estudiaremos las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales que son aplicaciones que respetan la estructura de espacio vectorial. El resultado más importante nos dice que cada aplicación lineal viene determinada por las imágenes de los elementos de una base, lo que permite asociar a una aplicación lineal, una base del dominio y otra del codominio, una matriz que representa dicha aplicación respecto de dichas bases. Además introduciremos las matrices de cambio de base, que permiten a partir de las coordenadas de un vector respecto de una base, obtener sus coordenadas respecto de otra base.

Definition *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $f : V \to W$ se dice que es una **aplicación lineal** (también se llama **homomorfismo**) si verifica las siguientes propiedades:*

a) $f\left(\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}\right) = f(\vec{\boldsymbol{u}}) + f(\vec{\boldsymbol{v}}),\ \forall \vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}} \in V.$

b) $f(\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}}) = \alpha \cdot f(\vec{\boldsymbol{u}}),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall\ \vec{\boldsymbol{u}} \in V.$

Remark *a) Las dos condiciones anteriores equivalen a que se verifique*

$$f\left(\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{\beta}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right) = \alpha \cdot f(\vec{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\beta}\cdot f(\vec{\boldsymbol{v}}),\ \forall \vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}} \in V,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$$

*b) Caso que $V = W$, a la aplicación lineal $f : V \to V$ se le llama **endomorfismo**.*

Example *La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (2x - y + 3z, x + y - z)$ es un homomorfismo.*

Example *Sea $V = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es continua en } [0,1]\right\} \equiv \mathcal{C}([0,1])$. La aplicación $f : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(\varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x)dx$$

es lineal.

Remark *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, se verifican:*

a) $f(\vec{\boldsymbol{0}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$

b) Si $S \leq V$*, entonces* $f(S) \leq W$.

c) Si $g : W \to Z$ *es otra aplicación lineal, entonces* $g \circ f : V \to Z$ *es una aplicación lineal.*

d) Si $\tilde{S} \leq W$*, entonces* $f^{-1}(\tilde{S}) \leq V$.

e) Si f *es biyectiva, entonces* $f^{-1} : W \to V$ *es una aplicación lineal biyectiva.*

Veamos que las aplicaciones lineales quedan totalmente determinadas por las imágenes de los elementos de una base de su conjunto inicial:

Proposition *Sean* V, W *espacios vectoriales,* $B = \{\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n\}$ *una base de* V *y* $\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{w}}_n$ *elementos de* W*. Entonces existe una única aplicación lineal* $f : V \to W$ *tal que* $f(\vec{\boldsymbol{u}}_i) = \vec{\boldsymbol{w}}_i$, $1 \leq i \leq n$.

4.2 Tipos de aplicaciones lineales. Subespacios asociados a una aplicación lineal.

Definition *Sea* $f : V \to W$ *una aplicación lineal. Entonces diremos que* f *es* ***Monomorfismo*** *si* f *es inyectiva;* ***Epimorfismo*** *si* f *es suprayectiva;* ***Isomorfismo*** *si* f *es biyectiva;* ***Automorfismo*** *si* f *es un endomorfismo biyectivo.*

Asociados a una aplicación lineal f hay dos subespacios vectoriales que merecen destacarse:

Definition *Sea* $f : V \to W$ *una aplicación lineal. Definimos el* ***Núcleo*** *de* f*, como el conjunto, que representaremos por* $\mathbf{Ker}f$*, dado por*

$$\mathbf{Ker}f = \left\{\vec{\boldsymbol{u}} \in V \mid f(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{0}}\right\}$$

Notemos que $\mathbf{Ker}f = f^{-1}(\vec{\boldsymbol{0}})$ *y éste es un subespacio vectorial de* V.

Definition ***Imagen*** *de* f*, como el conjunto, que representaremos por* $\mathbf{Im}f$*,*

$$\mathbf{Im}f = \left\{f(\vec{\boldsymbol{u}}) \mid \forall \vec{\boldsymbol{u}} \in V\right\}$$

Así $\mathbf{Im}f = f(V)$ *y es un subespacio vectorial de* W*. A la dimensión del subespacio vectorial* $\mathbf{Im}f$ *se le llama* ***rango*** *de* f.

Una forma fácil de calcular **Im**f nos la da el siguiente resultado:

Proposition *Sea* $f : V \to W$ *una aplicación lineal y* $B = \{\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n\}$ *una base de* V*. Entonces* $f(B) = \left\{f(\vec{\boldsymbol{u}}_1), f(\vec{\boldsymbol{u}}_2), \ldots, f(\vec{\boldsymbol{u}}_n)\right\}$ *es un sistema generador de* $\mathbf{Im}f$.

Estos subespacios sirven para caracterizar el tipo de aplicación que es f :

Proposition *Sea* $f : V \to W$ *una aplicación lineal. Entonces:*

a) f *es inyectiva* $\Leftrightarrow \mathbf{Ker}f = \vec{\boldsymbol{0}}$.

b) f *es suprayectiva* $\Leftrightarrow \mathbf{Im}f = W$.

Remark *Se prueba que si V, W son finitamente generados y $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces*

$$\dim V = \dim \boldsymbol{Ker} f + \dim \boldsymbol{Im} f$$

Example *Varios.*

4.3 Matrices y aplicaciones lineales.

Matriz asociada a una aplicación lineal.

Para manejarnos correctamente con las aplicaciones lineales, vamos a recurrir a las coordenadas. Así, si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, si $B = \{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_m\}$ es una base de V, y si $B' = \{\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\}$ es una base de W, lo que se pretende es obtener las coordenadas de $\vec{\mathbf{w}} = f(\vec{\mathbf{u}})$ en función de las coordenadas de $\vec{\mathbf{u}}$. Veremos que ésto se puede expresar en forma matricial, obteniendo una matriz cuyas columnas no son sino las coordenadas de $f(\vec{\mathbf{u}}_i)$ en función de la base B' de W. Y además esto se hará de forma inequívoca, es decir, dada una aplicación lineal siempre tendrá asociada una matriz, y dada una matriz, ésta siempre tendrá asociada una única aplicación lineal.

- Sean $f : V \to W$ una aplicación lineal, $B = \{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_m\}$ es una base de V, y $B' = \{\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\}$ una base de W. Dado $\vec{\mathbf{u}} \in V$, sabemos que existen escalares α_j tales que

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \vec{\mathbf{u}}_j,$$

y como f es una aplicación lineal, se tendrá

$$f(\vec{\mathbf{u}}) = f\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j . \vec{\mathbf{u}}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f(\vec{\mathbf{u}}_j)$$

Por otro lado, como $f(\vec{\mathbf{u}}_j) \in W$, este vector podrá ponerse en función de los vectores de la base de W. Por tanto existirán coordenadas λ_{ij} tales que

$$f(\vec{\mathbf{u}}_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

Uniendo todas las igualdades tendremos

$$f(\vec{\mathbf{u}}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f(\vec{\mathbf{u}}_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \alpha_j\right) \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

Pero al ser $f(\vec{\mathbf{u}}) \in W$, resultará que

$$f(\vec{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \vec{\mathbf{w}}_i$$

Consecuencia de la unicidad de las coordenadas de un vector en una base, y de la igualdades anteriores, se tiene, para cada $1 \leq i \leq n$, que

$$\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \alpha_j$$

Si introducimos la matriz

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nxm}(\mathbb{K}),$$

cuyas columnas corresponden a las coordenadas en la base B' de las imágenes por f de los vectores de la base B, la relación anterior puede ponerse de la forma

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = M_{BB'}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

A la matriz $M_{BB'}(f)$ se le llama **matriz de f en las bases B y B'** y permite obtener las coordenadas en la base B' de la imagen por f de cualquier vector a partir de sus coordenadas en la base B.

Remark *Si f es un endomorfismo ($V = W$) y consideramos la misma base B en el conjunto inicial y en el final, a $M_{BB}(f)$ se le representará por $M_B(f)$.*

Example *Varios*

Operaciones con aplicaciones lineales y matrices.

Proposition *Sean V, W y Z espacios vectoriales. Entonces:*

a) Si $f, g : V \to W$ son aplicaciones lineales, $\alpha \in \mathbb{K}$ y B_1, B_2 son bases de V y W respectivamente, entonces

$$M_{B_1B_2}(f+g) = M_{B_1B_2}(f) + M_{B_1B_2}(g) \qquad y \qquad M_{B_1B_2}(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot M_{B_1B_2}(f)$$

b) Si $f : V \to W$ y $g : W \to Z$ son aplicaciones lineales y B_1, B_2, B_3 son bases de V, W y Z respectivamente, entonces

$$M_{B_1B_3}(g \circ f) = M_{B_2B_3}(g) M_{B_1B_2}(f)$$

c) Supongamos que $\dim V = m$, $\dim W = n$ y B_1, B_2 bases de V y W respectivamente. Sea $f : V \to W$ lineal y denotemos por $A = M_{B_1B_2}(f)$. Entonces $rango(A) = rango(f)$ y además:

- f es inyectiva $\Leftrightarrow$ $rango(A) = m$
- f es suprayectiva $\Leftrightarrow$ $rango(A) = n$
- f es biyectiva $\Leftrightarrow$ $rango(A) = m = n$

d) Si B_1, B_2 son bases de V y W respectivamente y $f : V \to W$ es un isomorfismo, entonces

$$M_{B_1B_2}(f^{-1}) = (M_{B_1B_2}(f))^{-1}$$

Matriz del cambio de base.

Matriz del cambio de base en un mismo espacio vectorial.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y B una base cualquiera de V. Es evidente que la matriz de la aplicación identidad Id_V (la aplicación identidad es aquella que viene definida por $Id_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v},\ \forall \mathbf{v} \in V$) respecto de la base B es la matriz identidad, es decir, $M_{BB}(Id_V) = \mathbb{I}_n$. Sin embargo esto no ocurre cuando se consideran en V bases distintas, es decir, supongamos que B' es otra base de V. A las matrices $M_{BB'}(Id_V)$ y $M_{B'B}(Id_V)$ reciben el nombre de **matrices de cambio de base**. Veamos con un ejemplo como calcular estas matrices:

Example *Dadas las bases de* $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ *y* $B' = \{(1,0),(2,1)\}$, *hallar* $M_{BB'}(Id_{\mathbb{R}^2})$ *y* $M_{B'B}(Id_{\mathbb{R}^2})$. *¿Qué relación existen entre ellas?*

Remark *Como hemos visto en el anterior ejemplo, las matrices de cambio de base son invertibles y se verifica*

$$(M_{BB'}(Id_V))^{-1} = M_{B'B}(Id_V)$$

Matriz del cambio de bases en una aplicación lineal.

Para hallar la matriz A asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$ hemos tomado bases en V y en W, y respecto de ellas (calculando las imágenes de los elementos de la base de V en función de los elementos de la base de W) se determina A. Pero si las bases iniciales en V y W se cambian por otras, la matriz asociada A' será distinta de la anterior. Veamos cual es la relación entre ambas matrices A y A', y como se puede esquematizar fácilmente su cálculo:

Proposition *Sean V y W dos espacios vectoriales y consideremos bases distintas B_1, B_1' en V y B_2, B_2' en W. Entonces dada la aplicación lineal $f : V \to W$ se verifica*

$$M_{B_1',B_2'}(f) = M_{B_2,B_2'}(Id_W)M_{B_1,B_2}(f)M_{B_1,B_1'}(Id_V)$$

Remark *Simbólicamente la anterior igualdad puede representarse por*

Remark *La anterior igualdad suele expresarse en la forma*

$$A' = Q^{-1}AP$$

Cuando se verifica una expresión de este tipo, se dice que A y A' son ***equivalentes****.*

Example *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que respecto de las bases canónicas tiene por matriz asociada*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz asociada a f cuando se consideran las nuevas bases en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ dadas por $B = \{(1,3,0),(1,0,2),(0,4,-2)\}$ y $B' = \{(2,1),(4,3)\}$.

Caso particular: Matriz de un endomorfismo.

Suele ser habitual considerar el caso $f : V \to V$ endomorfismo y una misma base B para el conjunto inicial y final. Veamos como funciona en este caso el cambio de base de una base B en el conjunto inicial y final a una nueva base B' también en el inicial y final. En este caso particular la igualdad anterior se transforma en

$$M_{B'}(f) = M_{B,B'}(Id_V)M_{B,B}(f)M_{B',B}(Id_V)$$

que usando la anterior notación puede ponerse como

$$A' = P^{-1}AP$$

En este caso se dice que A y A' son **semejantes**.

Example *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tiene asociada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz A' asociada a f en la nueva base $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.