Asignatura**: Matemáticas I**
Profesor**: Roque Molina Legaz**

TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

PROGRAMA DETALLADO:

3.1. Definición de espacio vectorial. Propiedades y ejemplos.
3.2. Definición de subespacio vectorial. Ejemplos.
3.3. Conjunto generador y vectores linealmente independientes. Ejemplos.
3.4. Bases y dimensión de un espacio vectorial. Ejemplos.
3.5. Cambio de base en un espacio vectorial.
3.6. Relaciones entre subespacios, dimensiones, bases, suma y suma directa.

3.1 Definición de espacios vectorial. Propiedades y ejemplos.

La estructura de espacio vectorial juega un papel fundamental en el álgebra lineal pues es la base de todos los conceptos que ahí se desarrollan.

Cuando manejamos vectores del plano $\mathbb{R}^2$ o del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ podemos deducir una serie de propiedades, a partir de las cuales, en un ejercicio de abstracción, introducimos el concepto de espacio vectorial como aquel ente que verifica dichas propiedades, que serán tomadas como axiomas y que se recogen en la siguiente definición:

Definition *Sea V un conjunto y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Supongamos que tenemos definidas dos operaciones en V, una Ley de Composición Interna (denominada **suma,** y que representaremos por $+$), que asigna a cada par de elementos $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$ un elemento $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$, y otra externa $K \times V \to V$ (denominada **producto por escalares**, y que representaremos por $\cdot$), que asigna a cada elemento $\boldsymbol{u} \in V$ y a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ un elemento $\alpha \cdot \boldsymbol{u} \in V$ (se podrá omitir el punto en adelante). Se dice que la terna $(V,+,\cdot)$ es un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial** o un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{K}$ (en adelante se dirá simplemente que V es un espacio vectorial) si se satisfacen las siguientes propiedades:*

a) $(V,+,\cdot)$ *es un grupo abeliano.* ***¿Qué significa eso?***

b) $\alpha \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \cdot \boldsymbol{v},\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V.$

c) $(\alpha+\beta)\cdot \boldsymbol{u} = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \beta \cdot \boldsymbol{u},\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K},\ \forall \boldsymbol{u} \in V.$

d) $(\alpha \cdot \beta)\cdot \boldsymbol{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{u}),\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K},\ \forall \boldsymbol{u} \in V.$

e) $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u},\ \forall \boldsymbol{u} \in V.$

Remark *Cuando V es un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial,** a sus elementos los llamamos **vectores**, mientras que a los elementos de $\mathbb{K}$ les llamamos **escalares**. Por eso a partir de ahora intentaremos representar a los elementos de V por $\vec{\boldsymbol{u}} \in V$ (es decir, en negrita y con la típica flecha de vector; aunque, como veremos, no siempre sean vectores tal y como los entendemos de la Física). A los escalares los representaremos* *normalmente por letras griegas, y lo normal será que el cuerpo $\mathbb{K}$ siempre coincida con los números reales $\mathbb{R}$. Por ello normalmente siempre diremos que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial o simplemente que V es un espacio vectorial.*

Example *$V = \mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.* ***¿Con que operaciones?***

Example *$V = \mathbb{R}_n[x]$, conjunto de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que n, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.* ***¿Con que operaciones?***

Example *Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces este conjunto es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones siguientes:*

a) Si $f, g \in V$, se define $f + g$ como la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) Si $f \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha \cdot f$ como la aplicación e $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$. ***Comprobarlo****.*

Se verifican las siguientes propiedades:

Proposition *Sea V un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial.** Entonces:*

a) $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{0}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

b) $0 \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}, \forall \vec{\boldsymbol{u}} \in V$.

c) Si $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$, entonces $\alpha=0$ ó $\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{0}}$.

d) Si $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}}=\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{v}}$.

e) Si $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}}=\beta \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{u}}\neq\vec{\boldsymbol{0}}$, entonces $\alpha=\beta$.

f) $\alpha \cdot \left(-\vec{\boldsymbol{u}}\right)=(-\alpha) \cdot \vec{\boldsymbol{u}}= -\left(\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}}\right), \forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall \vec{\boldsymbol{u}} \in V$.

3.2 Definición de subespacio vectorial. Ejemplos.

Definition *Sea V un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial** y S un subconjunto de V no vacío. Entonces se dice que S es un **subespacio vectorial** de V, si S, con las operaciones definidas en V, también es otro espacio vectorial. Se representará por $S \leq V$.*

Desde un punto de vista práctico es más fácil usar la siguiente caracterización para saber si S es un subespacio vectorial:

Proposition *Sea V un $\mathbb{K}$-**espacio vectorial.** Entonces son equivalentes:*

Proposition *S es subespacio vectorial de V $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in S$ se verifica que $\alpha \cdot \vec{\boldsymbol{u}}+\beta \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \in S$*

Example *Varios*

3.3 Conjunto generador y vectores linealmente independientes. Ejemplos.

Definition *Si* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ *son vectores del espacio vectorial V, llamaremos* ***combinación lineal*** *a cualquier expresión de la forma*

$$\alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{u_n}$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Definition *Diremos que los vectores* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ *del espacio vectorial V* ***generan*** *V si todo elemento de V puede expresarse como combinación lineal de* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ *. En este caso, se dice que el espacio vectorial V es* ***finitamente generado****.*

Example *Los vectores de* $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}=(1,0)$ *y* $\vec{v} = (0,1)$ *generan* $\mathbb{R}^2$*. También lo hacen los vectores* $(1,2)$ *y* $(3,1)$*.*

Example *Los vectores* $\{1, x, x^2\}$ *generan el espacio vectorial* $\mathbb{R}_2[x]$*.*

Definition *El conjunto de todas las combinaciones lineales formadas por los vectores* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ *dan lugar a un subespacio vectorial S (que no tiene porqué ser todo V), y al que llamaremos* ***subespacio generado por los vectores*** $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$*. Se representará por* $S = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n} \rangle$*.*

Example *Hallar el subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *generado por los vectores* $\vec{u_1} = (2,-1,4)$ *y* $\vec{u_2} = (4,1,6)$*.*

Example *Recíprocamente, dado el subespacio de* $\mathbb{R}^3$*,* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y - 3z = 0\}$*, hallar vectores que lo generen. ¿Qué relación hay entre los 4 vectores de estos dos últimos ejemplos?*

Definition *Diremos que el conjunto de vectores* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ *son* ***linealmente independientes*** *si dada la combinación lineal*

$$\alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{u_n} = \vec{0}$$

se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$*. En caso contrario se dice que los vectores son* ***linealmente dependientes****.*

Example *Determinar si los siguientes vectores de* $\mathbb{R}^3$ *son linealmente independientes:* $\vec{u_1} = (1,-2,3)$, $\vec{u_2} = (2,-2,0)$, $\vec{u_3} = (0,1,7)$*.*

Example *Idem para los siguientes polinomios de* $\mathbb{R}_2[x]$: $\vec{u_1} = x - 2x^2$, $\vec{u_2} = x^2 - 4x$, $\vec{u_3} = 8x^2 - 7x$*.*

Remark *a) En* $\mathbb{R}^n$*, si* $m > n$*, cualquier conjunto formado por m vectores siempre es linealmente depediente.*

b) Todo conjunto de n vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$ *generan todo* $\mathbb{R}^n$*.*

c) Ver la relación entre vectores independientes en $\mathbb{R}^n$ *y el cálculo de determinantes.*

3.4 Bases y dimensión de un espacio vectorial. Ejemplos.

Definition *Un conjunto de vectores* $\left\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n\right\}$ *forman una* ***base*** *del espacio vectorial V, si son linealmente independientes y generan todo V.*

Example $\{(1,0),(0,1)\}$ *forman una base de* $\mathbb{R}^2$ *(base canónica).*

Example *Todo conjunto de n vectores linealmente independientes de* $\mathbb{R}^n$ *son base de* $\mathbb{R}^n$.

Example $\{1, x, x^2\}$ *forman una base de* $\mathbb{R}_2[x]$.

Example *Hallar una base para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y - 3z = 0\};$$
$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0,\ 2x - y + 3z = 0\right\}$$

Proposition *Se verifican:*

a) Si $B = \left\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n\right\}$ *es una base de V, entonces todo vector* $\vec{\mathbf{v}}$ *de V se expresa de forma única como combinación lineal de los elementos de B, es decir, existen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *escalares únicos tales que* $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \vec{\mathbf{u}_1} + \alpha_2 \cdot \vec{\mathbf{u}_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{\mathbf{u}_n}$. *A estos ecalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *se les llaman* ***coordenadas del vector*** $\vec{\mathbf{v}}$ ***en la base*** *B.*

b) Todas las bases de un mismo espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores. A este número de vectores se le llama dimensión del espacio vectorial V.

c) Si $\dim V = n$, *y* $\left\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_m\right\}$ *son vectores linealmente independientes de V, entonces* $m \leq n$.

d) Si V es un espacio vectorial y S es un subespacio suyo, entonces $\dim S \leq \dim V$.

e) n vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de dimensión n siempre forman una base.

3.5 Cambio de base en un espacio vectorial.

Example *a) Calcular las coordenadas del vector de* $\mathbb{R}^2$ $\vec{\mathbf{u}} = (3,-1)$ *respecto de la base canónica de* $\mathbb{R}^2$.

Solución: Las coordenadas son $\alpha_1 = 3$ *y* $\alpha_2 = -1$ *(trivialmente). Podemos representar a estas coordenadas por* $(3,-1)_C$ *para indicar que es en la base canónica C. Normalmente, cuando se trabaja en la base canónica, ésta no se suele expresar, sino que diremos directamente que las coordenadas del vector* $\vec{\mathbf{u}} = (3,-1)$ *respecto de la base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *son* $(3,-1)$.

b) Calcular las coordenadas del vector de $\mathbb{R}^2$ $\vec{\mathbf{u}} = (3,-1)$ *respecto de la base de* $\mathbb{R}^2$ *dada por* $\{(2,2),(-1,5)\}$.

Solución: Las coordenadas son $\alpha_1 = \frac{7}{6}$ *y* $\alpha_2 = -\frac{2}{3}$ *(ya no tan trivial). Representaremos a estas coordenadas por* $\left(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}\right)_B$

c) Encontrar una relación matricial que nos permita obtener el resultado de (b) en función del de (a) y recíprocamente.

Solución: (En estos ejercicios siempre es aconsejable trabajar con vectores columnas) Se verifica que

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_C$$

y también que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}_B$$

Remark *En base al ejemplo anterior, es inmediato hallar las coordenadas que nos permiten expresar un vector de la base canónica a una base cualquiera B, o viceversa, ya que se verifica (trabajando por columnas)*

$$\text{Coordenadas en } C = \text{Matriz que pasa de } B \text{ a } C \times \text{Coordenadas en } C$$

mientras que

$$\text{Coordenadas en } B = \text{Matriz que pasa de } C \text{ a } B \times \text{Coordenadas en } B$$

siendo

$$\text{Matriz que pasa de } C \text{ a } B = \left(\text{Matriz que pasa de } B \text{ a } C\right)^{-1}$$

y siempre esta última matriz es inmediata (basta con observar que los vectores de la base B son las columnas de dicha matriz). Por tanto, y expresadas en notación matricial las igualdades anteriores, tendremos

$$M_{B,C} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_C \quad y \quad M_{C,B} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}_B$$

donde

$$M_{C,B} = (M_{B,C})^{-1}$$

y la matriz $M_{B,C}$ es siempre inmediata de escribir.

¿Y qué ocurre si tenemos las coordenadas de un vector en una base B y queremos calcular sus coordenadas en otra base B' sin que ninguna de ellas sea la base canónica?

Example *Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ y $B' = \{(1,0),(2,1)\}$, se pide:*

a) Hallar las coordenadas del vector $(4,0)$ respecto de ambas bases. Usar sistemas de ecuaciones.

b) Obtener el resultado anterior en forma matricial a través de la base canónica.

c) Hallar en general las expresiones para $M_{BB'}(Id_{\mathbb{R}^2})$ y $M_{B'B}(Id_{\mathbb{R}^2})$. ¿Qué relación existen entre ellas?

3.6 Relaciones entre subespacios, dimensiones, bases, suma y suma directa.

Proposition *Si S y T son subespacios vectoriales de V, entonces $S \cap T$ es subespacio vectorial de V.*

Example *Dados los subespacios vectoriales $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ y*

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x = 0\}$, *calcular* $S \cap T$.

Example *Dados los subespacios vectoriales* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x + y - z = 0\}$ *y* $T\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 2x - y = 0,\ y + z = 0\right\}$, *calcular* $S \cap T$.

Remark *En general, la unión de dos subespacios vectoriales no es un subespacio vectorial. Por ejemplo, calcular* $S \cup T$, *siendo* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ y = 0\}$; $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x = 0\}$.

Si la unión de subespacios no es subespacio, ¿cuál es el subconjunto más pequeño que contiene a la unión que sí es subespacio? Para dar respuesta a esta pregunta precisamos de la siguiente definición:

Definition *Si S y T son subespacios vectoriales de V, se define la* ***suma*** *de S y T como el conjunto*

$$S + T = \left\{\vec{s}+\vec{t} \mid \vec{s}\in S,\ \vec{t}\in T\right\}$$

Proposition *Si* S, T *son subespacios vectoriales de V, entonces* $S + T$ *es subespacio vectorial de V y es el "menor" subespacio vectorial de V que contiene a S y T.*

Example *Si* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ y = 0\}$ *y* $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x = 0\}$, *probar que* $S + T = \mathbb{R}^2$.

Definition *Si además se tiene que* $S \cap T = \vec{0}$, *se dice que la suma* $S + T$ *es* ***directa****, y se denota por* $S \oplus T$.

Definition *En caso de ser* $S \oplus T = V$, *se dice que S y T son* ***subespacios suplementarios****.*

Proposition *Se verifican:*

a) Si S está generado por los vectores $\left\{\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_r\right\}$ *y T está generado por* $\left\{\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_k\right\}$, *entonces* $S + T$ *está generado por* $\left\{\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_r, \vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_k\right\}$, *y formarán una base de* $S + T$ *si son linealmente independientes.*

b) Si $S \oplus T = V$, *y* B_1 *es base de S y* B_2 *es base de T, entonces* $B_1 \cup B_2$ *es base de V.*

c) Si V es de dimensión finita y S, T *son subespacios de V, entonces*

$$dim(S + T) = dim S + dim T - dim(S \cap T)$$

Example *Varios*