Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 2: MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

PROGRAMA DETALLADO:

2.1 Matrices y operaciones:
2.1.1 Primeras definiciones.
2.1.2 Operaciones con matrices.
2.1.3 Operaciones elementales en matrices.
2.1.4 Matrices invertibles.

2.2 Determinantes y rango:
2.2.1 Definición y propiedades.
2.2.2 Cálculo de la matriz inversa usando determinantes.
2.2.3 Cálculo del rango de una matriz usando determinantes.

2.3 Sistemas de ecuaciones lineales:
2.3.1 Definiciones y primeras propiedades.
2.3.2 El método de Gauss.
2.3.3 Otros métodos de factorización directa.

2.1 Matrices y operaciones.

2.1.1 Primeras definiciones.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (que normalmente será el de los números reales $\mathbb{R}$ o el de los complejos $\mathbb{C}$). Se llama **matriz** *nxm* **sobre** $\mathbb{K}$ a toda aplicación

$$A : \{1,2,\ldots,n\}x\{1,2,\ldots,m\} \to \mathbb{K}$$

es decir, a cada pareja (i,j), con $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ y $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, se le hace corresponder un elemento $A(i,j) \in \mathbb{K}$, al que normalmente denotaremos por a_{ij}. Se dice que a_{ij} es el elemento (i,j) de la matriz A. A la matriz A la representaremos por $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n}^{;j=1,\ldots,m}$; o simplemente por $A = (a_{ij})$. Denotaremos por $M_{nxm}(\mathbb{K})$ al conjunto de las matrices *nxm* sobre $\mathbb{K}$. A los elementos de $\mathbb{K}$ se les llama **escalares**.

La forma de representar la matriz anterior es ordenando las imágenes (es decir, sus elementos) en una "caja" que consta de *n* filas y de *m* columnas de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

y se dice que A tiene n filas y de m columnas.

Definition ***Vectores fila y vectores columna.***

Example *Veamos un **ejemplo** de una matriz real (matriz con elementos sobre $\mathbb{R}$) y otro de una matriz compleja (con elementos sobre $\mathbb{C}$)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2+3i & 3-i \\ 4+3i & -4-i \\ 2-2i & -2+3i \end{pmatrix}$$

Definition *Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, se llama **matriz traspuesta** de A, a la matriz $A^T = (a_{ji}) \in M_{mxn}(\mathbb{K})$, es decir, a la matriz resultante de cambiar las filas por las columnas. Por ejemplo, si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Definition *Si en una matriz coinciden el número de filas y de columnas, es decir, si $n = m$, diremos que la matriz es **cuadrada**. Al conjunto de las matrices cuadradas nxn sobre $\mathbb{K}$ lo denotaremos por $M_n(\mathbb{K})$.*

Definition ***Matriz opuesta. Matriz nula. Matriz fila. Matriz columna. Matriz diagonal. Matriz triangular superior*** $\left(a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\right)$***. Matriz triangular inferior*** $\left(a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\right)$***. Matriz simétrica*** $(A = A^T)$***. Matriz antisimétrica*** $(A^T = -A)$***. Matriz identidad. Submatriz.***

2.1.2 Operaciones con matrices.

Definition ***(Suma)*** *Si $A = (a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, se define la **matriz suma** $A+B$ como la matriz resultante de realizar $(a_{ij} + b_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$.*

Proposition *El conjunto $M_{nxm}(\mathbb{K})$ con la operación $+$ anteriormente definida, es un grupo abeliano. **(Nota: Hacer la demostración)**.*

Definition ***(Producto de un escalar por una matriz)*** *Si $A = (a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ y α es un escalar ($\alpha \in \mathbb{K}$), se define la **matriz producto por escalares** $\alpha \cdot A$ como la matriz resultante de realizar $(\alpha \cdot a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$.*

Proposition *El conjunto $M_{nxm}(\mathbb{K})$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ anteriormente definidas, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. **(Nota: Hacer la demostración)**.*

Definition ***(Producto de matrices)*** *Si $A = (a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{mxr}(\mathbb{K})$, se define la **matriz producto** $A \cdot B$ como la matriz $(c_{ij}) \in M_{nxr}(\mathbb{K})$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, con $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r$. Notemos que el producto de dos matrices solo puede realizarse cuando el número de columnas de la primera* *coincide con el número de filas de la segunda.*

Example *Varios.*

Proposition *El producto de matrices (siempre que pueda realizarse) verifica las propiedades asociativa y distributiva. En general, no tiene porqué cumplirse la propiedad conmutativa.*

2.1.3 Operaciones elementales en matrices.

Definition *Si* $A = (a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$*, se define el* ***rango*** *de A, y se denota por rgA, al rango del conjunto de los vectores fila (que coincide con el rango de conjunto de los vectores columna), es decir, al número de vectores fila (o columna) que son linealmente independientes.*

Para calcular el rango de una matriz de forma práctica, además de los determinantes (como veremos en el apartado siguiente) necesitamos unas herramientas que se conocen con el nombre de **operaciones elementales fila y columna**. Así, dada una matriz $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ estas operaciones son tres:

1. Intercambiar dos filas (o columnas) de la matriz A.
2. Multiplicar una fila (columna) por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ no nulo.
3. Sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$.

Para evitar equívocos que se pueden producir al utilizar indistintamente operaciones elementales fila y columna, a partir de ahora vamos a trabajar únicamente con operaciones elementales fila.

Como consecuencia de un resultado que se verá en el Capítulo de Espacios Vectoriales se obtiene el siguiente Teorema:

Theorem *El rango de una matriz no varía al realizar una operación elemental sobre ésta.*

Definition *Dadas* $A,B \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ *diremos que A y B son* ***equivalentes*** *si existen* $P \in M_n(\mathbb{K})$ *y* $Q \in M_m(\mathbb{K})$ *tales que* $B = P \cdot A \cdot Q$*.*

Proposition *Sean* $A,B \in M_{nxm}(\mathbb{K})$*. Entonces:*

i) A y B son equivalentes sí y sólo si $rgA = rgB$*.*

ii) $rgA = r$ *sí y sólo si A es equivalente a* $\begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbf{0}_{rx(m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r)xr} & \mathbf{0}_{(n-r)x(m-r)} \end{pmatrix}$

2.1.4 Matrices invertibles.

Definition *Dada* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *diremos que A es* ***invertible, regular o no singular*** *si existe* $B \in M_n(\mathbb{K})$ *tal que* $A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{I}_n$*. Se dice en este caso que B es la inversa de A, y la denotaremos por* A^{-1}*.*

- Se puede demostrar que la inversa de una matriz, si existe, es única.
- Denotaremos por $GL_n(\mathbb{K})$ al conjunto de las matrices $M_n(\mathbb{K})$ que son invertibles.

Proposition *Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, se verifican:*

a) $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) $A \cdot B \in GL_n(\mathbb{K})$ *y* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

c) Sea $A \in GL_n(\mathbb{K})$. *Entonces A es invertible sí y sólo si* $rgA = n$.

Método para el cálculo de la inversa de una matriz invertible:

Sea $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Consideremos la siguiente matriz descompuesta en bloques $(A \mid \mathbb{I}_n)$. Entonces, realizaremos operaciones elementales a las filas de esta matriz de bloques con el objetivo de conseguir en el 1er bloque la matriz identidad. Si no es posible obtenerla, es que A no es invertible; si somos capaces de obtenerla, la matriz resultante en el segundo bloque es la inversa buscada.

Example *Obtener, si existen, las inversas de las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Determinantes.

2.2.1 Definición y propiedades.

Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, definiremos su **determinante**, y lo denotaremos por $|A|$, al número obtenido de la siguiente forma:

- Si $n = 1$, entonces $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.

- Si $n = 2$, entonces $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- Para el caso $n > 2$, definiremos el determinante de la matriz como el resultado que se obtiene al desarrollar por los elementos de una línea (por ejemplo, la primera fila). Así, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, definiremos

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

- Notemos que para el caso particular $n = 3$, se obtiene la conocida **Regla de Sarrus** (hacerlo).

Proposition *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces:*

a) Si se permutan dos filas (o columnas) de A, el determinante de la matriz obtenida es el mismo.

b) Si una fila (columna) de A es combinación lineal de las otras o equivalentemente, si las filas (columnas) de A son linealmente dependientes, entonces $|A|= 0$.

c) Si multiplicamos por un escalar α una fila (columna) de la matriz A, entonces $|\alpha \cdot A|= \alpha\, |A|$.

d) Si a una fila (columna) de una matriz A se le suma una combinación lineal de otras filas (columnas), el determinante de A no varia.

e)$|A|= |A^T|$.

f) Si $B \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $|A \cdot B| = |A||B|$.

g) Si una fila (o columna) es suma de dos cantidades, el determinante se puede poner como suma de dos determinantes, en la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

h) $A \in M_n(\mathbb{K})$ es regular sí y sólo si $|A|\neq 0$.

i) Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, entonces $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

j) El determinante de una matriz triangular superior o triangular inferior coincide con el producto de los elementos de su diagonal.

Definition *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces, se define el **menor complementario del elemento** (i,j), y se denota por $\triangle_{ij}$, al determinante que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A. Se define el **adjunto del elemento** (i,j), y se denota por A_{ij}, a $A_{ij} = (-1)^{i+j}\triangle_{ij}$.*

Proposition *El valor de un determinante coincide con la suma de los productos de cada uno de los elementos de una fila (columna) por sus respectivos adjuntos.*

2.2.2 Cálculo de la matriz inversa usando determinantes.

Definition *Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$ se define la **matriz adjunta** de A como*

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

donde los A_{ij} están dados en la anterior definición.

Proposition *Si A es una matriz invertible, entonces*

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|}$$

Example *Varios.*

2.2.3 Cálculo del rango de una matriz usando determinantes.

Definition *Si $A = (a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, se define el **rango** de A, y se denota por rgA, al rango del conjunto de los vectores fila (que coincide con el rango de conjunto de los vectores columna), es decir, al número de vectores fila (o columna) que son linealmente independientes.*

Definition *Dada $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ y $r \in \mathbb{N}$, con $r \leq n, m$, llamaremos **menor de orden** r de A a todo determinante de una submatriz rxr de A.*

Proposition *Dada $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, se tiene que rgA coincide con el máximo de los órdenes de sus menores no nulos.*

Example *Varios.*

2.3 Sistemas de ecuaciones lineales.

2.3.1 Definiciones y primeras propiedades.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $n, m \in \mathbb{N}$.

Definition *Un **sistema de** n **ecuaciones y** m **incógnitas** es un conjunto de n ecuaciones en la forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

*donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ (éstos reciben el nombre de **coeficientes del sistema)** y $b_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, (reciben el nombre de **términos independientes del sistema**). Los $x_1, x_2, \dots, x_n$ reciben el nombre de **incógnitas del sistema**.*

Definition *Dado $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, diremos que c es una **solución del sistema** anterior si al sustituir en las ecuaciones anteriores cada x_j por c_j, $1 \leq j \leq m$, las igualdades son ciertas.*

El sistema anterior se puede expresar por la igualdad matricial

$$Ax = b$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definition *En el caso particular en que el vector b sea nulo, es decir,* $b = (0,0,\dots,0)^T$*, se dice que el sistema es* ***homogéneo****.*

Definition *Se dice que un sistema es* ***compatible*** *(SC) si tiene soluciones. Se dirá c****ompatible determinado*** *(SCD) si es compatible y tiene una única solución; se dirá* ***compatible indeterminado*** *(SCI), si es compatible y no tiene una única solución. Se dice que un sistema es* ***incompatible*** *(SI) si no tiene solución.*

Remark *Notemos que un sistema homogéneo siempre tiene solución (al menos la solución nula).*

Definition *Dados dos sistemas lineales de n ecuaciones con m incognitas con coeficientes en* $\mathbb{K}$*, diremos que* ***son equivalentes*** *si sus conjuntos de soluciones coinciden.*

Proposition *Consideremos un sistema de n ecuaciones con m incognitas con coeficientes en* $\mathbb{K}$*. Entonces:*

- Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de multiplicar dicha ecuación por un elemento de $\mathbb{K}$ *no nulo, el sistema obtenido es equivalente al primero.*

- Si sustituimos una ecuación del sistema por el resultado de sumar a esta ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar, el sistema obtenido es equivalente al primero.

Theorem ***(Rouché-Fröbenius)*** *Sea* $Ax = b$ *un sistema de n ecuaciones con m incognitas y sea* $A^* = (A|b) \in M_{n\times(m+1)}(\mathbb{K})$*. Entonces el sistema es compatible sí y sólo si* $rgA = rgA^*$*. Además, si* $rgA = rgA^* = m$ *entonces el sistema es compatible determinado, y si* $rgA = rgA^* < m$ *entonces el sistema es compatible indeterminado;. además, en este último caso, el número de parámetros es* $m - rgA$*. (Notemos que m es el número de incógnitas del sistema).*

Example *Varios.*

Proposition ***(Regla de Cramer)*** *Consideremos el sistema de n ecuaciones con n incógnitas* $Ax = b$*. Supongamos que* $A = (a_{ij})$ *y* $|A| \neq 0$*. Entonces*

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \; x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots$$

$$\ldots; x_n = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Example *Varios.*

2.3.2 El método de Gauss.

En el estudio de un método la primera cuestión a valorar será el **coste del método**, es decir el número de operaciones elementales a realizar, puesto que un elevado coste producirá la pérdida de excesivo tiempo, y además la propagación de errores de redondeo a lo largo de tantas operaciones hará que no se pueda confiar en el resultado. Por ejemplo, si se aplica la regla de Cramer para resolver un sistema compatible determinado de n ecuaciones, el número de operaciones a realizar es de $(n+1)! \cdot n-1,$ por lo que si fuese, por ejemplo, $n = 10$, resultará del orden de $4 \cdot 10^8$ operaciones. Por tal motivo habremos de pensar en otros métodos para la resolución de estos sistemas.

Sin embargo, para algunos tipos particulares de matrices la resolución de los correspondientes sistemas es casi inmediata por estos métodos directos. Entre estos tipos, cabe destacar el de las **matrices triangulares**. Posteriormente, y para otros tipos de matrices más generales, presentaremos el **método de Gauss**.

Sistemas triangulares.

Definition *Una matriz cuadrada de orden n,* $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *es* ***triangular superior*** *si tiene nulos todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal, es decir si* $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$. *Igualmente, es* ***triangular inferior*** *si* $a_{ij} = 0$ *si* $i < j$.

Los sistemas triangulares (ya sean superiores o inferiores) son inmediatos de resolver, ya que, por ejemplo, si consideramos el sistema triangular (superior)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}$$

es evidente que $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. Además, si se sustituye en la penúltima ecuación, podríamos hallar x_{n-1}. Repitiendo el proceso se obtiene trivialmente la solución $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ del sistema. A esta forma de resolver el sistema se le llama **sustitución regresiva**.

La expresión para el cálculo de cualquier incógnita viene dada por

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Remark *Puede probarse que el coste del método es de n^2 operaciones.*

El método de Gauss está incluido en los conocidos como **métodos gaussianos**, que son procedimientos que nos transforman los sistemas en otros triangulares y están basados en combinaciones lineales simples de las ecuaciones que nos anulan los elementos por debajo o por encima de la diagonal.

En todos ellos se observan dos fases:

- En la primera se producirá la eliminación de todos los elementos subdiagonales: el **método de Gauss** trabaja con la matriz y el vector de términos independientes; los **métodos LU**, **de Cholesky** y otros, producirán una factorización de la matriz del sistema como producto de una matriz triangular superior y de una triangular inferior.
- En la segunda fase habrá que resolver un sistema triangular superior (caso del método de Gauss) o dos sistemas triangulares (en los demás métodos).

La primera fase es la que marcará la diferencia entre los diversos métodos.

El método de Gauss.

No vamos a explicar como se aplica la fase de eliminación gaussiana, ya que es más que conocida (si $a_{11} \neq 0$, a la fila *i* se le resta la 1ª fila multiplicada por $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, con lo que se consiguen ceros por debajo del elemento a_{11}; si $a_{11} = 0$, buscaremos la 1ª fila cuyo elemento de la 1ª columna sea no nulo, y esta fila se intercambia con la 1ª; y así continua el proceso).

No obstante, sí que es preciso realizar una observación: Puesto que en este método se realizan divisiones por elementos (**pivotes**), si éstos son muy pequeños, un error de redondeo, aunque sea casi despreciable en valor absoluto, podrá producir errores muy grandes en el cociente, con el consiguiente perjuicio para la precisión del resultado. Así, una buena táctica consistirá en modificar el orden de las ecuaciones o de las incógnitas para que el pivote sea lo mayor posible. Esto suele hacerse de dos formas:

- **Pivote maximal por columnas***:* Consistirá en tomar como nuevo pivote el elemento de mayor valor absoluto entre los de la columna. En este caso cambiaremos filas (ecuaciones) y términos independientes.
- **Pivotaje completo***:* El nuevo pivote pasará a ser el elemento de máximo valor absoluto entre todos los elementos de la matriz resultante. En este caso cambiaremos filas y términos independientes, así como columnas y las incógnitas correspondientes. Esta forma es más complicada de llevar a la práctica, ya que no solo se intercambian filas (ecuaciones), sino que también se intercambian columnas (incógnitas).

Example ***Varios ejemplos.***

El método de Gauss, aunque sencillo y no con muchas operaciones (puede probarse que tiene un coste de $\frac{1}{6}n(n-1)(4n+7)$ operaciones para reducir a forma triangular + n^2 operaciones para resolver el sistema triangular), tiene la dificultad de la posibilidad indicada anteriormente de acarrear errores grandes, por lo que es conveniente usar alguna de las dos estrategias de elección de pivote para mejorar la precisión de manera satisfactoria. Veamos el siguiente ejemplo:

Example *Realizando los cálculos con 5 cifras significativas, comparar los resultados obtenidos al aplicar el método de Gauss simple o con elección de pivote total al sistema*

$$\left.\begin{aligned} 0'0002x + 1'2121y &= 1'2139 \\ 0'4132x + 1'9981y &= 1'7207 \end{aligned}\right\}$$

(Notemos que la solución exacta de este sistema es $x = 9, y = 1$).

2.3.3 Otros métodos de factorización directa.

Método de Jordan.

Otro método bastante parecido al de Gauss es el de **Jordan** (o **Gauss-Jordan**) en el que se transforma el sistema en uno diagonal, en vez de triangular. La diferencia con el método de Gauss radica en que en cada etapa se utiliza una ecuación no sólo para conseguir ceros por debajo de la diagonal, sino también por encima.

Example *Resolver, mediante el método de Jordan el sistema*

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Factorización LU.

Si dado un sistema lineal $Ax = b$ (con $|A| \neq 0$), podemos descomponer A en la forma $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior, la resolución de $Ax = b$ se reducirá a la resolución de dos sistemas triangulares: Si denotamos $y = Ux$, bastaría con resolver primero el sistema triangular $Ly = b$, y a continuación el sistema $Ux = y$, con un coste total de $2n^2$ operaciones.

¿Cuando es entonces posible realizar la descomposición de A en la forma $A = LU$? El siguiente resultado establece una condición suficiente para ello:

Proposition *Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que todos los determinantes de las submatrices principales $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ $(k = 1,\ldots,n)$ son no nulos. Entonces A puede descomponerse como producto de una matriz L triangular inferior con 1 en la diagonal principal ($l_{ii} = 1$, $\forall i = 1,\ldots,n$), por una matriz U trinagular superior. En estas condiciones, la descomposición es única.*

Remark *Este método se podrá aplicar de forma única siempre que todos los determinantes principales de A sean no nulos. Si no se cumple esta condición, y siempre que A sea regular, será posible permutar las ecuaciones de manera que la nueva matriz admita tal factorización.*

Al caso particular de esta descomposición en la que la matriz L tiene 1 en la diagonal principal, suele conocerse como **método de Doolittle,** y en el mismo, los valores de L y U se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
u_{ij} &= a_{ij} \qquad \text{si } i = 1 \text{ y } j = 1,2,\ldots,n \\
l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{u_{11}} \qquad \text{si } j = 1 \text{ y } i = 2,3,\ldots,n \\
l_{ij} &= \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right) \qquad \text{si } i > j \text{ con } i = 2,3,\ldots,n \\
u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \qquad \text{si } i \leq j \text{ con } j = 2,3,\ldots,n
\end{aligned}
$$

Example *Descomponer en la forma LU, mediante el método de Doolittle, la matriz*

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

No obstante, también es posible realizar otra descomposición semejante para A, que es la dada por el llamado **método de Crout**: En este caso es la matriz U la que tiene 1 en la diagonal principal. Las expresiones que permiten obtener los elementos de L y U son:

$$
\begin{aligned}
l_{i1} &= a_{i1} \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,n \\
u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad \text{si } i = 1 \\
u_{ij} &= \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right) \qquad \text{si } i > j \\
l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \qquad \text{si } i \geq j
\end{aligned}
$$

Example *Aplicando el método de Crout, resolver el sistema*

$$
\left.\begin{aligned}
2x + 3y - z &= 4 \\
x - y + 3z &= -4 \\
y - z &= 2
\end{aligned}\right\}
$$

En caso de que A sea simétrica y definida positiva, puede aplicarse la llamada **factorización de Cholesky**. Dicha factorización, se basa en el siguiente resultado:

Proposition *Son equivalentes:*

a) A es simétrica definida positiva.

b) Existe una matriz L triangular inferior, con elementos diagonales positivos, tal que $A = LL^T$.

Así pues, este método consiste en realizar la descomposición

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

de manera que los valores l_{ij} vienen dados por

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{1j} &= \frac{a_{j1}}{l_{11}} \\ l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \qquad \text{si } i = 2,3,\dots,n-1 \\ l_{ij} &= \frac{1}{l_{ll}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{kj} \right) \qquad \text{si } j = i+1,\dots,n \end{aligned}$$

Sustituyento entonces en el sistema $Ax = b$ el valor de A, resulta $LL^T x = b$, de donde si hacemos $y = L^T x$, por sustitución progresiva hallaremos primero el valor y de $Ly = b$, y después (mediante sustitución regresiva) hallaremos x a partir de $L^T x = y$.

Example *Resolver el sistema*

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ -x + 5y + z &= 1 \\ x + y + 3z &= 0 \end{aligned} \right\}$$