CONCEPTOS PREVIOS

En este tema vamos a analizar diversos conceptos que no están propiamente incluidos en el temario, así como algunas cuestiones sobre terminología y notación.

Conjuntos.

Un **conjunto** es la reunión en un todo de determinados objetos diferenciables unos de otros. A los objetos que forman un conjunto se les llama **elementos** del conjunto.

Example *Algunos conjuntos son* $\{1,2,3\}$, $\{a,b,c\}$, $\{5,2,8,125\}$, *el conjunto de los números pares, el conjunto de las personas de una ciudad, etc.*

Así, en el primer conjunto de los anteriores, diremos que 1 es un **elemento** del conjunto y escribiremos $1 \in \{1,2,3\}$ (se lee "1 pertenece al conjunto $\{1,2,3\}$"). Análogamente $2,3 \in \{1,2,3\}$. Si queremos decir que algo no pertenece al conjunto basta usar el símbolo $\notin$; por ejemplo $4 \notin \{1,2,3\}$.

Un conjunto puede describirse enumerando sus elementos (éstos suelen ponerse entre llaves separados por comas, como ocurre con los tres primeros casos anteriores) o definiéndolo por las propiedades que verifican sus elementos (como ocurre con los últimos 2 casos anteriores). Si un conjunto consta de un número finito de elementos se dice que es un conjunto **finito** y si no, se dice que es **infinito**.

Se llama **conjunto vacío** al que no tiene ningún elemento, y se designará por $\emptyset$.

Sean A y B conjuntos. Diremos que B es un **subconjunto** de A cuando todos los elementos de B están en A. Esto lo denotaremos por $B \subseteq A$ (se lee "B está contenido en A"). Si queremos decir que el conjunto B no es un subconjunto de A escribiremos $B \subsetneq A$. (A veces se utiliza $\subset$ en vez de $\subseteq$ para designar la inclusión.)

Dados dos conjuntos A y B, para comprobar que son iguales ($A = B$) hay que ver que ambos tienen exactamente los mismos elementos. Para demostrar esto, en la práctica, lo que se hará en la mayoría de las ocasiones será observar que se verifican las dos inclusiones $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$.

Sean A y B conjuntos. Se denomina **unión** de A y B al conjunto cuyos elementos cumplen, cada uno de ellos, la propiedad de estar o bien en A o bien en B. Este nuevo conjunto se denotará $A \cup B$ (se lee "A unión B"). De modo matemático podríamos expresarlo así

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Se denomina **intersección** de A y B al conjunto cuyos elementos cumplen, cada uno de ellos, la propiedad de estar tanto en A como en B. Este nuevo conjunto se denotará $A \cap B$ (se lee "A intersección B"). De modo matemático podríamos expresarlo así

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Se llama **diferencia** de A por B al conjunto formado por los elementos que están en A pero no en B. Se denota por $A - B$ (también se denota $A \backslash B$. De modo matemático podríamos expresarlo así

$$A - B = \left\{x;\ x \in A \text{ y } x \notin B\right\}$$

Example *Dados los conjuntos* $A = \{1,2,3\}$ *y* $B = \{2,4,6\}$, *se tiene que*

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6\},\ A \cap B = \{2\},\ A - B = \{1,3\} \text{ y } B - A = \{4,6\}$$

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se denota por $A \times B$ y es el conjunto de los ”pares” de elementos de A y de B, es decir

$$A \times B = \{(a,b) |\ a \in A \text{ y } b \in B\}$$

La definición se extiende de forma natural para cualquier número de conjuntos. En el caso de que hagamos el producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo n veces utilizaremos la notación A^n para denotar

$$A^n = A \times \ldots \times A$$

como ocurrirá por ejemplo con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, y en general con $\mathbb{R}^n$. En estos casos, a sus elementos los denominamos **vectores**.

Algunos conjuntos numéricos destacables son los siguientes:

Example *- El conjunto de los números* ***naturales*** $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$, *aunque habitualmente se suele tomar como conjunto de los números naturales el dado por*

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1,2,3,\ldots\}$$

que será el que habitualmente consideremos nosotros (a no ser que se nos indique lo contrario).

- El conjunto de los números ***enteros***

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$$

Es claro que todo número natural es un número entero.

- El conjunto de los números ***racionales*** *o* ***fraccionarios***

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n};\ m,n \in \mathbb{Z}, \text{ con } n \neq 0\right\}$$

Este conjunto incluye a todos los conjuntos anteriores (naturales y enteros), así como a todos los números decimales periódicos o con una cantidad finita de decimales; debemos de conocer como dado uno de estos números, el mismo puede ponerse como fracción.

- El conjunto de los números ***reales*** $\mathbb{R}$, *algo más difícil de dar explícitamente, que podríamos verlo como el conjunto de los números decimales, tanto los periódicos como los no periódicos. Serían ejemplos de números reales, aparte de todos los números racionales, algunos que no lo son, como* $\sqrt{2} = 1.41421\ldots..$, $\log 25 = 2.32192\ldots..$, *y otros tantos números que tienen infinitos decimales, pero no pueden darse con una expresión que se repita periódicamente (como, por ejemplo,* $\pi = 3.1415\ldots$ *o* $e = 2.718\ldots$*).*

También tenemos los conjuntos

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\} \text{ y } \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R};\ x < 0\}$$

A los números reales que no son racionales se les llama números ***irracionales****. El conjunto de los números irracionales se representa por* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

- *El conjunto de los números* ***complejos***

$$\mathbb{C} = \{a + b\mathbf{i};\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

donde se considera $\mathbf{i}$ *como la raíz cuadrada de* -1, $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. *Algunos números complejos serían los siguientes:* $2 + 3\mathbf{i}$, $-3 + \mathbf{i}$, $-2\mathbf{i}$, *etc. Es claro que todo número real* x *es un número complejo pues* $x = x + 0\mathbf{i}$.

De la definición de los conjuntos numéricos anteriores se deduce que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Aplicaciones.

Una **aplicación** de A hacia B (o de A en B) es una forma de asignar a cada elemento de A un elemento de B. Escribiremos

$$f : A \to B \qquad o \qquad A \xrightarrow{f} B$$

Al conjunto A se le llamará **dominio** (o **conjunto inicial**) y al conjunto B **codominio** (o **conjunto final**) de la aplicación. Si $a \in A$, entonces el elemento de B que le asignamos al elemento a se llamará **imagen** de a por f y se denotará $f(a)$. Esto también se expresa con las siguientes notaciones

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ a \rightsquigarrow f(a) \end{array} \qquad o \qquad \begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ a \mapsto f(a) \end{array}$$

Remark *El término función se suele aplicar al caso de aplicaciones cuando los conjuntos* A *y* B *son los conjuntos numéricos del ejemplo anterior (especialmente* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) o algunos obtenidos a partir de ellos (como por ejemplo* $\mathbb{R}^2$*).*

Example *Un ejemplo de aplicación puede ser el siguiente:*

$$f : \{1,2,3\} \to \{2,4,6,8\}$$

dada por

$$f(1) = 4;\ f(2) = 2;\ f(3) = 8$$

En este caso se dice que la imagen de 1 *es* 4; *que la imagen de* 2 *es* 2 *y que la imagen de* 3 *es* 8.

Example *Ejemplos de funciones serán los siguientes:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = x^3 + 5$$

o

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x,y) = x - y$$

Example *La* ***aplicación identidad*** *(a la que suele designarse habitualmente por Id) es la dada por*

$$Id : A \to A$$

tal que

$$Id(a) = a$$

Así, si tenemos $A = \mathbb{N}$, *la aplicación identidad es aquella tal que*

$$Id(1) = 1;\ Id(2) = 2; \ldots$$

Dada una aplicación $f : X \to Y$, y los subconjuntos $X' \subset X,\ Y' \subset Y,$ se llama **imagen** de X' por la aplicación f al conjunto dado por

$$f(X') = \left\{f(x);\ x \in X'\right\} = \left\{y \in Y;\ \exists x \in X' \text{ con } f(x) = y\right\}$$

es decir, el conjunto formado por todas las imágenes de los elementos de X'. Como caso particular se puede considerar el propio conjunto imagen de X, es decir, $f(X),$ al que suele denotarse por $\mathrm{Im}(f)$ (**imagen de** f).

De forma análoga se define la **antiimagen** (o **imagen inversa**) de Y', que viene dada por el conjunto

$$f^{-1}(Y') = \left\{x \in X;\ f(x) \in Y'\right\}$$

es decir el conjunto formado por los elementos de X cuya imagen está en Y'. A la antiimagen de un elemento b se le suele representar por $f^{-1}(b)$. De esta forma, si $f^{-1}(b) = a \in X$, esta expresión es equivalente a que $b = f(a)$.

Example *En el primero de los ejemplos de este apartado, se tiene*

$$Im(f) = \{2,4,8\}$$

mientras que si tomamos $X' = \{2,3\}$ *y* $Y' = \{2,4\}$, *se tiene que*

$$f(X') = \{2,8\} \text{ y } f^{-1}(Y') = \{1,2\}$$

Tipos de aplicaciones.

Supongamos que tenemos una aplicación $f : X \to Y$. Diremos que f es:

- **Inyectiva** si se cumple que dados $a,b \in X$ tales que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$; o, dicho de otro modo, cada par de elementos distintos del conjunto inicial tienen distintas imágenes (o, si lo vemos a través de diagramas de Venn, que sea inyectiva significa que a cada elemento del conjunto final llegará una o ninguna "flecha" procendente del conjunto inicial).

- **Suprayectiva** o **sobreyectiva** si $Im(f) = Y$. Como siempre se tiene $Im(f) \subset Y$, que f sea suprayectiva equivale a que también se cumpla la inclusión contraria, es decir, que todo elemento del conjunto final Y sea imagen de algún elemento del conjunto inicial X. A través de diagramas, que sea suprayectiva significa que a todos los elementos del conjunto final llegan "flechas" procedentes del conjunto inicial (pueden ser una o varias).

- **Biyectiva** si es tanto inyectiva como suprayectiva. Es decir, a todos los elementos del conjunto final les llega una única "flecha" procedente del conjunto inicial; y en el caso en que los conjuntos sean finitos, las aplicaciones biyectivas se dan entre conjuntos con el mismo número de elementos.

Example *La aplicación* $f : \{1,2\} \to \{a,b,c\}$ *dada por* $f(1) = a,\ f(2) = c$*, es inyectiva pero no es suprayectiva. Sin embargo, la aplicación* $f : \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ *dada por* $f(1) = f(2) = a,\ f(3) = b$*, no es inyectiva pero si es suprayectiva. Por último, la aplicación* $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ *dada por* $f(1) = c,\ f(2) = a,\ f(3) = b$*, es inyectiva y suprayectiva, por lo que será biyectiva.*

Composición de aplicaciones.

Sean las aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. En tal caso tiene sentido considerar la aplicación del conjunto X en el conjunto Z dada por

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

donde la imagen de cada elemento $x \in X$ se obtiene calculando primero su imagen por f, $f(x) \in Y$, para a continuación calcular la imagen de este valor a través de g, es decir, se trata de hacer

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

A esta aplicación así definida, le llamaremos **aplicación compuesta** (o **composición de aplicaciones**) de f y g, a la que representaremos por $g \circ f$, y que viene definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; es decir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Notemos que para poder realizar la composición de aplicaciones es preciso que el conjunto final de la 1ª de las aplicaciones (que es Y en lo considerado anteriormente) ha de coincidir con el conjunto inicial de la segunda de las aplicaciones (en nuestro caso, g).

Suele ser habitual considerar la composición de funciones más que la de aplicaciones entre conjuntos finitos de elementos.

Example *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = e^x$*, y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = sin(x)$*. Notemos que en este caso tiene sentido considerar tanto* $g \circ f$ *como* $f \circ g$*, puesto que ambas funciones están definidas entre el mismo conjunto* $\mathbb{R}$*. Realizando los cálculos oportunos, tendremos*

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

estando definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = sin(e^x)$$

mientras que

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

viene definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(sin(x)) = e^{sin(x)}$$

Remark *Notamos, a través de este último ejemplo, que la composición de aplicaciones no tiene porqué ser conmutativa. De igual forma podemos componer una aplicación* f *consigo misma (caso de que los conjuntos iniciales y finales de* f *coincidan). Así obtendremos* $f \circ f$*, que vendrá dada por* $(f \circ f)(x) = f(f(x))$*, y a la que representaremos por* f^2*. Por ejemplo, en el caso anterior, tendremos*

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(e^x) = e^{e^x}$$

También observamos con este ejemplo que f^2 *no coincide con* $(f(x))^2$*.*

Aplicación inversa.

Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva. De esta forma, dada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$, o lo que es lo mismo, tal que $x = f^{-1}(y)$ (es decir, x es la imagen inversa del elemento y). Por tanto, tendrá sentido definir una nueva aplicación g de Y en X que a cada $y \in Y$ le asigna $f^{-1}(y)$, es decir

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

A esta nueva aplicación así definida le llamaremos **aplicación inversa** de f y la denotaremos por f^{-1}. De nuevo observamos que no hay que confundir f^{-1} (que denota a la aplicación inversa de una aplicación biyectiva f) con $\frac{1}{f}$, sino que f^{-1} es aquella aplicación que cumple, debido a su definición, que

$$f \circ f^{-1} = Id(Y) \text{ y que } f^{-1} \circ f = Id(X)$$

Por ello, cuando nos referimos a la inversa de una aplicación, esta inversa hace referencia a la operación composición de aplicaciones (y no al producto de aplicaciones).

Example *Por la definición anterior, se tiene que las inversas de las siguientes funciones son (Se deja al lector que compruebe en todos los casos que* $(f \circ f^{-1})(x) = x$ *y que* $(f^{-1} \circ f)(x) = x$*):*

a) Si $f(x) = x^2$*, entonces* $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

b) Si $f(x) = e^x$*, entonces* $f^{-1}(x) = log(x)$ *(logaritmo neperiano).*

c) Si $f(x) = sin(x)$*, entonces* $f^{-1}(x) = arcsin(x)$.

Números complejos.

Históricamente, los números complejos se introducen para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Esta ecuación no tiene solución real, es decir, no existe ningún número cuyo cuadrado sea -1. Tanto esta operación como otras que no tienen solución en $\mathbb{R}$ (como, por ejemplo, calcular raíces de índice par y radicando negativo o calcular logaritmos de números negativos o con base negativa), crean la necesidad de construir un cuerpo conmutativo, que contenga a $\mathbb{R}$ y tal que todas estas operaciones tengan sentido. Precisamente, a obtener dicho cuerpo (al que llamaremos **cuerpo de los números complejos** y que designaremos por $\mathbb{C}$) dedicaremos esta última sección de este tema introductorio a la asignatura.

Definición. Forma binómica. Operaciones en forma binómica.

Son muchas las formas en las que puede ampliarse $\mathbb{R}$. El método que seguiremos consistirá en partir del espacio $\mathbb{R}^2$ y definir adecuadamente una suma y un producto. En concreto, definiremos

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$

$$(x,y) \cdot (x',y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x')$$

Remark *a) Se prueba que* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *es un cuerpo, al que se designa por* $\mathbb{C}$ *y se le llama* ***el cuerpo*** $\mathbb{C}$ ***de los números complejos****.*

b) El neutro para la suma es el par $(0,0)$*, mientras que para el producto es* $(1,0)$.

c) Por la forma en la que se han definido estas operaciones, resultará posible la *operación inversa para el producto (salvo la división por cero). Puede verificarse que el inverso del par $(x,y) \neq (0,0)$ es $(x',y') = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.*

d) Como veremos, en este nuevo cuerpo así construido tendrán solución (aunque no será única) todas las operaciones algebraicas, de forma que ya no será necesario realizar una nueva ampliación. Sin embargo, ocurrirá que $\mathbb{C}$, a diferencia de $\mathbb{R}$, no admitirá ninguna relación de orden compatible con su estructura de cuerpo.

e) Se puede probar que el conjunto $\mathbb{R} \times \{0\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$, por lo que puede identificarse al número real x, con el número complejo $(x,0)$.

Proposition *Se verifican:*

*a) En $\mathbb{C}$ tiene solución la ecuación $z^2 = -1$. La solución es el número complejo $(0,1)$, al cual se le llama **unidad imaginaria**, y se representa por **i**.*

*b) Cualquier complejo $z = (x,y)$ se puede escribir de forma única en la forma $z = x + iy$. A esta nueva forma de representar los números complejos se le llama **forma binómica, algebraica o cartesiana**. A x se le llama **parte real** y a y **parte imaginaria**, y suelen representarse, respectivamente, por $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.*

Definition *Se denomina **conjugado** del número complejo $z = x + iy$ al número complejo $\overline{z} = x - iy$.*

Proposition ***(Resumen de operaciones en forma binómica)** Dados los números complejos $z = x + iy, z' = x' + iy'$, se verifican:*

*a) **Suma y resta**: $z \pm z' = (x + iy) \pm (x' + iy') = (x \pm x') + i(y \pm y')$*

*b) **Producto**: $z \cdot z' = (x + iy) \cdot (x' + iy') = (x \cdot x' - y \cdot y') + i(x \cdot y' + y \cdot x')$*

*c) **Cociente**: $\frac{z}{z'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} \cdot \frac{x'-iy'}{x'-iy'} = \frac{x \cdot x'+y \cdot y'}{x^2+y^2} + i\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{x^2+y^2}$*

Cualquier otra operación (raíz cuadrada, exponencial, logaritmos, etc) es más aconsejable realizarla expresando el número complejo en otra forma (módulo-argumental), como veremos más adelante.

Representación geométrica.

La aplicación de $\mathbb{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$$
$$z \mapsto (x,y)$$

que a cada número complejo $z = x + iy$ le asocia un punto de coordenadas (x,y) es biyectiva. El punto (x,y) se llama **afijo** del complejo $z = x + iy$.

Los números reales tienen sus afijos en el eje de abcisas o **eje real**; los números imaginarios puros tienen sus afijos en el eje de ordenadas o **eje imaginario**.

Un número complejo y su opuesto tienen sus afijos simétricos respecto del origen; un número complejo y su conjugado tienen sus afijos simétricos respecto del eje real.

Módulo y argumento. Formas trigonométrica y módulo-argumental.

Definition *Se llama **módulo** del número complejo $z = x + iy$ al número real no negativo dado por*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geométricamente, el módulo del número complejo es el módulo del vector con origen en $(0,0)$ y extremo en el afijo del complejo.

Definition *Si representamos este vector, a la medida del ángulo θ que dicho vector forma con el semieje real positivo, se le llama **argumento** de z, y se denota por $arg(z)$. Así pues, $arg(z) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).*

*Al único valor de $arg(z)$ que pertenezca a $(-\pi, \pi]$, se la llama **argumento principal** de z, y se representará por $Arg(z)$.*

Si θ es el argumento principal de $z = x + iy$, y si $|z| = r$, se tendrá

$$x = r \cdot \cos\theta, \quad y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$$

de donde

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Por tanto, si sustituimos en $z = x + iy$, se tiene

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

expresión que se denomina **forma trigonométrica** del complejo z. Esta expresión suele escribirse, en forma abreviada, poniendo $z = r_\theta$, a la que se conoce como **forma polar** o **módulo-argumental**.

Esta nueva forma de expresar un número complejo tiene ventajas para realizar determinadas operaciones:

Proposition *Dados dos complejos $z = r_\theta$ y $z' = r'_{\theta'}$, no nulos, y si $n \in \mathbb{Z}$, se verifica:*

a) $r_\theta = r'_{\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ y $\theta - \theta' = 2k\pi$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

b) $r_\theta \cdot r'_{\theta'} = (r \cdot r')_{\theta+\theta'}$

c) $(r_\theta)^{-1} = (r^{-1})_{-\theta}$

d) $\frac{r_\theta}{r'_{\theta'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\theta'}$

e) $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$

Raíz n –sima de un número complejo.

Definition *Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se llama **raíz** $n-$sima de z a todo complejo w tal que $w^n = z$. A esta raíz $n-$sima la representaremos por $\sqrt[n]{z}$.*

Veamos como puede obtenerse esta raíz:

Proposition *Todo $z = r_\theta \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, admite n raíces $n-$simas, que vienen dadas por*

$$\sqrt[n]{r_\theta} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

y donde $\sqrt[n]{r}$ indica la única raíz $n-$sima ral y positiva de $r > 0$.

Remark *Geométricamente, los afijos de las n raíces n – simas de z son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro el origen y radio* $\sqrt[n]{r}$.