4. MÉTODOS PLANIMÉTRICOS: ITINERARIO

4.1) Con una estación total se realizó un itinerario encuadrado entre los vértices A y D.

$X_A = 1.523,62m$ $Y_A = 2.724,41m$ $Z_A = 297,32m$

$X_D = 1.636,25m$ $Y_D = 2.595,66m$ $Z_D = 293,43m$

Calcula las coordenadas compensadas X, Y y Z de las estaciones visadas, con los datos de la siguiente libreta de campo:

Estación	Punto	L. acimutal	D. reducida	Z
A	D	$227,12^g$	-	-
	B	$160,31^g$	81,838m	-3,060m
B	A	$171,60^g$	81,832m	3,055m
	C	$18,57^g$	93,960m	-1,714m
C	B	$371,97^g$	93,986m	1,716m
	D	$267,09^g$	107,984m	0,843m
D	C	$148,47^g$	107,994m	-0,837m
	A	$73,31^g$	-	-

Un itinerario encuadrado se apoya en dos puntos de coordenadas conocidas, por ejemplo dos vértices de una triangulación topográfica, que constituyen las estaciones extremas del mismo. La primera visual de espaldas, desde la primera estación *A* a la última *D*, nos permite orientar el itinerario por referencia al acimut trigonométrico. En la última visual de frente, desde la última estación *D* a la primera *A*, calculamos el acimut topográfico y el error de cierre acimutal del itinerario, que es preciso compensar.

- Acimut trigonométrico: lo calculamos a partir de las coordenadas de las dos estaciones extremas del itinerario, *A* y *D*. Una vez calculado, este acimut nos permite orientar el instrumento en la primera estación *A* o, como es el caso en este ejercicio, calcular la corrección de orientación en *A*.

$$\theta_A^D = 100 + arc\ tg\ \frac{|Y_A - Y_D|}{|X_A - X_D|} = 154,245^g \qquad \theta_D^A = 354,245^g$$

- Corrección de orientación: la corrección de orientación en la primera estación *A* se calcula a partir del acimut trigonométrico y de la visual de espaldas lanzada a la última estación *D*:

$$Cor_A = \theta_A^D - L_A^D = 154,245 - 227,12 = -72,875^g$$

$$\theta_A^B = L_A^B + Cor_A = 160,31 + (-72,875) = 87,435^g$$

$$\theta_B^A = \theta_A^B \pm 200^g = 287,435^g$$

Para transmitir la orientación a lo largo del itinerario calculamos la corrección en cada una de las estaciones, por diferencia entre el acimut recíproco de cada tramo, el tomado en sentido contrario al de avance del itinerario, y la lectura de espaldas correspondiente. Así:

$$Cor_B = \theta_B^A - L_B^A$$

La corrección de orientación nos permite calcular los acimutes de todas las visuales de frente lanzadas desde esa estación a partir de las lecturas acimutales realizadas:

$$\theta_B^C = Cor_B + L_B^C$$

Y el acimut recíproco se calcula:

$$\theta_C^B = \theta_B^C \pm 200^g$$

Repetimos este procedimiento hasta la última estación del itinerario. El último acimut calculado θ_D^A, correspondiente a la última visual de frente, es el acimut topográfico. Si para algún acimut se obtiene un valor negativo, le sumaremos 400^g; del mismo modo, si obtenemos un valor mayor de 400^g procederemos a restarle esta misma cantidad.

$$Cor_B = 115,835^g \qquad \theta_B^C = 134,405^g \qquad \theta_C^B = 334,405^g$$
$$Cor_C = -37,565^g \qquad \theta_C^D = 229,525^g \qquad \theta_D^C = 29,525^g$$
$$Cor_D = -118,945^g \qquad \theta_D^A = 354,365^g$$

• Error de cierre angular: es la diferencia entre el acimut topográfico y el recíproco del acimut trigonométrico:

$$e_a = \theta_D^A{}_{topográfico} - \theta_D^A{}_{trigonométrico} = 354,365 - 354,245 = 0,12^g \text{ (por exceso)}$$

Se trata de un error por exceso, puesto que el acimut topográfico es mayor que el trigonométrico. Admitimos que este último es el valor correcto, mientras que el acimut topográfico va afectado de todos los errores acimutales que se hayan acumulado a lo largo del itinerario. Como comprobación, también podemos calcular el error de cierre por diferencia entre la suma de lecturas acimutales de visuales de frente y la de lecturas de visuales de espaldas:

	L.Frente		L.Espalda
AB:	$160,31^g$	BA:	$171,60^g$
BC:	$18,57^g$	CB:	$371,97^g$
CD:	$267,09^g$	DC:	$148,47^g$
DA:	$73,31^g$	AD:	$227,12^g$
	519,28		919,16

Estos dos valores difieren en un múltiplo entero de 200^g y en el error de cierre, que valdrá:

$$e_a = 19,28 - 19,16 = 0,12^g \text{ (por exceso)}$$

• Compensación de acimutes: el error se reparte entre los acimutes de los tramos del itinerario. El factor de compensación se obtiene dividiendo el error de cierre por el número de estaciones, *4* en nuestro caso:

$$f_c = 0,12/4 = 0,03^g$$

Para compensar los acimutes se opera de la siguiente forma, teniendo en cuenta que la corrección a aplicar debe llevar signo contrario al error de cierre:

$$\theta_A^B = 87,435 - f_c = 87,405^g$$
$$\theta_B^C = 134,405 - 2\,f_c = 134,345^g$$
$$\theta_C^D = 229,525 - 3\,f_c = 229,435^g$$
$$\theta_D^A = 354,365 - 4\,f_c = 354,245^g$$

El último acimut compensado debe coincidir con el recíproco del acimut trigonométrico. A partir de este momento, trabajaremos con los acimutes compensados.

- Distancias reducidas: calculamos las distancias reducidas promedio de cada tramo a partir de las que figuran en la libreta de campo:

$D_A{}^B = 81{,}838m$ $D_B{}^A = 81{,}832m$ valor medio: $D_{AB} = 81{,}835m$

$D_B{}^C = 93{,}960m$ $D_C{}^B = 93{,}986m$ valor medio: $D_{BC} = 93{,}973m$

$D_C{}^D = 107{,}984m$ $D_D{}^C = 107{,}994m$ valor medio: $D_{CD} = 107{,}989m$

- Coordenadas parciales: las coordenadas planimétricas parciales se calculan con los acimutes compensados y con los valores medios de las distancias reducidas. Las expresiones a aplicar son las que ya conocemos:

$$X_A{}^B = D_{AB}\ \text{sen}\ \theta_A{}^B \qquad Y_A{}^B = D_{AB}\ \cos\theta_A{}^B$$

$$X_A{}^B = 80{,}239m \qquad Y_A{}^B = 16{,}085m$$

$$X_B{}^C = 80{,}626m \qquad Y_B{}^C = -48{,}274m$$

$$X_C{}^D = -48{,}170m \qquad Y_C{}^D = -96{,}650m$$

- Error de cierre planimétrico: se calcula a partir del valor de la coordenada parcial de la última estación respecto a la primera. Tal como hicimos con los acimutes, admitimos que el valor correcto es el que se obtiene a partir de las coordenadas absolutas conocidas de los puntos *A* y *D*, mientras que las coordenadas parciales que hemos calculado van afectadas de los errores cometidos en el itinerario. Como sabemos:

$X_A{}^D = X_D - X_A$ valor correcto

$X_A{}^D = \Sigma X$ valor incorrecto

	X	Y	
A			$\Sigma X = 112{,}694m$
			$\Sigma\|X\| = 209{,}035m$
	80,239	16,085	
B			$\Sigma Y = -128{,}839m$
	80,626	-48,274	$\Sigma\|Y\| = 161{,}009m$
C			
	-48,170	-96,650	
D			

$$e_X = \Sigma X - (X_D - X_A) = 0{,}064m\ \text{(por exceso)}$$

$$e_Y = \Sigma Y - (Y_D - Y_A) = -0{,}089m\ \text{(por defecto)}$$

Hemos calculado también los sumatorios de los valores absolutos de las coordenadas parciales, que nos servirán para determinar el factor de compensación.

- Compensación de coordenadas parciales: se aplican las expresiones siguientes:

$$X_A^B = X_A^B\ \text{no compensado} - e_X \frac{|X_A^B|\ \text{no compensado}}{\Sigma|X|}$$

$$X_A{}^B = 80{,}214m$$

$$X_B{}^C = 80{,}601m$$

$$X_C{}^D = -48{,}185m$$

$$Y_A^B = Y_A^B\ \text{no compensado} - e_Y \frac{|Y_A^B|\ \text{no compensado}}{\Sigma|Y|}$$

$Y_A^B = 16{,}094m$
$Y_B^C = -48{,}247m$
$Y_C^D = -96{,}597m$

- Cálculo de las *Z* medias: en el caso de este ejercicio, la estación total calcula la *Z* de cada visual. Los valores obtenidos forman parte de los datos de campo. Calculamos las *Z* medias, a las que se afecta el signo correspondiente a los desniveles calculados en las visuales de frente:

$Z_A^B = -3{,}060m$ $Z_B^A = 3{,}055m$ valor medio: $Z_A^B = -3{,}057m$
$Z_B^C = -1{,}714m$ $Z_C^B = 1{,}716m$ valor medio: $Z_B^C = -1{,}715m$
$Z_C^D = 0{,}843m$ $Z_D^C = -0{,}837m$ valor medio: $Z_C^D = 0{,}840m$

- Error de cierre altimétrico: se calcula del mismo modo que los errores de cierre planimétricos:

	Z
A	
	-3,057
B	
	-1,715
C	
	0,840
D	

$\Sigma Z = -3{,}932m$
$\Sigma|Z| = 5{,}613m$

$e_Z = \Sigma Z - (Z_D - Z_A) = -0{,}042m$ (por defecto)

- Compensación de coordenadas parciales: se realiza del mismo modo que en planimetría:

$$Z_A^B = Z_A^B \text{ no compensado} - e_Z \frac{|Z_A^B| \text{ no compensado}}{\Sigma|Z|}$$

$Z_A^B = -3{,}034m$
$Z_B^C = -1{,}702m$
$Z_C^D = 0{,}847m$

- Coordenadas parciales compensadas y absolutas: las coordenadas absolutas se obtienen por arrastre, a partir de los valores conocidos de la primera estación A. Como comprobación, los valores calculados para la última estación deben coincidir con los conocidos.

<u>*Coordenadas parciales compensadas.*</u>

	X	Y	Z
A			
	80,214	16,094	-3,034
B			
	80,601	-48,247	-1,702
C			
	-48,185	-96,597	0,847
D			

La suma de coordenadas parciales compensadas debe coincidir con la coordenada parcial de *D* respecto a *A*, calculada a partir de los valores conocidos de las coordenadas absolutas de dichos puntos.

Coordenadas absolutas.

	X	Y	Z
A	1.523,62	2.724,41	297,32
B	1.603,834	2.740,504	294,286
C	1.684,435	2.692,256	292,583
D	1.636,25	2.595,66	293,43

Existen otros procedimientos para compensar errores de cierre en itinerarios, pero vamos a referirnos únicamente a los que se han aplicado en este ejercicio.

4.2) Se realizó un itinerario cerrado, siendo las coordenadas del punto de partida:

$$X_A = 985{,}577m \qquad Y_A = 1.096{,}719m \qquad Z_A = 166{,}607m$$

Para orientar el itinerario se visó a un punto, exterior a él, y de coordenadas:

$$X_P = 865{,}65m \qquad Y_P = 1.199{,}51m$$

Calcula las coordenadas compensadas X, Y y Z de las estaciones del itinerario, con los datos de la siguiente libreta de campo:

Estación	i	Punto	L. acimutal	L. cenital	D. natural	Ap
A	1,49	P	24,63	-	-	-
		E	263,92	99,25	70,527	1,49
		B	187,43	105,89	138,528	1,49
B	1,43	A	149,99	94,09	138,478	1,43
		C	59,79	96,72	124,846	1,43
C	1,51	B	332,99	103,17	124,833	1,51
		D	199,67	97,85	141,400	1,51
D	1,45	C	395,25	102,15	141,378	1,45
		E	340,37	98,70	115,153	1,45
E	1,47	D	4,80	101,50	115,191	1,47
		A	159,38	100,79	70,815	1,47

En itinerarios cerrados se hace coincidir la última estación con la primera. Puesto que sólo se conocen las coordenadas de una de las estaciones, para orientar el itinerario se precisa una visual adicional, a un punto de coordenadas conocidas exterior a éste. En el ejercicio que nos ocupa, el punto exterior es el *P* y en la visual lanzada a este punto tomaremos únicamente la lectura acimutal. Comparando la libreta de campo con la del ejercicio anterior, se pueden ver las diferencias entre itinerarios cerrados e itinerarios encuadrados.

- Cálculo del acimut de referencia: este acimut nos va a permitir orientar el itinerario.

$$\theta_A^P = 400 - arc\ tg\ \frac{|X_A - X_P|}{|Y_A - Y_P|} = 345,111^g$$

- Corrección de orientación: a partir del acimut de referencia calculamos la corrección de orientación en la primera estación *A*. La orientación se transmite a las restantes estaciones por el procedimiento que ya conocemos:

$$Cor_A = \theta_A^P - L_A^P = 345,111 - 24,63 = 320,481^g$$
$$\theta_A^E = L_A^E + Cor_A = 263,92 + 320,481 = 184,401^g$$
$$\theta_E^A = 384,401^g$$
$$\theta_A^B = L_A^B + Cor_A = 187,43 + 320,481 = 107,911^g$$
$$\theta_B^A = 307,911^g$$

$Cor_B = 157,921^g$	$\theta_B^C = 217,711^g$	$\theta_C^B = 17,711^g$
$Cor_C = -315,279^g$	$\theta_C^D = 284,391^g$	$\theta_D^C = 84,391^g$
$Cor_D = -310,859^g$	$\theta_D^E = 29,511^g$	$\theta_E^D = 229,511^g$
$Cor_E = 224,711^g$	$\theta_E^A = 384,091^g$	$\theta_A^E = 184,091^g$

- Error de cierre angular: en itinerarios cerrados el acimut trigonométrico es el correspondiente a la primera visual de espaldas, de la estación *A* a la estación *E*. El acimut topográfico corresponde a la última visual de frente, de *E* a *A*. Suponemos que el primero está exento de errores, mientras que el segundo incorpora todos los errores acimutales cometidos en el itinerario.

$$e_a = \theta_A^E{}_{topográfico} - \theta_A^E{}_{trigonométrico} = 184,091 - 184,401 = -0,310^g \text{ (por defecto)}$$

Como comprobación, calculamos la diferencia entre la suma de lecturas de visuales de frente y la de visuales de espaldas. Puesto que el punto *P* no pertenece al itinerario, la visual de *A* a *P* no debe incluirse en esta suma.

	L.Frente		L.Espalda
AB:	$187,43^g$	BA:	$149,99^g$
BC:	$59,79^g$	CB:	$332,99^g$
CD:	$199,67^g$	DC:	$395,25^g$
DE:	$340,37^g$	ED:	$4,80^g$
EA:	$159,38^g$	AE:	$263,92^g$
	946,64		1.146,95

$$e_a = 46,64 - 46,95 = -0,31^g \text{ (por defecto)}$$

- Compensación de acimutes: el factor de compensación se obtiene dividiendo el error de cierre por el número de estaciones del itinerario. Para compensar los acimutes tendremos en cuenta el signo del error de cierre:

$$f_c = -0,31/5 = -0,062^g$$
$$\theta_A^B = 107,911 - f_c = 107,973^g$$
$$\theta_B^C = 217,711 - 2\ f_c = 217,835^g$$
$$\theta_C^D = 284,391 - 3\ f_c = 284,577^g$$
$$\theta_D^E = 29,511 - 4\ f_c = 29,759^g$$
$$\theta_E^A = 384,091 - 5\ f_c = 384,401^g$$

El acimut topográfico, una vez compensado, debe coincidir con el recíproco del acimut trigonométrico.

- Distancias reducidas. En la libreta de campo figuran distancias naturales. Por tanto, aplicamos la expresión:

$$D = D_N \ \ sen\ \varphi$$

y, a continuación, calculamos la distancia promedio de cada tramo:

D_A^B = 137,936m	D_B^A = 137,882m	valor medio: D_{AB} = 137,909m
D_B^C = 124,680m	D_C^B = 124,678m	valor medio: D_{BC} = 124,679m
D_C^D = 141,319m	D_D^C = 141,297m	valor medio: D_{CD} = 141,308m
D_D^E = 115,129m	D_E^D = 115,159m	valor medio: D_{DE} = 115,144m
D_E^A = 70,810m	D_A^E = 70,522m	valor medio: D_{EA} = 70,666m

- Coordenadas parciales: se calculan con los valores medios de las distancias reducidas y con los acimutes compensados:

$$X_A^B = D_{AB}\ \ sen\ \theta_A^B \qquad Y_A^B = D_{AB}\ \ cos\ \theta_A^B$$

X_A^B = 136,828m	Y_A^B = -17,227m
X_B^C = -34,474m	Y_B^C = -119,818m
X_C^D = -137,182m	Y_C^D = -33,900m
X_D^E = 51,886m	Y_D^E = 102,791m
X_E^A = -17,142m	Y_E^A = 68,555m

- Error de cierre planimétrico: en un itinerario cerrado la última estación coincide con la primera. Por tanto, la suma de coordenadas parciales equivale a la coordenada parcial de la primera estación respecto a ella misma. Esta coordenada parcial debería ser nula, pero normalmente no lo será, debido a los errores cometidos. El valor no nulo de esta suma es, precisamente, el error de cierre.

	X	Y
A		
	136,828	-17,227
B		
	-34,474	-119,818
C		
	-137,182	-33,900
D		
	51,886	102,791
E		
	-17,142	68,555
A		

ΣX = -0,084m
$\Sigma|X|$ = 377,512m

ΣY = 0,401m
$\Sigma|Y|$ = 342,291m

e_X = -0,084m (por defecto)
e_Y = 0,401m (por exceso)

- Compensación de coordenadas parciales.

$$X_A^B = X_A^B\ no\ compensado - e_X\ \frac{|\,X_A^B\,|\ no\ compensado}{\Sigma\,|\,X\,|}$$

$$X_A^B = 136{,}859m$$
$$X_B^C = -34{,}466m$$
$$X_C^D = -137{,}151m$$
$$X_D^E = 51{,}897m$$
$$X_E^A = -17{,}139m$$

$$Y_A^B = Y_A^B \text{ no compensado} - e_Y \frac{|Y_A^B| \text{ no compensado}}{\Sigma|Y|}$$

$$Y_A^B = -17{,}247m$$
$$Y_B^C = -119{,}958m$$
$$Y_C^D = -33{,}940m$$
$$Y_D^E = 102{,}671m$$
$$Y_E^A = 68{,}474m$$

- Cálculo de las Z parciales: en todas las visuales coinciden la altura de prisma (*Ap*) y la altura de aparato (*i*). La expresión a aplicar es:

$$Z = t + i - Ap = D/tg\ \varphi + i - Ap$$

El desnivel coincide con *t* en todas las visuales. Calculamos el valor de las *Z* promedio, teniendo en cuenta que los dos valores calculados para cada tramo se refieren a sentidos contrarios. Por eso, antes de calcular la media, se cambia el signo de las *Z* que corresponden a visuales de espaldas.

$Z_A^B = -12{,}798m$	$Z_B^A = 12{,}837m$	valor medio: $Z_A^B = -12{,}818m$
$Z_B^C = 6{,}429m$	$Z_C^B = -6{,}213m$	valor medio: $Z_B^C = 6{,}321m$
$Z_C^D = 4{,}774m$	$Z_D^C = -4{,}774m$	valor medio: $Z_C^D = 4{,}774m$
$Z_D^E = 2{,}351m$	$Z_E^D = -2{,}714m$	valor medio: $Z_D^E = 2{,}533m$
$Z_E^A = -0{,}878m$	$Z_A^E = 0{,}831m$	valor medio: $Z_E^A = -0{,}855m$

- Error de cierre altimétrico: Se calcula como los errores de cierre planimétricos.

	Z
A	
	-12,818
B	
	6,321
C	
	4,774
D	
	2,533
E	
	-0,855
A	

$\Sigma Z = -0{,}044m$
$\Sigma|Z| = 27{,}301m$

$e_Z = -0{,}044m$ (por defecto)

- Compensación de coordenadas parciales.

$$Z_A^B = Z_A^B \text{ no compensado} - e_Z \frac{|Z_A^B| \text{ no compensado}}{\Sigma |Z|}$$

$$Z_A{}^B = -12{,}797m$$
$$Z_B{}^C = 6{,}331m$$
$$Z_C{}^D = 4{,}782m$$
$$Z_D{}^E = 2{,}537m$$
$$Z_E{}^A = -0{,}853m$$

- Coordenadas parciales compensadas y coordenadas absolutas:

<u>*Coordenadas parciales compensadas.*</u>

	X	Y	Z
A			
	136,859	-17,247	-12,797
B			
	-34,466	-119,958	6,331
C			
	-137,151	-33,940	4,782
D			
	51,897	102,671	2,537
E			
	-17,139	68,474	-0,853
A			

Los sumatorios de coordenadas parciales compensadas deben ser nulos en el caso de un itinerario cerrado.

<u>*Coordenadas absolutas.*</u>

	X	Y	Z
A	985,577	1.096,719	166,607
B	1.122,436	1.079,472	153,810
C	1.087,970	959,514	160,141
D	950,819	925,574	164,923
E	1.002,716	1.028,245	167,460
A	985,577	1.096,719	166,607

En este caso, la primera estación *A* coincide con la última y, si todos los cálculos son correctos, también deben coincidir sus coordenadas absolutas *X*, *Y* y *Z*.

4.3) ***Se ha realizado un itinerario encuadrado entre los puntos A y D, de coordenadas planas:*** $X_A = 1.742{,}171m$ $Y_A = 2.537{,}932m$

$X_D = 2.268{,}389m$ $Y_D = 2.526{,}535m$

Para orientar el itinerario se visó un vértice E, de coordenadas planas:

$X_E = 2.022{,}672m$ $Y_E = 2.760{,}336m$

Calcula los acimutes compensados de los tramos del itinerario, con los siguientes

datos de campo:

Estación	**Punto**	**Lectura acimutal**
A	**E**	**181,010**
	B	**256,661**
B	**A**	**301,876**
	C	**32,799**
C	**B**	**112,744**
	D	**346,353**
D	**C**	**191,487**
	E	**242,440**

Es un caso particular de itinerario encuadrado. Si las estaciones extremas *A* y *D* no son visibles entre si, podemos visar desde ambas un punto exterior *E* de coordenadas conocidas. La visual de *A* a *E* nos permite orientar el itinerario, mientras que con la de *D* a *E* calculamos el error de cierre acimutal.

- Cálculo de los acimutes de referencia.

$$\theta_A^E = arc\ tg \frac{|X_A - X_E|}{|Y_A - Y_E|} = 57,322^g$$

$$\theta_D^E = 400 - arc\ tg \frac{|X_D - X_E|}{|Y_D - Y_E|} = 348,418^g$$

- Corrección de orientación: se basa en el primer acimut de referencia que hemos calculado:

$$Cor_A = \theta_A^E - L_A^E = 57,322 - 181,010 = -123,688^g$$

$$\theta_A^B = L_A^B + Cor_A = 256,661 + (-123,688) = 132,973^g$$

$$\theta_B^A = 332,973^g$$

$$Cor_B = 31,097^g \qquad \theta_B^C = 63,896^g \qquad \theta_C^B = 263,896^g$$

$$Cor_C = 151,152^g \qquad \theta_C^D = 97,505^g \qquad \theta_D^C = 297,505^g$$

$$Cor_D = 106,018^g \qquad \theta_D^E = 348,458^g$$

- Error de cierre angular: el acimut topográfico será el correspondiente a la última visual de frente, en este caso de *D* a *E*. Para cuantificar el error de cierre, comparamos dicho acimut con el acimut trigonométrico correspondiente a la misma alineación, es decir, con el segundo acimut de referencia que hemos calculado.

$$e_a = \theta_D^E{}_{topográfico} - \theta_D^E{}_{trigonométrico} = 348,458 - 348,418 = 0,04^g \text{ (por exceso)}$$

En este caso no procede comprobar el error de cierre comparando la suma de lecturas acimutales de frente y de espaldas, ya que se visa también un punto exterior al itinerario.

- Compensación de acimutes: hay cuatro estaciones, puesto que el punto *E* no pertenece al itinerario.

$$f_c = 0,04/4 = 0,01^g$$

$$\theta_A^B = 132,973 - f_c = 132,963^g$$

$$\theta_B^C = 63,896 - 2\ f_c = 63,876^g$$

$$\theta_C^D = 97,505 - 3\ f_c = 97,475^g$$

$$\theta_D^E = 348,458 - 4\ f_c = 348,418^g$$

La forma de resolver este itinerario es similar a la de cualquier otro itinerario encuadrado, con la única particularidad de que tenemos dos acimutes calculados trigonométricamente. El primero, de *A* a *E*, se utiliza para orientar el itinerario y el segundo, de *D* a *E*, hace el papel de acimut trigonométrico y nos permite calcular el error de cierre.

4.4) Se ha realizado un itinerario apoyado en dos vértices 1 y 4. Como estos vértices no eran visibles entre sí, al estacionar en cada uno de ellos se orientó el taquímetro al Norte magnético, con ayuda de una declinatoria cuya declinación es 7,50 ^{g} (occidental). Calcula los acimutes compensados de los tramos del itinerario, con los siguientes datos de campo:

Estación	Punto visado	Lectura acimutal
1	N.M.	$0,00^g$
	2	$57,82^g$
2	1	$292,36^g$
	3	$147,57^g$
3	2	$119,23^g$
	4	$268,44^g$
4	3	$262,84^g$
	N.M.	$0,00^g$

Se trata de un itinerario encuadrado, similar al anterior, en el cual, en lugar de visar un vértice exterior desde las dos estaciones extremas, orientamos el taquímetro al Norte magnético.

- Cálculo del acimut de referencia: la primera visual de espaldas es la lanzada desde la primera estación *1* al Norte magnético. Puesto que la declinación es occidental, el acimut de esta visual vale:

$$\theta_1^{NM} = 400 - \delta = 400^g - 7,50 = 392,50^g$$
$$\theta_4^{NM} = 392,50^g$$

- Corrección de orientación.

$$Cor_1 = \theta_1^{NM} - L_1^{NM} = 392,50 - 0,00 = 392,50^g$$
$$\theta_1^2 = L_1^2 + Cor_1 = 57,82 + 392,50 = 450,32 = 50,32^g$$
$$\theta_2^1 = 250,32^g$$
$$Cor_2 = -42,04^g \qquad \theta_2^3 = 105,53^g \qquad \theta_3^2 = 305,53^g$$
$$Cor_3 = 186,30^g \qquad \theta_3^4 = 54,74^g \qquad \theta_4^3 = 254,74^g$$
$$Cor_4 = -8,10^g \qquad \theta_4^{NM} = 391,90^g$$

- Error de cierre angular: determinamos el error de cierre en la última visual de frente, desde la estación *4* al Norte magnético, de forma similar a la que empleamos en el ejercicio anterior:

$$e_a = \theta_4{}^{NM}{}_{topográfico} - \theta_4{}^{NM}{}_{trigonométrico} = 391,90 - 392,50 = -0,60^g \text{ (por defecto)}$$

- Compensación de acimutes.

$$f_c = -0,60/4 = -0,15^g$$
$$\theta_1^{\,2} = 50,32 - f_c = 50,47^g$$
$$\theta_2^{\,3} = 105,53 - 2\,f_c = 105,83^g$$
$$\theta_3^{\,4} = 54,74 - 3\,f_c = 55,19^g$$
$$\theta_4^{\,NM} = 391,90 - 4\,f_c = 392,50^g$$

4.5) Con un taquímetro G.C.D., analatismo central y K=100 se realizó un itinerario encuadrado entre los vértices A y F.

$X_A = 812,66m$ $Y_A = 934,25m$ $Z_A = 39,65m$

$X_F = 552,11m$ $Y_F = 638,96m$ $Z_F = 32,46m$

Calcula las coordenadas absolutas compensadas de las estaciones visadas, sabiendo que el instrumento se orientó al Norte verdadero en todas las estaciones, con los datos de la siguiente libreta de campo:

Estación	***i***	***Punto***	***L.Acimutal***	***L.Cenital***	***L.Mira***
A	***1,35***	***B***	***155,72***	***103,37***	***1,022-1,702-2,382***
B	***1,42***	***A***		***96,22***	***1,217-1,898-2,579***
		C	***237,39***	***99,62***	***0,964-1,589-2,214***
C	***1,39***	***B***		***99,81***	***1,735-2,361-2,987***
		D	***217,66***	***102,73***	***0,486-1,119-1,752***
D	***1,44***	***C***		***97,10***	***1,446-2,080-2,714***
		E	***329,44***	***98,89***	***0,320-1,100-1,880***
E	***1,40***	***D***		***101,27***	***0,578-1,351-2,124***
		F	***279,42***	***98,63***	***1,469-2,018-2,567***
F	***1,37***	***E***		***100,21***	***2,209-2,759-3,309***
		A	***46,15***	***-***	***-***

Para orientar el taquímetro en cada estación se materializa la base formada por dicha estación y la estación anterior. El acimut del tramo formado por las dos estaciones se habrá calculado previamente y la orientación se realiza a partir del acimut recíproco del anterior. En la libreta de campo, las lecturas de frente son acimutes. No figuran en dicha libreta las lecturas acimutales de las visuales de espaldas, puesto que estas lecturas corresponden a los acimutes recíprocos de los anteriores. Por ejemplo, la lectura de *D* a *C* sería:

$$L_D^{\,C} = \theta_D^{\,C} = 217,66 \pm 200^g = 17,66^g$$

Aunque todas las lecturas acimutales sean acimutes, estos acimutes incorporan los errores cometidos en el itinerario. Por lo tanto, existirá un error de cierre que es preciso compensar.

- Cálculo del acimut trigonométrico.

$$\theta_A^F = 200 + arc\ tg\,\frac{|\,X_A - X_F\,|}{|\,Y_A - Y_F\,|} = 246,026^g$$
$$\theta_F^{\,A} = 46,026^g$$

- Error de cierre angular: la corrección de orientación es nula en todas las estaciones. En este caso, el acimut topográfico corresponde a la lectura acimutal tomada en la última visual de frente. El error de cierre se calcula por el procedimiento habitual:

$e_a = \theta_F^A{}_{topográfico} - \theta_F^A{}_{trigonométrico} = 46,15 - 46,026 = 0,124^g$ (por exceso)

- Compensación de acimutes.

$$f_c = 0,124/6 = 0,021^g$$
$$\theta_A^B = 155,72 - f_c = 155,699^g$$
$$\theta_B^C = 237,39 - 2\, f_c = 237,349^g$$
$$\theta_C^D = 217,66 - 3\, f_c = 217,598^g$$
$$\theta_D^E = 329,44 - 4\, f_c = 329,358^g$$
$$\theta_E^F = 279,42 - 5\, f_c = 279,317^g$$
$$\theta_F^A = 46,15 - 6\, f_c = 46,026^g$$

- Distancias reducidas.

$$D = (L_s - L_i)\, K\, sen^2\, \varphi$$

$D_A^B = 135,619m$	$D_B^A = 135,720m$	valor medio: $D_{AB} = 135,670m$
$D_B^C = 124,996m$	$D_C^B = 125,199m$	valor medio: $D_{BC} = 125,097m$
$D_C^D = 126,367m$	$D_D^C = 126,537m$	valor medio: $D_{CD} = 126,452m$
$D_D^E = 155,953m$	$D_E^D = 154,538m$	valor medio: $D_{DE} = 155,246m$
$D_E^F = 109,749m$	$D_F^E = 109,999m$	valor medio: $D_{EF} = 109,874m$

- Coordenadas parciales.

$X_A^B = D_{AB}\, sen\, \theta_A^B$	$Y_A^B = D_{AB}\, cos\, \theta_A^B$
$X_A^B = 86,972m$	$Y_A^B = -104,126m$
$X_B^C = -69,253m$	$Y_B^C = -104,179m$
$X_C^D = -34,512m$	$Y_C^D = -121,652m$
$X_D^E = -139,029m$	$Y_D^E = 69,080m$
$X_E^F = -104,126m$	$Y_E^F = -35,072m$

- Error de cierre planimétrico.

	X	Y
A		
	86,972	-104,126
B		
	-69,253	-104,179
C		
	-34,512	-121,652
D		
	-139,029	69,080
E		
	-104,126	-35,072

$\Sigma X = -259,948m$
$\Sigma|X| = 433,892m$

$\Sigma Y = -295,949m$
$\Sigma|Y| = 434,109m$

$e_X = \Sigma X - (X_F - X_A) = 0,602m$ (por exceso)
$e_Y = \Sigma Y - (Y_F - Y_A) = -0,659m$ (por defecto)

- Compensación de coordenadas parciales.

$$X_A^B = X_A^B \text{ no compensado } - e_X \frac{|X_A^B| \text{ no compensado}}{\Sigma|X|}$$

$$X_A^B = 86{,}851m$$
$$X_B^C = -69{,}349m$$
$$X_C^D = -34{,}560m$$
$$X_D^E = -139{,}222m$$
$$X_E^F = -104{,}270m$$

$$Y_A^B = Y_A^B \text{ no compensado} - e_Y \frac{|Y_A^B| \text{ no compensado}}{\Sigma|Y|}$$

$$Y_A^B = -103{,}968m$$
$$Y_B^C = -104{,}021m$$
$$Y_C^D = -121{,}467m$$
$$Y_D^E = 69{,}185m$$
$$Y_E^F = -35{,}019m$$

- Cálculo de las Z parciales.

$$t_A^B = D_A^B / tg\,\varphi_A^B$$

$t_A^B = -7{,}186m$	$t_B^A = 8{,}068m$
$t_B^C = 0{,}746m$	$t_C^B = 0{,}374m$
$t_C^D = -5{,}422m$	$t_D^C = 5{,}768m$
$t_D^E = 2{,}719m$	$t_E^D = -3{,}083m$
$t_E^F = 2{,}362m$	$t_F^E = -0{,}363m$

$$Z_A^B = t_A^B + i_A - m_B$$

$Z_A^B = -7{,}538m$	$Z_B^A = 7{,}590m$	valor medio: $Z_A^B = -7{,}564m$
$Z_B^C = 0{,}577m$	$Z_C^B = -0{,}597m$	valor medio: $Z_B^C = 0{,}587m$
$Z_C^D = -5{,}151m$	$Z_D^C = 5{,}128m$	valor medio: $Z_C^D = -5{,}140m$
$Z_D^E = 3{,}059m$	$Z_E^D = -3{,}034m$	valor medio: $Z_D^E = 3{,}047m$
$Z_E^F = 1{,}744m$	$Z_F^E = -1{,}752m$	valor medio: $Z_E^F = 1{,}748m$

- Error de cierre altimétrico.

	Z
A	
	-7,564
B	
	0,587
C	
	-5,140
D	
	3,047
E	
	1,748
F	

$\Sigma Z = -7{,}321m$
$\Sigma|Z| = 18{,}086m$

$$e_Z = \Sigma Z - (Z_F - Z_A) = -0{,}131m \text{ (por defecto)}$$

- Compensación de coordenadas parciales.

$$Z_A^B = Z_A^B \text{ no compensado} - e_Z \frac{|Z_A^B| \text{ no compensado}}{\Sigma |Z|}$$

$$Z_A^B = -7{,}509m$$
$$Z_B^C = 0{,}591m$$
$$Z_C^D = -5{,}102m$$
$$Z_D^E = 3{,}069m$$
$$Z_E^F = 1{,}761m$$

- Coordenadas parciales compensadas:

	X	Y	Z
A			
	86,851	-103,968	-7,509
B			
	-69,349	-104,021	0,591
C			
	-34,560	-121,467	-5,102
D			
	-139,222	69,185	3,069
E			
	-104,270	-35,019	1,761
F			

- Coordenadas absolutas:

	X	Y	Z
A	812,66	934,25	39,65
B	899,511	830,282	32,141
C	830,162	726,261	32,733
D	795,603	604,794	27,630
E	656,381	673,979	30,699
F	552,11	638,96	32,46

En un itinerario realizado orientando el instrumento en todas las estaciones, la corrección de orientación es nula pero no lo es el error de cierre.

4.6) Se ha realizado un itinerario encuadrado con cuatro estaciones A, B, C y D. Como las estaciones extremas no eran visibles entre si, desde A se visó un vértice V1 y desde D a otro vértice V2. Calcula los acimutes compensados de los tramos del itinerario, con los siguientes datos:

$X_A = 5.545{,}132m$ $Y_A = 7.284{,}764m$

$X_D = 6.082{,}443m$ $Y_D = 6.921{,}348m$

$$X_{V1} = 4.918,008m \quad Y_{V1} = 8.637,828m$$
$$X_{V2} = 3.124,202m \quad Y_{V2} = 5.517,368m$$

Datos de campo:

Estación	Punto	L.Acimutal
A	V1	$25,34^g$
	B	$120,85^g$
B	A	$313,59^g$
	C	$185,80^g$
C	B	$128,77^g$
	D	$379,81^g$
D	C	$247,95^g$
	V2	$128,57^g$

Como hemos visto anteriormente, la visual de *A* a *V1* se emplea para orientar el itinerario y la de *D* a *V2* para calcular el acimut topográfico y el error de cierre.

- Cálculo de los acimutes de referencia:

$$\theta_A^{V1} = 300 + arc\ tg\ \frac{|Y_{V1} - Y_A|}{|X_{V1} - X_A|} = 372,370^g$$

$$\theta_D^{V2} = 200 + arc\ tg\ \frac{|X_{V2} - X_D|}{|Y_{V2} - Y_D|} = 271,790^g$$

El primero nos va a permitir orientar el itinerario. El segundo será el acimut trigonométrico.

- Corrección de orientación:

$$Cor_A = \theta_A^{V1} - L_A^{V1} = 372,370 - 25,34 = 347,03^g$$
$$\theta_A^{B} = L_A^{B} + Cor_A = 120,85 + 347,03 = 67,88^g$$
$$\theta_B^{A} = 267,88^g$$
$$Cor_B = -45,71^g \qquad \theta_B^{C} = 140,09^g \qquad \theta_C^{B} = 340,09^g$$
$$Cor_C = 211,32^g \qquad \theta_C^{D} = 191,13^g \qquad \theta_D^{C} = 391,13^g$$
$$Cor_D = 143,18^g \qquad \theta_D^{V2} = 271,75^g$$

- Error de cierre angular: lo materializamos, como habitualmente, en la última visual de frente:

$$e_a = \theta_D{}^{V2}{}_{topográfico} - \theta_D{}^{V2}{}_{trigonométrico} = 271,75 - 271,79 = -0,04^g \text{ (por defecto)}$$

- Compensación de acimutes:

$$f_c = -0,04/4 = -0,01^g$$
$$\theta_A^{B} = 67,88 - f_c = 67,89^g$$
$$\theta_B^{C} = 140,09 - 2\ f_c = 140,11^g$$
$$\theta_C^{D} = 191,13 - 3\ f_c = 191,16^g$$
$$\theta_D^{V2} = 271,75 - 4\ f_c = 271,79^g$$

4.7) Con una estación total se realizó un itinerario encuadrado entre los vértices 1 y 4.

$$X_1 = 2.105,41m \qquad Y_1 = 1.740,12m \qquad Z_1 = 8,326m$$
$$X_4 = 2.083,29m \qquad Y_4 = 2.057,36m \qquad Z_4 = 8,026m$$

Como los vértices no eran visibles entre si, desde ambos se visó a un tercer vértice A, de coordenadas:

$$X_A = 2.695,64m \qquad Y_A = 2.087,94m$$

Calcula las coordenadas compensadas X, Y y Z de las estaciones del itinerario, con los datos de la siguiente libreta de campo.

Estación	i	Punto	L.Acimutal	L.Cenital	D.Natural	A.Prisma
1	1,54	A	186,822	-	-	-
		2	151,244	101,567	158,333	1,60
2	1,62	1	78,550	98,433	158,334	1,60
		3	181,559	98,861	91,373	1,60
3	1,62	2	97,427	101,139	91,379	1,60
		4	356,086	99,022	131,968	1,60
4	1,61	3	146,312	100,978	131,978	1,60
		A	50,970	-	-	-

Como sabemos, la visual desde la primera estación *1* al vértice *A* se emplea para orientar el itinerario, mientras que la visual desde la última estación *4* al mismo vértice nos da el acimut topográfico.

- Cálculo de los acimutes de referencia:

$$\theta_1^A = arc\ tg\ \frac{|X_A - X_1|}{|Y_A - Y_1|} = 66,099^g$$

$$\theta_4^A = arc\ tg\ \frac{|X_A - X_4|}{|Y_A - Y_4|} = 96,823^g$$

El primero nos permite orientar el itinerario; el segundo es el acimut trigonométrico.

- Corrección de orientación.

$$Cor_1 = \theta_1^A - L_1^A = -120,723^g$$

$$\theta_1^2 = L_1^2 + Cor_1 = 30,521^g$$

$$\theta_2^1 = 230,521^g$$

$$Cor_2 = 151,971^g \qquad \theta_2^3 = 333,530^g \qquad \theta_3^2 = 133,530^g$$

$$Cor_3 = 36,103^g \qquad \theta_3^4 = 392,189^g \qquad \theta_4^3 = 192,189^g$$

$$Cor_4 = 45,877^g \qquad \theta_4^A = 96,847^g$$

- Error de cierre angular.

$$e_a = \theta_4^A{}_{topográfico} - \theta_4^A{}_{trigonométrico} = 0,024^g \text{ (por exceso)}$$

- Compensación de acimutes.

$$f_c = 0,024/4$$

$$\theta_1^2 = 30,521 - f_c = 30,515^g$$

$$\theta_2^3 = 333,530 - 2\ f_c = 333,518^g$$

$$\theta_3^4 = 392,189 - 3\ f_c = 392,171^g$$

$$\theta_4^A = 96,847 - 4\ f_c = 96,823^g$$

- Distancias reducidas.

$$D = D_N\ sen\ \varphi$$

$D_1^2 = 158{,}285m$ $D_2^1 = 158{,}286m$ valor medio: $D_{12} = 158{,}286m$
$D_2^3 = 91{,}358m$ $D_3^2 = 91{,}364m$ valor medio: $D_{23} = 91{,}361m$
$D_3^4 = 131{,}952m$ $D_4^3 = 131{,}962m$ valor medio: $D_{34} = 131{,}957m$

- Coordenadas parciales.

$X_1^2 = D_{12}\ sen\ \theta_1^2$ $Y_1^2 = D_{12}\ cos\ \theta_1^2$
$X_1^2 = 72{,}999m$ $Y_1^2 = 140{,}447m$
$X_2^3 = -78{,}988m$ $Y_2^3 = 45{,}910m$
$X_3^4 = -16{,}187m$ $Y_3^4 = 130{,}961m$

- Error de cierre planimétrico.

	X	Y
1		
	72,999	140,447
2		
	-78,988	45,910
3		
	-16,187	130,961
4		

$\Sigma X = -22{,}175m$
$\Sigma|X| = 168{,}174m$
$\Sigma Y = 317{,}319m$
$\Sigma|Y| = 317{,}319m$

$e_X = \Sigma X - (X_4 - X_1) = -0{,}055m$ (por defecto)
$e_Y = \Sigma Y - (Y_4 - Y_1) = 0{,}079m$ (por exceso)

- Compensación de coordenadas parciales: Empleamos las expresiones:

$$X_1^2 = X_1^2\ no\ compensado - e_X \frac{|X_1^2|\ no\ compensado}{\Sigma|X|}$$

$X_1^2 = 73{,}023m$
$X_2^3 = -78{,}962m$
$X_3^4 = -16{,}181m$

$$Y_1^2 = Y_1^2\ no\ compensado - e_Y \frac{|Y_1^2|\ no\ compensado}{\Sigma|Y|}$$

$Y_1^2 = 140{,}412m$
$Y_2^3 = 45{,}899m$
$Y_3^4 = 130{,}929m$

- Cálculo de las *Z* parciales: para el cálculo de las tangentes topográficas empleamos, como siempre, los valores tal cual de las distancias reducidas, no su valor medio.

$$Z_1^2 = D_1^2/tg\ \varphi_1^2 + i_1 - Ap_2$$

Cada desnivel medio va afectado, como sabemos, del signo correspondiente al calculado en la visual de frente.

$Z_1^2 = -3{,}957m$ $Z_2^1 = 3{,}917m$ valor medio: $Z_1^2 = -3{,}937m$
$Z_2^3 = 1{,}655m$ $Z_3^2 = -1{,}615m$ valor medio: $Z_2^3 = 1{,}635m$
$Z_3^4 = 2{,}047m$ $Z_4^3 = -2{,}017m$ valor medio: $Z_3^4 = 2{,}032m$

- Error de cierre altimétrico:

	Z
1	
	-3,937
2	
	1,635
3	
	2,032
4	

$\Sigma Z = -0{,}270m$
$\Sigma|Z| = 7{,}604m$

$$e_Z = \Sigma Z - (Z_4 - Z_1) = 0{,}030m \text{ (por exceso)}$$

- Compensación de coordenadas parciales:

$$Z_1^2 = Z_1^2 \text{ no compensado } - e_Z \frac{|Z_1^2| \text{ no compensado}}{\Sigma |Z|}$$

$$Z_1^2 = -3{,}953m$$
$$Z_2^3 = 1{,}628m$$
$$Z_3^4 = 2{,}024m$$

- Coordenadas parciales compensadas y coordenadas absolutas:

Coordenadas parciales compensadas.

	X	Y	Z
1			
	73,023	140,412	-3,953
2			
	-78,962	45,899	1,628
3			
	-16,181	130,929	2,024
4			

Coordenadas absolutas.

	X	Y	Z
1	2.105,41	1.740,12	8,326
2	2.178,433	1.880,532	4,373
3	2.099,471	1.926,431	6,002
4	2.083,29	2.057,36	8,026

5. MÉTODOS PLANIMÉTRICOS: INTERSECCIÓN

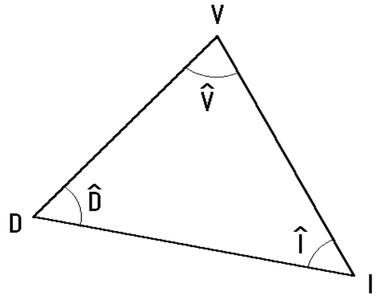
5.1) Calcula las coordenadas del vértice V en una intersección directa, conocidas las de los otros dos vértices D e I y los ángulos indicados:

$X_D = 1.000m \quad Y_D = 1.000m$

$X_I = 2.500m \quad Y_I = 750m$

Angulo VDI = $\hat{D} = 61{,}70^g$

Angulo VID = $\hat{I} = 76{,}37^g$



Las denominaciones de los vértices, *D*, *I*, *V*, nos indican en qué posición se encuentra el vértice *V* respecto a los vértices conocidos *D* e *I*. En efecto, si nos situamos en *V*, el vértice *D* será el que queda a la derecha y el *I* el que queda a la izquierda. La situación aproximada del vértice *V* es, por tanto, la que se muestra en el croquis adjunto.

- Cálculo de la distancia y acimut de la base *DI*: se calculan a partir de las coordenadas conocidas de los dos vértices:

$$D_{DI} = \sqrt{(X_D - X_I)^2 + (Y_D - Y_I)^2} = 1.520{,}691m$$

$$\theta_D^I = 100 + arc\ tg\ \frac{|Y_D - Y_I|}{|X_D - X_I|} = 110{,}514^g$$

Calculamos también el acimut recíproco:

$$\theta_I^D = 310{,}514^g$$

- Cálculo del ángulo $\hat{V}$: en este caso podemos calcular el valor de forzando la condición:

$$\hat{D} + \hat{I} + \hat{V} = 200^g \qquad \Rightarrow \qquad \hat{V} = 61{,}93^g$$

- Cálculo de la distancia y acimut de las alineaciones *DV* e *IV*: aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{D_{DV}}{sen\,\hat{I}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{DV} = 1.714{,}697m$$

$$\frac{D_{IV}}{sen\,\hat{D}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{IV} = 1.516{,}938m$$

Para el cálculo de los acimutes, tal como se deduce del croquis:

$$\theta_D^V = \theta_D^I - \hat{D} = 48{,}814^g$$

$$\theta_I^V = \theta_I^D + \hat{I} = 386{,}884^g$$

- Coordenadas del punto *V*: se calculan fácilmente con las expresiones que conocemos:

$$X_V = X_D + X_D^V = X_D + D_{DV}\ sen\ \theta_D^V = 2.189{,}671m$$

$$Y_V = Y_D + Y_D^V = Y_D + D_{DV}\ cos\ \theta_D^V = 2.234{,}856m$$

$$X_V = X_I + X_I^V = X_I + D_{IV}\ sen\ \theta_I^V = 2.189{,}671m$$

$$Y_V = Y_I + Y_I^V = Y_I + D_{IV}\ \cos\theta_I^V = 2.234,856m$$

Es conveniente calcular las coordenadas de *V* a partir de las de *D* y también a partir de las de *I*, tal como hemos hecho. De esta forma se puede comprobar que los cálculos son correctos.

5.2) Conocidas las coordenadas de dos puntos D e I, se estacionó en cada uno de ellos y se visó al otro punto y a un tercer punto V.

Coordenadas:

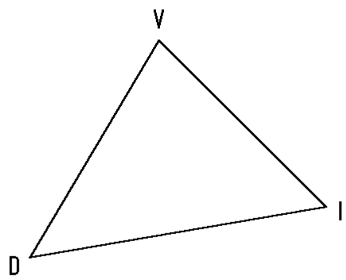
$$X_I = 678.244,5m \qquad Y_I = 4.163.577,7m$$
$$X_D = 673.069,3m \qquad Y_D = 4.162.083,3m$$

Datos de campo:

Est.	Pto.	L.Acimutal
D	V	$47,5982^g$
	I	$100,7955^g$
I	D	$354,0332^g$
	V	$23,9577^g$

Calcula las coordenadas planas del punto V.

La situación aproximada del vértice *V* se deduce tal como explicamos en el ejercicio anterior. De las dos posibles posiciones, *V* al Norte o *V* al Sur, la correcta es la primera, puesto que de esa forma *D* queda a la derecha e *I* a la izquierda de *V*.



- Cálculo de la distancia y acimut de la base.

$$D_{DI} = \sqrt{(X_D - X_I)^2 + (Y_D - Y_I)^2} = 5.386,6433m$$

$$\theta_D^I = arc\ tg\ \frac{|X_D - X_I|}{|Y_D - Y_I|} = 82,1037^g$$

$$\theta_I^D = 282,1037^g$$

- Cálculo del ángulo $\hat{V}$: en esta ocasión no se nos dan los ángulos, sino las lecturas efectuadas con un goniómetro:

$$\hat{D} = L_D^I - L_D^V = 53,1973^g$$
$$\hat{I} = L_I^V - L_I^D = -330,0755^g = 69,9245^g$$

Los ángulos se calculan por diferencia de lecturas. Situados, por ejemplo, en *D*, restamos de la lectura correspondiente al vértice que queda a su derecha (*I*) la del vértice que queda a su izquierda (*V*). Operamos de igual forma para calcular el ángulo $\hat{I}$. Si el resultado es un valor negativo, le sumamos 400^g. Estos valores negativos se dan cuando, al tomar las lecturas, la división cero del limbo acimutal, que es el origen en lecturas angulares, queda en una posición intermedia entre las dos visuales.

Para calcular el tercer ángulo , hacemos:

$$\hat{D} + \hat{I} + \hat{V} = 200^g \qquad \Rightarrow \qquad \hat{V} = 76,8782^g$$

- Cálculo de la distancia y acimut de las alineaciones DV e IV: aplicando el teorema del seno:

$$\frac{D_{DV}}{sen\,\hat{I}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{DV} = 5.131,3704m$$

$$\frac{D_{IV}}{sen\,\hat{D}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{IV} = 4.274,1659m$$

Los acimutes se calculan:

$$\theta_D^V = \theta_D^I - \hat{D} = 28,9064^g$$

$$\theta_I^V = \theta_I^D + \hat{I} = 352,0282^g$$

tal como se deduce de la figura.

- Coordenadas del punto *V*: las calculamos a partir de los dos vértices conocidos, para poder comprobar los resultados:

$$X_V = X_D + X_D^V = X_D + D_{DV}\ \ sen\ \theta_D^V = 675.320,011m$$

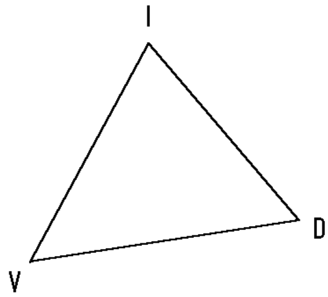
$$Y_V = Y_D + Y_D^V = Y_D + D_{DV}\ \ cos\ \theta_D^V = 4.166.694,727m$$

$$X_V = X_I + X_I^V = X_I + D_{IV}\ \ sen\ \theta_I^V = 675.320,011m$$

$$Y_V = Y_I + Y_I^V = Y_I + D_{IV}\ \ cos\ \theta_I^V = 4.166.694,727m$$

5.3) ***Se ha estacionado un teodolito G.C.D. en los vértices V, D, e I y, sin orientarlo, se obtuvieron las siguientes lecturas acimutales:***

Est.	***Pto.***	***L.Acimutal***
I	***D***	***87,653***
	V	***166,914***
D	***V***	***207,593***
	I	***275,547***
V	***I***	***199,950***
	D	***252,738***



Dadas las coordenadas planas de I y D, calcula las coordenadas compensadas del vértice V.

$$\boldsymbol{X_I = 4.500m \quad Y_I = 7.000m}$$

$$\boldsymbol{X_D = 5.000m \quad Y_D = 5.000m}$$

La situación del vértice *V* se deduce como en los ejercicios anteriores.

- Cálculo de la distancia y acimut en la base.

$$D_{DI} = \sqrt{(X_D - X_I)^2 + (Y_D - Y_I)^2} = 2.061,553m$$

$$\theta_I^D = 200 - arc\ tg\ \frac{|X_D - X_I|}{|Y_D - Y_I|} = 184,404^g$$

$$\theta_D^I = 384,404^g$$

- Cálculo del ángulo $\hat{V}$: en intersección directa es habitual estacionar en los tres vértices y medir los tres ángulos del triángulo *DIV*. Esto permite determinar el error de cierre cometido y, si es admisible, compensarlo.

$$\hat{D}_{\ (sin\ compensar)} = L_D^I - L_D^V = 67,954^g$$

$$\hat{I}_{\ (sin\ compensar)} = L_I^V - L_I^D = 79,261^g$$

$$\hat{V}_{\ (sin\ compensar)} = L_V^D - L_V^I = 52,788^g$$

Hemos calculado los ángulos a partir de las lecturas acimutales, tal como vimos en el ejercicio anterior. A continuación, aplicamos la condición geométrica siguiente:

$$\hat{D} + \hat{I} + \hat{V} = 200^g:$$

$$\hat{D} + \hat{I} + \hat{V} = 200{,}003^g \qquad \Rightarrow \qquad e_a = 0{,}003^g \text{ (por exceso)}$$

- Ángulos compensados: el error de cierre se reparte por igual entre los tres ángulos: $f_c = e_a/3 = 0{,}001^g$

$$\hat{D} = \hat{D}_{\text{(sin compensar)}} - f_c = 67{,}953^g$$

$$\hat{I} = \hat{I}_{\text{(sin compensar)}} - f_c = 79{,}260^g$$

$$\hat{V} = \hat{V}_{\text{(sin compensar)}} - f_c = 52{,}787^g$$

En lo que sigue, utilizaremos los valores compensados de los ángulos.

- Cálculo de la distancia y acimut de las alineaciones *DV* e *IV*: para las distancias aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{D_{DV}}{sen\,\hat{I}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{DV} = 2.648{,}741m$$

$$\frac{D_{IV}}{sen\,\hat{D}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{IV} = 2.448{,}982m$$

El cálculo de los acimutes se deduce de la figura:

$$\theta_D^V = \theta_D^I - \hat{D} = 316{,}451^g$$

$$\theta_I^V = \theta_I^D + \hat{I} = 263{,}664^g$$

Hemos empleado para el cálculo los valores compensados de los ángulos $\hat{D}$ e $\hat{I}$.

- Coordenadas del punto *V*: las calculamos a partir de los dos vértices, *D* e *I*, para comprobar los resultados.

$$X_V = X_D + X_D^V = X_D + D_{DV}\ sen\,\theta_D^V = 2.439{,}207m$$

$$Y_V = Y_D + Y_D^V = Y_D + D_{DV}\ cos\,\theta_D^V = 5.676{,}880m$$

$$X_V = X_I + X_I^V = X_I + D_{IV}\ sen\,\theta_I^V = 2.439{,}207m$$

$$Y_V = Y_I + Y_I^V = Y_I + D_{IV}\ cos\,\theta_I^V = 5.676{,}880m$$

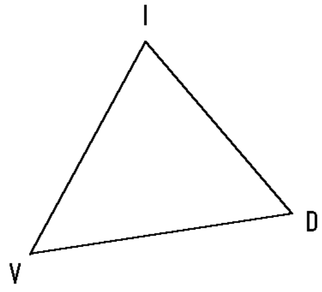
5.4) Calcula las coordenadas compensadas del vértice V de una intersección directa, conociendo las coordenadas de los otros vértices D e I:

$$X_D = 5.827{,}331m \qquad Y_D = 3.592{,}853m$$

$$X_I = 4.988{,}649m \qquad Y_I = 4.201{,}567m$$

y las lecturas efectuadas con un teodolito al estacionar en cada uno de los tres vértices y visar a los otros dos:

Estación	***Punto visado***	***Lectura acimutal***
D	***V***	***183º27'***
	I	***245º53'***
I	***D***	***329º12'***
	V	***40º31'***
V	***I***	***112º07'***
	D	***158º25'***



Determinamos la posición de *V* como en los ejercicios anteriores.

- Cálculo de la distancia y acimut de la base:

$$D_{DI} = \sqrt{(X_D - X_I)^2 + (Y_D - Y_I)^2} = 1.036,301m$$

$$\theta_I^D = 90^o + arc\ tg \frac{|Y_D - Y_I|}{|X_D - X_I|} = 125,972^o = 125^o\ 58'19,497''$$

$$\theta_D^I = 305,972^o = 305^o 58'19,497''$$

- Cálculo de los ángulos interiores al triángulo:

$$\hat{D}_{\ (sin\ compensar)} = L_D^I - L_D^V = 62^o 26'$$

$$\hat{I}_{\ (sin\ compensar)} = L_I^V - L_I^D = 71^o 19'$$

$$\hat{V}_{\ (sin\ compensar)} = L_V^D - L_V^I = 46^o 18'$$

Si alguno de los valores es negativo, como sucede con el ángulo $\hat{I}$, le sumamos 360^o. Calculamos el error de cierre forzando la condición geométrica que se indicó en el ejercicio anterior:

$$\hat{D} + \hat{I} + \hat{V} = 180^o 03' \qquad \Rightarrow \qquad e_a = 03'\ (por\ exceso)$$

- Ángulos compensados:

$$f_c = e_a/3 = 1'$$

$$\hat{D} = \hat{D}_{\ (sin\ compensar)} - f_c = 62^o 25' = 62,417^o$$

$$\hat{I} = \hat{I}_{\ (sin\ compensar)} - f_c = 71^o 18' = 71,300^o$$

$$\hat{V} = \hat{V}_{\ (sin\ compensar)} - f_c = 46^o 17' = 46,283^o$$

- Cálculo de la distancia y acimut de las alineaciones *DV* e *IV*:

$$\frac{D_{DV}}{sen\,\hat{I}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{DV} = 1.358,109m$$

$$\frac{D_{IV}}{sen\,\hat{D}} = \frac{D_{DI}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{IV} = 1.270,831m$$

$$\theta_D^V = \theta_D^I - \hat{D} = 243^o 33'19,497'' = 243,555^o$$

$$\theta_I^V = \theta_I^D + \hat{I} = 197^o 16'19,497'' = 197,272^o$$

- Coordenadas del punto *V*:

$$X_V = X_D + X_D^V = X_D + D_{DV}\ sen\ \theta_D^V = 4.611,327m$$

$$Y_V = Y_D + Y_D^V = Y_D + D_{DV}\ cos\ \theta_D^V = 2.988,044m$$

$$X_V = X_I + X_I^V = X_I + D_{IV}\ sen\ \theta_I^V = 4.611,327m$$

$$Y_V = Y_I + Y_I^V = Y_I + D_{IV}\ cos\ \theta_I^V = 2.988,044m$$

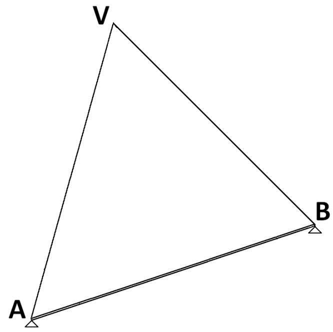
5.5) Conocidas las coordenadas de dos vértices A y B, se estacionó un teodolito en cada uno de ellos y también en un tercer punto, V, del que se deben calcular las coordenadas absolutas. El punto V está situado al norte de los vértices A y B. Para mejorar la precisión se realizaron 3 repeticiones para medir los ángulos. Los datos son: $\boldsymbol{X_A = 673.069,3m}$ $\boldsymbol{Y_A = 4.162.083,3m}$

$\boldsymbol{X_B = 678.244,5m}$ $\boldsymbol{Y_B = 4.163.577,7m}$

Estación	Punto	L. Acimutal (3 repeticiones)
A	V	0^g
	B	159,5965
B	A	0
	V	209,7744
V	B	0
	A	230,6173

Con los datos anteriores calcula las coordenadas absolutas de V.

La situación del vértice *V* se muestra en la figura adjunta.



- Cálculo de la distancia y acimut en la base.

$$D_{AB} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2} = 5.386{,}6433m$$

$$\theta_A^B = arc\ tg\ \frac{|X_A - X_B|}{|Y_A - Y_B|} = 82{,}1037^g$$

$$\theta_B^A = 282{,}1037^g$$

- Cálculo de los ángulos: en intersección directa es habitual estacionar en los tres vértices y medir los tres ángulos del triángulo *ABV*. Esto permite determinar el error de cierre cometido y, si es admisible, compensarlo. En este caso, para mejorar la precisión, se han realizado *3* repeticiones en la medida de cada ángulo. Por ello, para determinar el valor del ángulo debemos dividir el ángulo medido en campo entre *3*.

$$\hat{A}_{(sin\ compensar)} = \frac{159{,}5965}{3} = 53{,}1988^g$$

$$\hat{B}_{(sin\ compensar)} = \frac{209{,}7744}{3} = 69{,}9248^g$$

$$\hat{V}_{(sin\ compensar)} = \frac{230{,}6173}{3} = 76{,}8724^g$$

Hemos calculado los ángulos a partir de las lecturas acimutales, tal como vimos en el ejercicio anterior. A continuación, aplicamos la condición geométrica siguiente:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{V} = 200^g$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{V} = 199{,}9960^g \qquad e_a = -0{,}0040^g\ (por\ defecto)$$

- Ángulos compensados: El error de cierre se reparte por igual entre los tres ángulos:

$$f_c = \frac{e_a}{3} = -0{,}0013^g$$

$$\hat{A} = \hat{A}_{(sin\ compensar)} - f_c = 53{,}2001^g$$

$$\hat{B} = \hat{B}_{(sin\ compensar)} - f_c = 69{,}9261^g$$

$$\hat{V} = \hat{V}_{(sin\ compensar)} - f_c = 76{,}8737^g$$

En lo que sigue, utilizaremos los valores compensados de los ángulos.

- Cálculo de la distancia y acimut de las alineaciones *AV* y *BV*: Para las distancias aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{D_{AV}}{sen\,\hat{B}} = \frac{D_{AB}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{AV} = 5.131{,}5745m$$

$$\frac{D_{BV}}{sen\,\hat{A}} = \frac{D_{AB}}{sen\,\hat{V}} \qquad D_{BV} = 4.274{,}4519m$$

El cálculo de los acimutes se deduce de la figura:

$$\theta_A^V = \theta_A^B - \hat{A} = 28{,}9035^g$$

$$\theta_B^V = \theta_B^A + \hat{B} = 352{,}0298^g$$

Hemos empleado para el cálculo los valores compensados de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

- Coordenadas del punto *V*: las calculamos a partir de los dos vértices, *A* y B, para comprobar los resultados:

$$X_V = X_A + X_A^V = X_A + D_{AV}\ sen\,\theta_A^V = 675.319{,}8954m$$

$$Y_V = Y_A + Y_A^V = Y_A + D_{AV}\ cos\,\theta_A^V = 4.166.695{,}0109m$$

$$X_V = X_B + X_B^V = X_B + D_{BV}\ sen\,\theta_B^V = 675.319{,}8954m$$

$$Y_V = Y_B + Y_B^V = Y_B + D_{BV}\ cos\,\theta_B^V = 4.166.695{,}0109m$$

5.6) Para calcular las coordenadas planas de un punto V se midieron las distancias reducidas a dicho punto desde los vértices D e I, con los siguientes resultados:

D_{DV} = 380,752m $\qquad$ D_{IV} = 512,823m

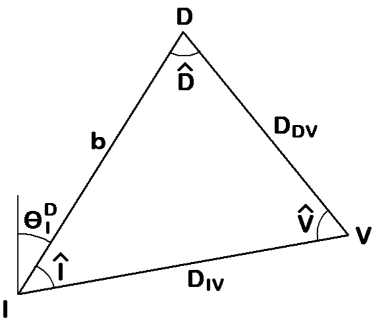
Las coordenadas de los vértices son las siguientes:

X_D = 2.250m $\qquad$ Y_D = 1.400m

X_I = 2.000m $\qquad$ Y_I = 1.000m

Calcula las coordenadas de V.

Este ejercicio muestra un ejemplo de intersección simple mediante observación de distancias. La situación de los puntos puede verse en la figura adjunta. La del punto *V* se deduce como en los ejercicios anteriores.



- Cálculo de la distancia y acimut de la base:

$$b = \sqrt{(X_D - X_I)^2 + (Y_D - Y_I)^2} = 471{,}699m$$

$$\theta_I^D = arc\ tg\,\frac{|X_D - X|}{|Y_D - Y|} = 35{,}5615^g$$

$$\theta_D^I = \theta_I^D \pm 200^g = 135{,}5615^g$$

- Cálculo de los ángulos $\hat{D}$, $\hat{I}$ y $\hat{V}$: dado que se conocen los tres lados del triángulo, aplicamos el teorema del coseno:

$$b^2 = D_{DV}^2 + D_{IV}^2 - 2\ D_{DV}\ D_{IV}\ cos\,\hat{V}$$

De donde:

$$\hat{V} = 68{,}4963^g$$

Aplicando ahora el teorema del seno se pueden calcular los otros dos ángulos:

$$\frac{sen\ \hat{V}}{b} = \frac{sen\ \hat{I}}{D_{DV}} = \frac{sen\ \hat{D}}{D_{IV}}$$

$$\hat{I} = 50{,}2934^g$$

$$\hat{D} = 81{,}2103^g$$

- Cálculo de los acimutes de las alineaciones *DV* e *IV*: de la figura se deduce que:

$$\theta_I^V = \theta_I^D + \hat{I} = 85{,}8549^g$$

$$\theta_D^V = \theta_D^I - \hat{D} = 154{,}3512^g$$

- Coordenadas del punto *V*: Las calculamos desde los dos vértices para comprobar los resultados:.

$$X_V = X_D + X_D{}^V = X_D + D_{DV}\ \ sen\ \theta_D{}^V = 2.500{,}216m$$
$$Y_V = Y_D + Y_D{}^V = Y_D + D_{DV}\ \ cos\ \theta_D{}^V = 1.113{,}009m$$

$$X_V = X_I + X_I{}^V = X_I + D_{IV}\ \ sen\ \theta_I{}^V = 2.500{,}216m$$
$$Y_V = Y_I + Y_I{}^V = Y_I + D_{IV}\ \ cos\ \theta_I{}^V = 1.113{,}009m$$

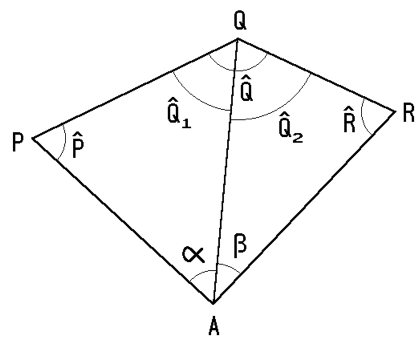
5.7) Se necesita calcular las coordenadas del punto A, para lo cual se visaron desde éste tres vértices de una triangulación; P, Q y R, de coordenadas:

X_P = 865,65m	***Y_P = 1.199,51m***
X_Q = 1.019,82m	***Y_Q = 1.387,94m***
X_R = 1.191,12m	***Y_R = 1.353,68m***

Se utilizó un taquímetro G.C.D. Se leyeron los siguientes datos de campo:

Estación	***Punto***	***Lectura Acimutal***
A	***P***	***$24{,}63^g$***
	Q	***$86{,}97^g$***
	R	***$122{,}47^g$***

Los tres vértices están situados al norte de A.
Calcula las coordenadas absolutas de A.



En intersección inversa simple únicamente se hace estación en los puntos que se pretende determinar, no en los conocidos. El método de Pothenot permite calcular las coordenadas planas de un punto *A*, estacionando un goniómetro en él y visando a tres vértices, al menos, cuyas coordenadas sean conocidas. Anotaremos únicamente las tres lecturas acimutales. Con estos datos, el problema tiene dos posibles soluciones. Para señalar cuál de ellas es la correcta, debemos indicar la situación aproximada del punto *A* en la libreta de campo.

- Empezamos por calcular las distancias y acimutes de las alineaciones formadas por los tres vértices *P*, *Q* y *R*:

$$D_{PQ} = \sqrt{(X_P - X_Q)^2 + (Y_P - Y_Q)^2} = 243{,}463m$$

$$D_{QR} = 174{,}692m$$

$$\theta_P^Q = arc\ tg\ \frac{|X_Q - X_P|}{|Y_Q - Y_P|} = 43{,}655^g$$

$$\theta_Q^P = 243{,}655^g$$

$$\theta_Q^R = 200 - arc\ tg\ \frac{|X_R - X_Q|}{|Y_R - Y_Q|} = 112{,}567^g$$

$$\theta_R^Q = 312{,}567^g$$

Calculamos los ángulos formados por las visuales, por diferencia de lecturas. El procedimiento es similar al que empleamos en intersección directa:

$$\alpha = L_A^Q - L_A^P = 62{,}340^g$$

$$\beta = L_A^R - L_A^Q = 35{,}500^g$$

Calculamos el ángulo en *Q*, interior al cuadrilátero *PQRA*, tal como se deduce de la figura.

$$\hat{Q} = \theta_Q^P - \theta_Q^R = 131{,}088^g$$

El problema quedará resuelto cuando se conozcan los ángulos en *P* y *R*. De momento, estamos en disposición de calcular su suma:

$$\hat{P} + \hat{R} = 400 - \hat{Q} - \alpha - \beta = 171{,}072^g$$

- Determinación del valor de los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{R}$: aplicamos las dos expresiones del método de Pothenot. La primera nos da el valor del ángulo auxiliar *γ*. La segunda nos da la diferencia entre los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{R}$ a partir de su suma y del valor de *γ*.

$$tg\ \gamma = \frac{D_{PQ}\ \ sen\ \beta}{D_{QR}\ \ sen\ \alpha} \qquad \gamma = 46{,}245^g$$

$$\frac{tg\ \frac{\hat{P}+\hat{R}}{2}}{tg\ \frac{\hat{P}-\hat{R}}{2}} = tg\ (\ 50^g\ + \gamma\ ) \qquad \hat{P} - \hat{R} = 31{,}841^g$$

Para calcular los valores de los ángulos en *P* y *R* resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\hat{P} + \hat{R} = 171{,}072^g \qquad \hat{P} = 101{,}457^g$$

$$\hat{P} - \hat{R} = \ \ 31{,}842^g \qquad \hat{R} = \ 69{,}615^g$$

- Comprobación: en el cuadrilátero *PQRA*, la suma de los cuatro ángulos interiores debe ser de cuatro rectos:

$$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} + \beta + \alpha = 400^g$$

- Cálculo de coordenadas del punto *A*: es conveniente realizarlo a partir de dos de los vértices, con objeto de comprobar los resultados. Calculamos los ángulos:

$$\hat{Q}_1 = 200 - \alpha - \hat{P} = 36{,}203^g$$

$$\hat{Q}_2 = 200 - \beta - \hat{R} = 94{,}885^g$$

y, aplicando el teorema del seno:

$$\frac{D_{PA}}{sen\,\hat{Q}_1} = \frac{D_{PQ}}{sen\,\alpha} \qquad D_{PA} = 157{,}950m$$

$$\frac{D_{RA}}{sen\,\hat{Q}_2} = \frac{D_{QR}}{sen\,\beta} \qquad D_{RA} = 329{,}055m$$

Una vez calculadas las distancias reducidas, determinamos los acimutes:

$$\theta_P{}^A = \theta_P{}^Q + \hat{P} = 145{,}112^g$$

$$\theta_R{}^A = \theta_R{}^Q - \hat{R} = 242{,}951^g$$

tal como se deduce de la figura. Las coordenadas se calculan:

$$X_A = X_P + X_P{}^A = X_P + D_P{}^A \ sen\,\theta_P{}^A = 985{,}577m$$

$$Y_A = Y_P + Y_P{}^A = Y_P + D_P{}^A \ cos\,\theta_P{}^A = 1.096{,}719m$$

$$X_A = X_R + X_R{}^A = X_R + D_R{}^A \ sen\,\theta_R{}^A = 985{,}577m$$

$$Y_A = Y_R + Y_R{}^A = Y_R + D_R{}^A \ cos\,\theta_R{}^A = 1.096{,}719m$$

Los valores deben coincidir, si no se han producido equivocaciones en los cálculos.

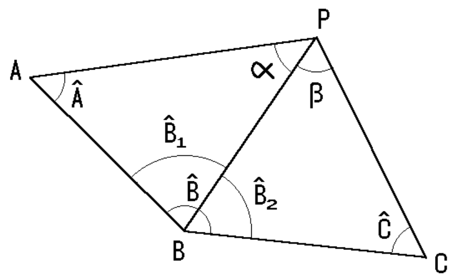
Es importante señalar que el método de Pothenot, cuando se aplica visando únicamente tres vértices, no tiene comprobación por lo que se debe ser muy cuidadoso en la toma de lecturas de campo. Las comprobaciones que hemos realizado se refieren a los cálculos efectuados, no a los datos de campo.

5.8) Necesitamos conocer las coordenadas planimétricas del punto P, para lo cual se visó desde éste a tres vértices A, B y C con un teodolito, realizando 3 reiteraciones. Sabiendo que el punto P está situado al norte de los vértices y que los datos disponibles son los que se indican a continuación, determina las coordenadas del punto P.

X_A = 673.913,11m **Y_A = 4.165.569,89m**
X_B = 675.236,36m **Y_B = 4.163.919,23m**
X_C = 678.006,56m **Y_C = 4.163.414,78m**

Est.	Pto.	L. Acimutal (1ª reit.)	L. Acimutal (2ª reit.)	L. Acimutal (3ª reit.)
P	A	$92{,}2312^g$	$156{,}6547^g$	$206{,}5984^g$
	B	39,9576	104,3798	154,3243
	C	364,8891	29,3117	79,2568

La situación aproximada del punto *P* es la que se ve en la figura adjunta.



• Antes de aplicar las dos expresiones del método de Pothenot, calculamos:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 2.115{,}5777m$$

$$D_{BC} = 2.815{,}7553m$$

$$\theta_A^B = 100 + arc\,tg\,\frac{|Y_B - Y_A|}{|X_B - X_A|} = 156{,}9807^g$$

$$\theta_B{}^A = 356{,}9807^g$$

$$\theta_C^B = 300 + arc\ tg\ \frac{|Y_B - Y_C|}{|X_B - X_C|} = 311,4671^g$$

$$\theta_B^C = 111,4671^g$$

Al obtener los valores de los ángulos α y β se utilizó el método de reiteración para mejorar la precisión angular, por ello se calcula el valor del ángulo en cada reiteración por diferencia de lecturas y se da como valor final la media de esos valores:

$$\alpha_1 = L_P^A - L_P^B = 52,2736^g$$

$$\alpha_2 = L_P^A - L_P^B = 52,2749^g$$

$$\alpha_3 = L_P^A - L_P^B = 52,2741^g$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = 52,2742^g$$

$$\beta_1 = L_P^B - L_P^C = -324,9315 + 400 = 75,0685^g$$

$$\beta_2 = L_P^B - L_P^C = 75,0681^g$$

$$\beta_3 = L_P^B - L_P^C = 75,0675^g$$

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3} = 75,0680^g$$

El ángulo en *B* se calcula, en este caso:

$$\hat{B} = 400^g - \left(\theta_B^A - \theta_B^C\right) = 154,4864^g$$

tal como se deduce de la figura. A continuación calculamos la suma de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$:

$$\hat{A} + \hat{C} = 400 - \hat{B} - \alpha - \beta = 118,1714^g$$

Como sabemos, el método de Pothenot nos permite calcular la diferencia de esos dos ángulos. Una vez conocidos los dos ángulos, las coordenadas se calculan fácilmente.

- Determinación del valor de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$: Aplicamos las dos expresiones del método de Pothenot:

$$tg\ \gamma = \frac{D_{AB}\ sen\ \beta}{D_{BC}\ sen\ \alpha} \qquad \gamma = 48,3285^g$$

$$\frac{tg\ \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}{tg\ \frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}} = tg\ (50^g + \gamma) \qquad \hat{A} - \hat{C} = 4,4643^g$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\hat{A} + \hat{C} = 118,1714 \qquad \hat{A} = 61,3178^g$$

$$\hat{A} - \hat{C} = 4,4643 \qquad \hat{C} = 56,8536^g$$

- Comprobación.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \beta + \alpha = 400^g$$

- Cálculo de las coordenadas del punto *P*: operamos como en el ejercicio anterior:

$$\hat{B}_1 = 200 - \alpha - \hat{A} = 86{,}4080^g$$
$$\hat{B}_2 = 200 - \beta - \hat{C} = 68{,}0784^g$$

Distancias reducidas:

$$\frac{D_{AP}}{sen\ \hat{B}_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ \alpha} \qquad D_{AP} = 2824{,}8583m$$

$$\frac{D_{CP}}{sen\ \hat{B}_2} = \frac{D_{BC}}{sen\ \beta} \qquad D_{CP} = 2671{,}3918m$$

Acimutes:

$$\theta_A^P = \theta_A^B - \hat{A} = 95{,}6629^g$$
$$\theta_C^P = \theta_C^B + \hat{C} = 368{,}3207^g$$

Coordenadas absolutas:

$$X_P = X_A + X_A^P = X_A + D_{AP}\ sen\,\theta_A^P = 676.731{,}4153m$$
$$Y_P = Y_A + Y_A^P = Y_A + D_{AP}\ cos\,\theta_A^P = 4.165.762{,}1914m$$

$$X_P = X_C + X_C^P = X_C + D_{CP}\ sen\,\theta_C^P = 676.731{,}4153m$$
$$Y_P = Y_C + Y_C^P = Y_C + D_{CP}\ cos\,\theta_C^P = 4.165.762{,}1914m$$

5.9) Se necesita calcular las coordenadas del punto P, para lo cual, desde dicho punto, se visaron tres vértices de una triangulación; A, B y C, de coordenadas:

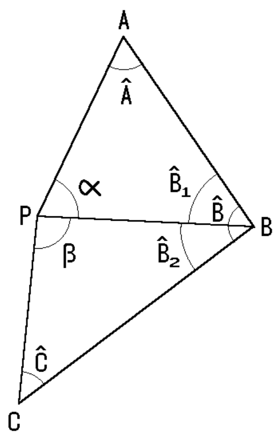
X_A = 694.604,4m Y_A = 4.168.236,2m
X_B = 696.850,6m Y_B = 4.164.373,4m
X_C = 692.396,6m Y_C = 4.161.532,4m

Se utilizó un teodolito G.C.D. Se leyeron los siguientes datos de campo:

Estación	***Punto***	***Lectura Acimutal***
P	***A***	***23,6754^g***
	B	***102,5296^g***
	C	***197,9838^g***

El punto P está situado al oeste de los vértices A, B y C.

La situación aproximada del punto *P* es la que se indica en la figura adjunta. Por lo demás, el ejercicio es similar a los dos anteriores.



- Empezamos por calcular las distancias reducidas y los acimutes de las alineaciones formadas por los tres vértices *A*, *B* y *C*, a partir de las coordenadas planas de los mismos:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 4.468{,}404m$$

$$D_{BC} = 5.282{,}935m$$

$$\theta_A^B = 100 + arc\ tg\,\frac{|Y_B - Y_A|}{|X_B - X_A|} = 166{,}469^g$$

$$\theta_B^A = 366{,}469^g$$

$$\theta_C^B = arc\ tg\,\frac{|X_B - X_C|}{|Y_B - Y_C|} = 63{,}853^g$$

$$\theta_B^C = 263{,}853^g$$

Determinamos los ángulos α, β y $\hat{B}$, así como la suma de $\hat{A}$ y $\hat{C}$:

$$\alpha = L_P^B - L_P^A = 78{,}8542^g$$

$$\beta = L_P^C - L_P^B = 95{,}4542^g$$

$$\hat{B} = \theta_B^A - \theta_B^C = 102{,}616^g$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 400 - \hat{B} - \alpha - \beta = 123{,}076^g$$

- Determinación del valor de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$: aplicamos las dos expresiones del método de Pothenot:

$$tg\ \gamma = \frac{D_{AB}\ sen\ \beta}{D_{BC}\ sen\ \alpha} \qquad \gamma = 46{,}386^g$$

$$\frac{tg\ \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}{tg\ \frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}} = tg\ (\ 50^g + \gamma\ ) \qquad \hat{A} - \hat{C} = 10{,}460^g$$

Calculamos los valores de los dos ángulos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\hat{A} + \hat{C} = 123{,}076 \qquad \hat{A} = 66{,}768^g$$

$$\hat{A} - \hat{C} = 10{,}460 \qquad \hat{C} = 56{,}308^g$$

Comprobación.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \beta + \alpha = 400^g$$

- Cálculo de las coordenadas del punto P:

$$\hat{B}_1 = 200 - \alpha - \hat{A} = 54{,}378^g$$

$$\hat{B}_2 = 200 - \beta - \hat{C} = 48{,}238^g$$

$$\frac{D_{AP}}{sen\ \hat{B}_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ \alpha} \qquad D_{AP} = 3.564{,}088m$$

$$\frac{D_{CP}}{sen\ \hat{B}_2} = \frac{D_{BC}}{sen\ \beta} \qquad D_{CP} = 3.640{,}056m$$

$$\theta_A^P = \theta_A^B + \hat{A} = 233{,}237^g$$

$$\theta_C^P = \theta_C^B - \hat{C} = 7{,}545^g$$

$$X_P = X_A + X_A^P = X_A + D_A^P\ sen\ \theta_A^P = 692.827{,}025m$$

$$Y_P = Y_A + Y_A^P = Y_A + D_A^P\ cos\ \theta_A^P = 4.165.146{,}919m$$

$$X_P = X_C + X_C^P = X_C + D_C^P\ sen\ \theta_C^P = 692.827{,}025m$$

$$Y_P = Y_C + Y_C^P = Y_C + D_C^P\ cos\ \theta_C^P = 4.165.146{,}919m$$

5.9) Para determinar las coordenadas planas de los puntos P_1 y P_2 se visaron los vértices A y B, de coordenadas:

$X_A = 1.219{,}15m$ $Y_A = 2.468{,}78m$

$X_B = 4.391{,}58m$ $Y_B = 1.742{,}98m$

Con una estación total se tomaron los siguientes datos de campo:

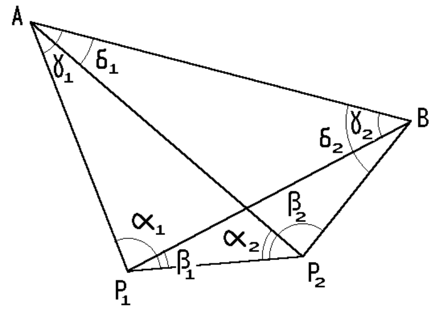
Estación	***Punto***	***Lectura***
P_1	***A***	***$14{,}22^g$***
	B	***$124{,}16^g$***

	P_2	$139,43^g$
P_2	P_1	$166,45^g$
	A	$212,87^g$
	B	$239,29^g$

Los vértices A y B están situados al norte de P_1 y P_2.

En este ejercicio aplicaremos el método de Hansen. Este método puede emplearse, en sustitución del de Pothenot, cuando sólo dispongamos de dos vértices visibles desde la zona a levantar. Estacionamos en dos puntos desconocidos (por tanto, se trata de una intersección inversa) y visamos desde cada uno a los dos vértices y al otro punto desconocido.

Para aplicar correctamente las expresiones del método de Hansen es preciso que las denominaciones de los ángulos coincidan con las de la figura:



Tomamos el triángulo formado por el primer vértice *A* y los dos puntos de estación P_1 y P_2. El ángulo, interior al triángulo, en P_1 se llama α_1. El ángulo en P_2 se llama α_2.

Tomamos el triángulo formado por el segundo vértice *B* y los dos puntos de estación. El ángulo en P_1 se llama β_1; el ángulo en P_2 se llama β_2.

Tomamos el triángulo formado por los dos vértices y el primer punto de estación P_1. El ángulo en *A* se llama γ_1; el ángulo en *B* se llama γ_2.

Tomamos el triángulo formado por los dos vértices y el segundo punto de estación. El ángulo en *A* se llama δ_1, el ángulo en *B* se llama δ_2.

Emplearemos este sistema en todos los ejercicios sobre el método de Hansen. Cualquier otro sistema para denominar los ángulos implica modificar apropiadamente las expresiones a emplear.

- Como en el método de Pothenot, empezamos por calcular:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 3.254,397m$$

$$\theta_A^B = 100 + arc\ tg\ \frac{|Y_B - Y_A|}{|X_B - X_A|} = 114,318^g$$

$$\theta_B^A = 314,318^g$$

A partir de las lecturas de campo, calculamos:

$$\alpha_1 = L_{P1}^{P2} - L_{P1}^{A} = 125,21^g$$

$$\alpha_2 = L_{P2}^{A} - L_{P2}^{P1} = 46,42^g$$

$$\beta_1 = L_{P1}^{P2} - L_{P1}^{B} = 15,27^g$$

$$\beta_2 = L_{P2}^{B} - L_{P2}^{P1} = 72,84^g$$

El problema quedará resuelto calculando los valores de γ_1, γ_2, δ_1 y δ_2. Con los datos de que disponemos en este momento, tal como se deduce de la figura, podemos calcular:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 200 - (\alpha_1 - \beta_1) = 90,06^g$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 200 - (\beta_2 - \alpha_2) = 173,58^g$$

• Determinación del valor de los ángulos γ y δ: empezamos por calcular los cuatro valores auxiliares:

$$K_1 = \frac{sen\ \alpha_2}{sen\ (\ \alpha_1 + \alpha_2\ )} = 1,5457$$

$$K_2 = \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ (\ \alpha_1 + \alpha_2\ )} = 2,1405$$

$$K_3 = \frac{sen\ \beta_2}{sen\ (\ \beta_1 + \beta_2\ )} = 0,9265$$

$$K_4 = \frac{sen\ \beta_1}{sen\ (\ \beta_1 + \beta_2\ )} = 0,2418$$

Para calcular los ángulos aplicamos las expresiones del método de Hansen:

$$\frac{tg\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{tg\ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}} = \frac{K_3 + K_1}{K_3 - K_1} \qquad \gamma_1 - \gamma_2 = -\ 26,859^g$$

$$\frac{tg\ \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{tg\ \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}} = \frac{K_4 + K_2}{K_4 - K_2} \qquad \delta_1 - \delta_2 = -\ 167,119^g$$

Los ángulos se calculan resolviendo los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 90,06 \qquad \gamma_1 = 31,601^g$$
$$\gamma_1 - \gamma_2 = -26,859 \qquad \gamma_2 = 58,459^g$$
$$\delta_1 + \delta_2 = 173,58 \qquad \delta_1 = 3,231^g$$
$$\delta_1 - \delta_2 = -167,119 \qquad \delta_2 = 170,349^g$$

Comprobación:

$$\gamma_1 + \delta_2 + \beta_2 + \alpha_1 = 400^g$$

• Cálculo de las coordenadas de los puntos P_1 y P_2: determinamos las distancias reducidas aplicando el teorema del seno:

$$\frac{D_A^{P1}}{sen\ \gamma_2} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ \alpha_1 - \beta_1\ )} \qquad D_A^{P1} = 2.617,644m$$

$$\frac{D_A^{P2}}{sen\ \delta_2} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ \beta_2 - \alpha_2\ )} \qquad D_A^{P2} = 3.624,891m$$

$$\frac{D_B^{P1}}{sen\ \gamma_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ \alpha_1 - \beta_1\ )} \qquad D_B^{P1} = 1.568,987m$$

$$\frac{D_B^{P2}}{sen\ \delta_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ \beta_2 - \alpha_2\ )} \qquad D_B^{P2} = 409,439m$$

En este caso, los acimutes se calculan:

$$\theta_A^{P1} = \theta_A^{B} + \gamma_1 = 145,919^g$$
$$\theta_A^{P2} = \theta_A^{B} + \delta_1 = 117,549^g$$
$$\theta_B^{P1} = \theta_B^{A} - \gamma_2 = 255,859^g$$
$$\theta_B^{P2} = \theta_B^{A} - \delta_2 = 143,969^g$$

Es conveniente determinar las coordenadas de cada punto con relación a las de los dos vértices, para poder comprobar los cálculos realizados:

$$X_{P1} = X_A + X_A^{P1} = X_A + D_A^{P1}\ \ sen\ \theta_A^{P1} = 3.184,871m$$
$$Y_{P1} = Y_A + Y_A^{P1} = Y_A + D_A^{P1}\ \ cos\ \theta_A^{P1} = 740,197m$$

$$X_{P1} = X_B + X_B^{P1} = X_B + D_B^{P1}\ \ sen\ \theta_B^{P1} = 3.184,871m$$
$$Y_{P1} = Y_B + Y_B^{P1} = Y_B + D_B^{P1}\ \ cos\ \theta_B^{P1} = 740,197m$$

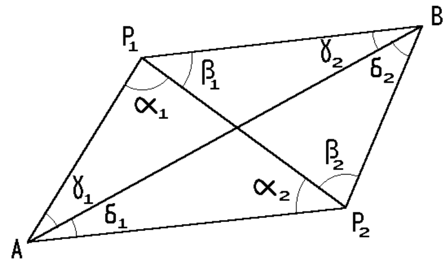
$$X_{P2} = X_A + X_A^{P2} = X_A + D_A^{P2}\ \ sen\ \theta_A^{P2} = 4.707,185m$$
$$Y_{P2} = Y_A + Y_A^{P2} = Y_A + D_A^{P2}\ \ cos\ \theta_A^{P2} = 1.482,147m$$

$$X_{P2} = X_B + X_B^{P2} = X_B + D_B^{P2}\ \ sen\ \theta_B^{P2} = 4.707,185m$$
$$Y_{P2} = Y_B + Y_B^{P2} = Y_B + D_B^{P2}\ \ cos\ \theta_B^{P2} = 1.482,147m$$

El método de Hansen, como el de Pothenot, no permite comprobar las lecturas realizadas en el campo. Lo único que podemos comprobar es que no hay equivocaciones en los cálculos.

5.10) Calcula las coordenadas de los puntos P_1 y P_2, conociendo las lecturas acimutales realizadas al estacionar un instrumento en cada uno de ellos

Estación	***Visual a:***	***Angulo acimutal:***
P_1	***P_2***	***$389,37^g$***
	A	***$27,19^g$***
	B	***$336,75^g$***
P_2	***P_1***	***$175,49^g$***
	A	***$102,38^g$***
	B	***$228,86^g$***



Las coordenadas planas de A y B son:

$$\boldsymbol{X_A = 1.572,463m \qquad Y_A = 2.725,157m}$$
$$\boldsymbol{X_B = 2.987,773m \qquad Y_B = 4.102,963m}$$

El punto P_1 está situado al norte de la alineación A-B y el punto P_2 está situado al sur de dicha alineación.

Como en Pothenot, en el problema de Hansen existen dos soluciones posibles, por lo que es necesario indicar cuál de ellas es la correcta, tal como, en este caso, se hace en la última parte del enunciado del ejercicio.

- Como en el ejercicio anterior, empezamos por calcular:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 1.975,209m$$
$$\theta_A^B = arc\ tg\ \frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} = 50,855^g$$
$$\theta_B^A = 250,855^g$$
$$\alpha_1 = L_{P1}^A - L_{P1}^{P2} = -362,18 + 400 = 37,82^g$$
$$\alpha_2 = L_{P2}^{P1} - L_{P2}^A = 73,11^g$$
$$\beta_1 = L_{P1}^{P2} - L_{P1}^B = 52,62^g$$
$$\beta_2 = L_{P2}^B - L_{P2}^{P1} = 53,37^g$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 = 200 - \alpha_1 - \beta_1 = 109,56^g$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 200 - \beta_2 - \alpha_2 = 73{,}52^g$$

- Determinación del valor de los ángulos γ y δ: Aplicamos las expresiones del método de Hansen para calcular los valores auxiliares:

$$K_1 = \frac{sen\ \alpha_2}{sen\ (\alpha_1 + \alpha_2)} = 0{,}9257$$

$$K_2 = \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ (\alpha_1 + \alpha_2)} = 0{,}5681$$

$$K_3 = \frac{sen\ \beta_2}{sen\ (\beta_1 + \beta_2)} = 0{,}7468$$

$$K_4 = \frac{sen\ \beta_1}{sen\ (\beta_1 + \beta_2)} = 0{,}7389$$

Las diferencias entre los ángulos incógnita se calculan aplicando las dos expresiones siguientes:

$$\frac{tg\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{tg\ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}} = \frac{K_3 + K_1}{K_3 - K_1} \qquad \gamma_1 - \gamma_2 = -15{,}753^g$$

$$\frac{tg\ \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{tg\ \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}} = \frac{K_4 + K_2}{K_4 - K_2} \qquad \delta_1 - \delta_2 = 10{,}813^g$$

Finalmente, los valores de los ángulos se obtienen de los sistemas de ecuaciones:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 109{,}56 \qquad \gamma_1 = 46{,}904^g$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = -15{,}753 \qquad \gamma_2 = 62{,}656^g$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 73{,}52 \qquad \delta_1 = 42{,}166^g$$

$$\delta_1 - \delta_2 = 10{,}813 \qquad \delta_2 = 31{,}354^g$$

- Comprobación: En este caso, la condición a cumplir es:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 400^g$$

- Cálculo de las coordenadas de los puntos P_1 y P_2: Distancias:

$$\frac{D_A^{P1}}{sen\ \gamma_2} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\alpha_1 + \beta_1)} \qquad D_A^{P1} = 1.663{,}740m$$

$$\frac{D_A^{P2}}{sen\ \delta_2} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\alpha_2 + \beta_2)} \qquad D_A^{P2} = 1.020{,}999m$$

$$\frac{D_B^{P1}}{sen\ \gamma_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\alpha_1 + \beta_1)} \qquad D_B^{P1} = 1.342{,}234m$$

$$\frac{D_B^{P2}}{sen\ \delta_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\alpha_2 + \beta_2)} \qquad D_B^{P2} = 1.327{,}920m$$

Acimutes:

$$\theta_A^{P1} = \theta_A^{B} - \gamma_1 = 3{,}951^g$$

$$\theta_A^{P2} = \theta_A^{B} + \delta_1 = 93{,}021^g$$

$$\theta_B^{P1} = \theta_B^{A} + \gamma_2 = 313{,}511^g$$

$$\theta_B^{P2} = \theta_B^{A} - \delta_2 = 219{,}501^g$$

- Coordenadas absolutas:

$$X_{P1} = X_A + X_A^{P1} = X_A + D_A^{P1}\ \ sen\ \theta_A^{P1} = 1.675{,}654m$$
$$Y_{P1} = Y_A + Y_A^{P1} = Y_A + D_A^{P1}\ \ cos\ \theta_A^{P1} = 4.385{,}694m$$

$$X_{P1} = X_B + X_B^{P1} = X_B + D_B^{P1}\ \ sen\ \theta_B^{P1} = 1.675{,}654m$$
$$Y_{P1} = Y_B + Y_B^{P1} = Y_B + D_B^{P1}\ \ cos\ \theta_B^{P1} = 4.385{,}694m$$

$$X_{P2} = X_A + X_A^{P2} = X_A + D_A^{P2}\ \ sen\ \theta_A^{P2} = 2.587{,}333m$$
$$Y_{P2} = Y_A + Y_A^{P2} = Y_A + D_A^{P2}\ \ cos\ \theta_A^{P2} = 2.836{,}859m$$

$$X_{P2} = X_B + X_B^{P2} = X_B + D_B^{P2}\ \ sen\ \theta_B^{P2} = 2.587{,}333m$$
$$Y_{P2} = Y_B + Y_B^{P2} = Y_B + D_B^{P2}\ \ cos\ \theta_B^{P2} = 2.836{,}859m$$

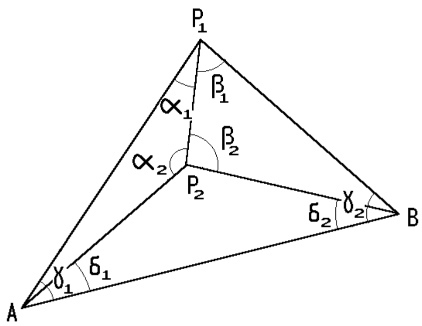
5.11) Para calcular las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 se visaron los vértices A y B, de coordenadas:

$X_A = 678.244{,}5m$ $\quad$ $Y_A = 4.163.577{,}7m$

$X_B = 687.630{,}6m$ $\quad$ $Y_B = 4.165.885{,}0m$

Se utilizó un taquímetro, con el cual se tomaron los siguientes datos:

Estación	***Punto visado***	***Lectura acimutal***
P_1	***B***	***$315{,}687^g$***
	P_2	***$381{,}952^g$***
	A	***$27{,}791^g$***
P_2	***P_1***	***$39{,}195^g$***
	B	***$144{,}998^g$***
	A	***$298{,}739^g$***



Los puntos P_1 y P_2 están situados al norte de la alineación A-B y aproximadamente sobre el mismo meridiano (P_1 al norte de P_2). Calcula las coordenadas absolutas de P_1 y P_2.

La situación de los puntos incógnita, tal como se indica en el enunciado del ejercicio, corresponde a la figura adjunta.

- Como en los ejercicios anteriores, empezamos por calcular:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 9.665{,}532m$$

$$\theta_A^B = arc\ tg\ \frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} = 84{,}655^g$$

$$\theta_B^A = 284{,}655^g$$

$$\alpha_1 = L_{P1}^{A} - L_{P1}^{P2} = -354{,}161 + 400 = 45{,}839^g$$

$$\alpha_2 = L_{P2}^{P1} - L_{P2}^{A} = -259{,}544 + 400 = 140{,}456^g$$

$$\beta_1 = L_{P1}^{P2} - L_{P1}^{B} = 66{,}265^g$$

$$\beta_2 = L_{P2}^{B} - L_{P2}^{P1} = 105{,}803^g$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 200 - \alpha_1 - \beta_1 = 87{,}896^g$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 200 - (400 - \alpha_2 - \beta_2) = 46{,}259^g$$

- Determinación del valor de los ángulos γ y δ: aplicamos las expresiones que nos dan los valores auxiliares:

$$K_1 = \frac{sen\ \alpha_2}{sen\ (\ \alpha_1 + \alpha_2\ )} = 3{,}7674$$

$$K_2 = \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ (\ \alpha_1 + \alpha_2\ )} = 3{,}0869$$

$$K_3 = \frac{sen\ \beta_2}{sen\ (\ \beta_1 + \beta_2\ )} = 2{,}3442$$

$$K_4 = \frac{sen\ \beta_1}{sen\ (\ \beta_1 + \beta_2\ )} = 2{,}0311$$

Aplicamos las expresiones:

$$\frac{tg\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{tg\ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}} = \frac{K_3 + K_1}{K_3 - K_1} \qquad \gamma_1 - \gamma_2 = -\ 24{,}192^g$$

$$\frac{tg\ \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{tg\ \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}} = \frac{K_4 + K_2}{K_4 - K_2} \qquad \delta_1 - \delta_2 = -\ 9{,}965^g$$

Resolvemos los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 87{,}896 \qquad \gamma_1 = 31{,}852^g$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = -24{,}192 \qquad \gamma_2 = 56{,}044^g$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 46{,}259 \qquad \delta_1 = 18{,}147^g$$

$$\delta_1 - \delta_2 = -9{,}965 \qquad \delta_2 = 28{,}112^g$$

Comprobación: En este caso, la condición a cumplir es:

$$(\gamma_1 - \delta_1) + (\gamma_2 - \delta_2) + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 400^g$$

- Cálculo de las coordenadas de los puntos P_1 y P_2: distancias reducidas:

$$\frac{D_A^{P1}}{sen\ \gamma_2} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ \alpha_1 + \beta_1\ )} \qquad D_A^{P1} = 7.588{,}424m$$

$$\frac{D_A^{P2}}{sen\ \delta_2} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ 400 - \beta_2 - \alpha_2\ )} \qquad D_A^{P2} = 6.217{,}682m$$

$$\frac{D_B^{P1}}{sen\ \gamma_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ \alpha_1 + \beta_1\ )} \qquad D_B^{P1} = 4.721{,}785m$$

$$\frac{D_B^{P2}}{sen\ \delta_1} = \frac{D_{AB}}{sen\ (\ 400 - \beta_2 - \alpha_2\ )} \qquad D_B^{P2} = 4.091{,}194m$$

Acimutes:

$$\theta_A^{P1} = \theta_A^B - \gamma_1 = 52{,}803^g$$

$$\theta_A^{P2} = \theta_A^B - \delta_1 = 66{,}508^g$$

$$\theta_B^{P1} = \theta_B^A + \gamma_2 = 340{,}699^g$$

$$\theta_B^{P2} = \theta_B^A + \delta_2 = 312{,}767^g$$

Coordenadas absolutas:

$$X_{P1} = X_A + X_A^{P1} = X_A + D_A^{P1}\ \ sen\ \theta_A^{P1} = 683.841{,}292m$$

$$Y_{P1} = Y_A + Y_A^{P1} = Y_A + D_A^{P1}\ \cos\theta_A^{P1} = 4.168.702,162m$$

$$X_{P1} = X_B + X_B^{P1} = X_B + D_B^{P1}\ \text{sen}\,\theta_B^{P1} = 683.841,292m$$
$$Y_{P1} = Y_B + Y_B^{P1} = Y_B + D_B^{P1}\ \cos\theta_B^{P1} = 4.168.702,162m$$

$$X_{P2} = X_A + X_A^{P2} = X_A + D_A^{P2}\ \text{sen}\,\theta_A^{P2} = 683.621,398m$$
$$Y_{P2} = Y_A + Y_A^{P2} = Y_A + D_A^{P2}\ \cos\theta_A^{P2} = 4.166.699,965m$$

$$X_{P2} = X_B + X_B^{P2} = X_B + D_B^{P2}\ \text{sen}\,\theta_B^{P2} = 683.621,398m$$
$$Y_{P2} = Y_B + Y_B^{P2} = Y_B + D_B^{P2}\ \cos\theta_B^{P2} = 4.166.699,965m$$

6. LEVANTAMIENTO ALTIMÉTRICO

6.1) Calcula el error altimétrico que se cometería, al despreciar la curvatura terrestre, en una visual horizontal lanzada a un punto distante 348,563m. Se supondrá que el radio de la Tierra en la zona de la medición mide R = 6.378km.

El valor aproximado de la corrección puede calcularse mediante:

$$C_e = \frac{D^2}{2\ R} = \frac{(348{,}563)^2}{2\ \ 6.378.000} = 0{,}00952m$$

El error por curvatura terrestre es un error por defecto, por lo que el desnivel real siempre será mayor, en valor absoluto, que el medido.

6.2) Se desea determinar la altitud más exacta de un punto P, de coordenadas conocidas, a partir de una visual a un vértice geodésico A. Las coordenadas de ambos puntos son:

$$X_P = 672.952{,}846m \qquad Y_P = 4.164.412{,}051m$$

$$X_A = 673.132{,}08m \quad Y_A = 4.162.253{,}12m \quad Z_A = 470{,}5m$$

Al colimar el vértice A se leyó un ángulo cenital de $88{,}23^g$. La altura del instrumento fue de 1,53m.

Calculamos el desnivel entre *A* y *P* y le afectamos de las correcciones por curvatura terrestre y por refracción atmosférica.

- Cálculo de la distancia reducida.

$$D_{PA} = \sqrt{(X_P - X_A)^2 + (Y_P - Y_A)^2} = 2.166{,}358m$$

En el cálculo del desnivel consideramos *Ap = 0*, puesto que al colimar el vértice geodésico hacemos coincidir el hilo horizontal de la cruz filar con su base. Por tanto, el desnivel entre *P* y *A* vale:

$$Z_P^A = t_P^A + i = D_P^A/tg\ \varphi + i = 406{,}679m$$

Este desnivel debe ser corregido en los errores debidos a la curvatura terrestre y refracción atmosférica. Utilizaremos como radio de la Tierra un valor medio *R = 6.370km*.

- Curvatura terrestre.

$$C_e = \frac{D^2}{2\ R} = 0{,}368m$$

El desnivel real siempre será mayor, en valor absoluto, que el medido. Aplicamos, pues, esta corrección con signo positivo.

- Refracción atmosférica.

Utilizaremos un valor para el coeficiente de refracción (*K*) medio para *España K = 0,08*.

$$C_r = \frac{D^2\ K}{R} = 0{,}059m$$

Esta corrección, salvo en condiciones muy particulares, es de signo contrario a la anterior.

- El desnivel corregido vale:

$$(Z_P^A)_c = Z_P^A + Ce - Cr =$$
$$= 406{,}679 + 0{,}368 - 0{,}059 = 406{,}988m$$

El desnivel Z_A^P vale:

$$Z_A^P = -(Z_P^A)_c = -406{,}988m$$

La altitud del punto *P* será:

$$Z_P = Z_A + Z_A^P = 470{,}500 - 406{,}988 = 63{,}512m$$

6.3) Se desea determinar las altitudes de los puntos B, C, D, E, F, G y H, conociendo la cota del punto A, Z_A = 396,75m. Para ello, estacionamos un nivel de línea en tres puntos distintos de los anteriores, obteniendo los siguientes datos de campo:

Est.	Punto visado	Lectura mira
E1	A	2,777
	B	3,300
E2	B	1,317
	C	2,325
	D	1,736
	E	1,050
E3	E	0,988
	F	2,638
	G	0,790
	H	1,012

Para determinar las altitudes de los distintos puntos, calculamos primeramente los desniveles, a partir de los datos de la libreta de campo. Las altitudes se calculan posteriormente, mediante un arrastre de coordenadas.

Estacionando en *E1* podemos calcular el desnivel de *B* respecto a *A*, lo que nos permite determinar la altitud de *B*, al ser conocida la de *A*. Estacionando en *E2* calculamos los desniveles de *C*, *D* y *E* respecto a *B*; calculamos las altitudes de los tres puntos una vez conocida la de *B*. De la misma forma, estacionando en *E3* calculamos los desniveles de *F*, *G* y *H* respecto a *E* y determinamos posteriormente las altitudes de los tres puntos.

- Cálculo de las *Z* parciales: el método aplicado es el del punto medio, por lo que los desniveles se calculan:

$$Z_A^B = m_A - m_B = 2{,}777 - 3{,}300 = -0{,}523m$$
$$Z_B^C = m_B - m_C = -1{,}008m$$
$$Z_B^D = m_B - m_D = -0{,}419m$$
$$Z_B^E = m_B - m_E = 0{,}267m$$
$$Z_E^F = m_E - m_F = -1{,}650m$$
$$Z_E^G = m_E - m_G = 0{,}198m$$
$$Z_E^H = m_E - m_H = -0{,}024m$$

- Cálculo de las *Z* absolutas.

$$Z_B = Z_A + Z_A^B = 396{,}75 + (-0{,}523) = 396{,}227m$$
$$Z_C = Z_B + Z_B^C = 395{,}219m$$
$$Z_D = Z_B + Z_B^D = 395{,}808m$$
$$Z_E = Z_B + Z_B^E = 396{,}494m$$
$$Z_F = Z_E + Z_E^F = 394{,}844m$$
$$Z_G = Z_E + Z_E^G = 396{,}692m$$
$$Z_H = Z_E + Z_E^H = 396{,}470m$$

- También podemos realizar las operaciones de la siguiente forma:

$$Z_B^C = m_B - m_C = -1{,}008m$$
$$Z_C^D = m_C - m_D = 0{,}589m$$
$$Z_D^E = m_D - m_E = 0{,}686m$$
$$Z_C = Z_B + Z_B^C = 395{,}219m$$
$$Z_D = Z_C + Z_C^D = 395{,}808m$$
$$Z_E = Z_D + Z_D^E = 396{,}494m$$

Del mismo modo calcularíamos las altitudes de *F*, *G* y *H*. Los resultados deben coincidir con los obtenidos anteriormente.

6.4) Desde el punto altimétrico fundamental F de un levantamiento topográfico se realizó un itinerario cerrado de nivelación geométrica, por el método del punto medio, para determinar la altitud del vértice A. La altitud del punto F es 163,52m. Calcula la altitud del vértice A, con la siguiente libreta de campo:

Est.	***Punto visado***	***Lectura mira***
E1	***F***	***2,160***
	1	***1,223***
E2	***1***	***3,316***
	2	***0,945***
E3	***2***	***1,920***
	A	***2,134***
E4	***A***	***1,621***
	3	***1,653***
E5	***3***	***0,723***
	4	***2,951***
E6	***4***	***1,132***
	F	***1,952***

Se trata de un itinerario altimétrico cerrado, que resolveremos de forma similar a la empleada en itinerarios planimétricos.

- Calculamos los desniveles no compensados (n.c.) de los tramos del itinerario, con la expresión:

$$Z_F^1 = m_F - m_1$$
$$Z_{F\,(n.c.)}^1 = 2{,}160 - 1{,}223 = 0{,}937m$$
$$Z_{1\,(n.c.)}^2 = 2{,}371m$$
$$Z_{2\,(n.c.)}^A = -0{,}214m$$

$$Z_A{}^3{}_{(n.c.)} = -0{,}032m$$
$$Z_3{}^4{}_{(n.c.)} = -2{,}228m$$
$$Z_4{}^F{}_{(n.c.)} = -0{,}820m$$

- Cálculo del error de cierre:

	Z(s.c.)
F	
	0,937
1	
	2,371
2	
	-0,214
A	
	-0,032
3	
	-2,228
4	
	-0,820
F	

Al tratarse de un itinerario cerrado, el error de cierre se obtiene sumando los desniveles:

$$\Sigma Z = e_Z = 0{,}014m \text{ (por exceso)}$$

En nivelación geométrica es corriente realizar la compensación repartiendo el error a partes iguales y no en forma proporcional. Trabajando de esta forma, el factor de corrección para calcular las *Z* parciales compensadas será:

$$fc = 0{,}014/6 = 0{,}002m$$
$$Z_F{}^1 = Z_F{}^1{}_{(n.c.)} - fc = 0{,}937 - 0{,}002 = 0{,}935m$$
$$Z_1{}^2 = Z_1{}^2{}_{(n.c.)} - fc = 2{,}369m$$
$$Z_2{}^A = Z_2{}^A{}_{(n.c.)} - fc = -0{,}216m$$
$$Z_A{}^3 = Z_A{}^3{}_{(n.c.)} - fc = -0{,}034m$$
$$Z_3{}^4 = Z_3{}^4{}_{(n.c.)} - fc = -2{,}230m$$
$$Z_4{}^F = Z_4{}^F{}_{(n.c.)} - fc = -0{,}822m$$

- Coordenadas parciales compensadas y coordenadas absolutas: Arrastramos la altitud desde el punto *F*:

	Z(c)	Z(abs)
F		163,52
	0,935	
1		164,455
	2,369	
2		166,823
	-0,216	
A		166,607
	-0,034	
3		166,573
	-2,230	
4		164,342
	-0,822	
F		163,52

6.5) *Para determinar la altitud de los puntos B, C y D se ha realizado un itinerario altimétrico encuadrado, por el método del punto medio, entre dos puntos de altitud conocida A y E.*

$Z_A = 12{,}347m$ $\qquad Z_E = 12{,}683m$

Con los datos de la siguiente libreta de campo, calcula las altitudes compensadas de los puntos visados.

Est.	Punto visado	Lectura mira
1	A	1,747
	B	1,598
2	B	1,462
	C	1,605
3	C	1,712
	D	1,314
4	D	1,681
	E	1,753

- Calculamos los desniveles no compensados (n.c.) de los tramos del itinerario:

$$Z_A^B{}_{(n.c.)} = m_A - m_B = 1{,}747 - 1{,}598 = 0{,}149m$$
$$Z_B^C{}_{(n.c.)} = 1{,}462 - 1{,}605 = -0{,}143$$
$$Z_C^D{}_{(n.c.)} = 1{,}712 - 1{,}314 = 0{,}398m$$
$$Z_D^E{}_{(n.c.)} = 1{,}681 - 1{,}753 = -0{,}072$$

- Para calcular el error de cierre sumamos los cuatro desniveles y comparamos el resultado con la diferencia de altitudes entre los puntos extremos del itinerario:

$$e_Z = \Sigma Z - (Z_E - Z_A) = 0{,}332 - (12{,}683 - 12{,}347) = -0{,}004m$$

Se trata de un error por defecto. Para compensarlo utilizaremos el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior:

$$fc = -0{,}004/4 = -0{,}001m$$
$$Z_A^B = Z_A^B{}_{(n.c.)} - fc = 0{,}149 - (-0{,}001) = 0{,}150m$$
$$Z_B^C = Z_B^C{}_{(n.c.)} - fc = -0{,}142$$
$$Z_C^D = Z_C^D{}_{(n.c.)} - fc = 0{,}399$$
$$Z_D^E = Z_D^E{}_{(n.c.)} - fc = -0{,}071m$$

- Coordenadas parciales compensadas y coordenadas absolutas: Arrastramos la altitud desde el punto *A*:

	Z(c)	Z(abs)
A		12,347
	0,150	
B		12,497
	-0,142	
C		12,355
	0,399	
D		12,754
	-0,071	
E		12,683

6.6) *Para determinar el desnivel entre dos puntos A y B se utilizó un nivel y miras divididas en milímetros. Se aplicó el método del punto medio. La altitud del punto A es 8,348m. Con los datos de campo que se incluyen a continuación calcula el desnivel, la altitud de B y la distancia reducida entre ambos puntos:*

Estación	Punto Visado	L. Superior	L. Inferior	L. Hilo axial	L. Horizontal
E	A	1,974m	1,840m	1,907m	0^g
	B	0,762	0,574	0,668	198

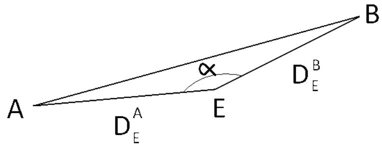
- Calculamos el desnivel parcial:

$$Z_A^B = m_A - m_B = 1{,}907 - 0{,}668 = 1{,}239m$$

La altitud del punto *B* viene dada por la expresión:

$$Z_B = Z_A + Z_A^B = 9{,}587m$$

- Para calcular la distancia reducida entre *A* y *B* aplicaremos el teorema del coseno en el triángulo *ABE*. Para ello debemos comenzar calculando las distancias reducidas entre el punto de estación *E* y los puntos visados *A* y *B*:



$$D_E^A = K\left(L_S - L_I\right) = 100\left(1{,}974 - 1{,}840\right) = 13{,}400m$$

$$D_E^A = K\left(L_S - L_I\right) = 100\left(1{,}974 - 1{,}840\right) = 13{,}400m$$

El teorema del coseno expresa la longitud de un lado, en cualquier triángulo, en función de las longitudes de los otros dos lados y del ángulo comprendido:

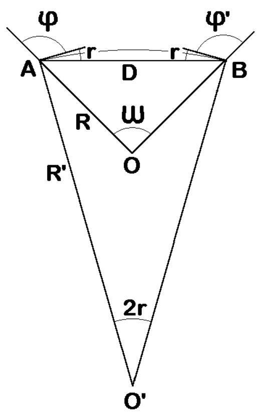
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ AB\ BC\ \cos\beta$$

En nuestro caso será:

$$D_A^B = \sqrt{\left(D_E^A\right)^2 + \left(D_E^B\right)^2 - 2\ D_E^A\ D_E^B\ \cos\left(L_E^B - L_E^A\right)} = 32{,}196m$$

6.7) *Se han estacionado sendos teodolitos en los puntos A y B, visando simultáneamente de A a B y de B a A. Ambos puntos se sitúan sobre la superficie terrestre, supuesta esférica de radio 6.370km. La distancia reducida entre los dos puntos es D = 1.472,113m. Los ángulos verticales leídos fueron: φ = 100,0061^g y φ' = 100,0062^g. Calcula el coeficiente de refracción en las condiciones existentes en el momento de tomar las lecturas.*

Empezamos por calcular el ángulo *ω* que formarían en el centro de la Tierra (supuesta esférica) las verticales de los puntos *A* y *B*. De la figura:



$$sen\,\frac{\omega}{2} = \frac{D}{2R}$$

$$\omega = 2\ arc\ sen\,\frac{D}{2R} = 0{,}0147^g$$

siendo *R* el radio de la Tierra.

Sustituyendo en la expresión de cálculo del coeficiente de refracción:

$$K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega}\left(\varphi + \varphi' - 200^g\right) = 0{,}082$$

En las condiciones de realización de la medición, el coeficiente de refracción era $K = 0,082$.

6.8) Se ha medido la distancia natural entre dos vértices A y B, que van a constituir la base de una triangulación topográfica. Calcula la distancia reducida al nivel del mar, sabiendo que la distancia medida fue 1.684,325m y que las altitudes de los vértices son

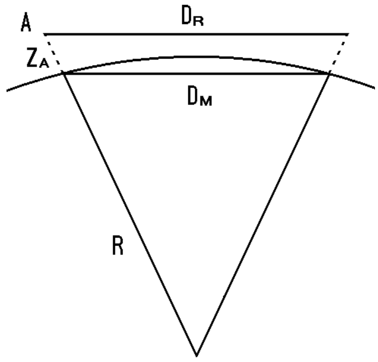
$$Z_A = 486,397m \qquad Z_B = 1.315,682m$$

Se supondrá que la Tierra es esférica, de radio R = 6.378.142m.

Para calcular la distancia reducida al nivel del mar, empezamos por calcular la distancia reducida al horizonte, ya que lo que se ha medido es una distancia natural. Para ello calculamos la altura de horizonte correspondiente a la alineación *A*-*B*.

$$sen\ \alpha = \frac{Z_B - Z_A}{D} = \frac{1315,682 - 486,397}{1684,325} = 0,492^g$$

$$\alpha = 32,773^g$$



- Obtenemos la distancia reducida al horizonte proyectando:

$$D_R = D\ \cos \alpha = 1.466,028m$$

- La distancia reducida al nivel del mar es la distancia entre las proyecciones de los puntos *A* a *B*, siguiendo la dirección de la vertical, sobre la superficie de nivel origen de las altitudes. Por semejanza de triángulos:

$$\frac{D_M}{D_R} = \frac{R}{R + Z_A} \qquad D_M = 1.362,150m$$

7. PLANIFICACIÓN DE UN LEVANTAMIENTO TOPOGRÁFICO

7.1) Se pretende realizar un levantamiento con una estación total. En la tabla siguiente se dan los valores de los errores accidentales a priori al utilizar la estación total en cada uno de los posibles métodos planimétricos. Los errores que dependen de la distancia se indican en función de ésta:

Errores accidentales

	ángulos horizontales				distancias			
	e_{va}	e_{da}	e_{pa}	e_{la}	e_d (mm)	e_e (m)	e_p (m)	e_j (m)
Intersección	5^s	0,0125 r/D	3^s	10^s	3mm+3mm D/1000	0,0025	0,0025	0
Itinerario	5^s	0,0125 r/D	12^s	10^s	3mm+3mm D/1000	0,0025	0,01	0,02
Radiación	5^s	0,0125 r/D	12^s	10^s	3mm+3mm D/1000	0,0025	0,01	0,02

El levantamiento constará de tres redes, todas realizadas con la misma estación total:

Triangulación (intersección mediante observaciones angulares): se medirá una base de unos 1.000m; distancias medias entre vértices: 1.000m; número máximo de triángulos en una cadena: n" = 7; no se aplican métodos para aumentar la precisión. Se enlaza con la red geodésica, determinando y compensando los errores de cierre.

Itinerarios: itinerarios encuadrados entre pares de vértices de la triangulación; distancias medias de los tramos: 250m; número máximo de estaciones en un itinerario: n' = 6; se considera que cada distancia sólo se mide una vez.

Radiación: desde las estaciones de los itinerarios se radian los puntos de relleno; distancia máxima de radiación: 300m.

Calcula el máximo error acumulado en los puntos radiados.

Empezamos por calcular los errores accidentales a priori de cada uno de los tres métodos planimétricos a aplicar. Posteriormente calcularemos los errores acumulados.

Red trigonométrica (triangulación):

• Los errores angulares de verticalidad, puntería y lectura (e_{va}, e_{pa} y e_{la}) correspondientes a una visual ya están calculados. El de dirección (e_{da}) depende de la distancia. Puesto que se ha previsto que las longitudes medias de los lados de los triángulos sean de unos *1.000m*, será:

$$e_{da} = 0{,}0125\,\frac{r}{D} = 0{,}0125\,\frac{636.620}{1.000} = 7{,}958^s$$

Por tanto:

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 14{,}047^s$$

• También hay que considerar el error de medida de la longitud de la base. El error total tiene cuatro componentes, tres de las cuales (e_l, e_p y e_j) ya están calculadas. El error e_d vale:

$$e_d = 3 + 3\,\frac{D}{1.000} = 3 + 3\,\frac{1.000}{1.000} = 6mm = 0{,}006m$$

Y el error total en la base:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0{,}007m$$

- El error angular acumulado en una cadena de $n'' = 7$ triángulos será:

$$\varepsilon_a = \frac{E_a\ D\sqrt{6}\ 0{,}8}{r^s}\sqrt{\frac{n''(n''+1)(2n''+1)}{6}} = 0{,}512m$$

Teniendo en cuenta también el error en la medida de la base:

$$\varepsilon_b = E_d = 0{,}007m$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2} = 0{,}512m$$

Éste sería el error total acumulado de la cadena de triángulos.

Red topográfica (itinerarios):

- Los errores angulares de verticalidad, puntería y lectura de cada visual ya están calculados. El de dirección depende de la distancia. Las longitudes medias de los lados de los itinerarios serán de unos *250m*. Por tanto:

$$e_{da} = 0{,}0125\frac{r}{D} = 0{,}0125\ \frac{636.620}{250} = 31{,}831^s$$

El error angular total en una visual de los itinerarios será:

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 35{,}808^s$$

- En la medida de distancias conocemos los errores e_l, e_p y e_j. El error e_d vale:

$$e_d = 3 + 3\ \frac{D}{1.000} = 3 + 3\ \frac{250}{1.000} = 3{,}75mm = 0{,}00375m$$

Y el error total en distancia en una visual del itinerario:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0{,}0228m$$

- El error angular acumulado en un itinerario de $n' = 6$ tramos será:

$$e_{ca} = \frac{E_a\ D}{r^s}\sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}} = 0{,}134m$$

Y en distancia:

$$e_{cl} = E_d\sqrt{n'} = 0{,}0559m$$

El error de cierre del itinerario será:

$$e_c = \sqrt{e_{ca}^2 + e_{cl}^2} = 0{,}145m$$

Red de relleno (radiación):

- Los errores angulares de verticalidad, puntería y lectura de cada visual ya están calculados. El de dirección depende de la distancia de radiación, *300m* como máximo. Por tanto:

$$e_{da} = 0{,}0125\frac{r}{D} = 0{,}0125\ \frac{636.620}{300} = 26{,}526^s$$

El error angular total en radiación será:

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 31{,}187^s$$

- En la medida de distancias conocemos los errores e_l, e_p y e_j. El error e_d vale:

$$e_d = 3 + 3\frac{D}{1.000} = 3 + 3\frac{300}{1.000} = 3{,}9mm = 0{,}0039m$$

Y el error total en distancia:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0{,}0228m$$

- Por tanto, el error total en radiación será:

$$e_r = \sqrt{\frac{E_a^2}{r^2}D^2 + E_d^2} = 0{,}027m$$

<u>Acumulación de errores. Comprobación final</u>:

- Si compensamos los errores de cierre producidos en una cadena de *n"* triángulos, el error que corresponde a cada vértice será:

$$\xi_t = e'' + c'' = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n''}} + \frac{\varepsilon_t}{n''} = 0{,}266m$$

- Y, puesto que cada itinerario se encuadra entre dos vértices de la triangulación, el error acumulado de ambas redes será:

$$e_i = \sqrt{\xi_t^2 + \xi_t^2 + e_c^2} = 0{,}404m$$

Este error se compensará entre las *n'* estaciones del itinerario, por lo que el error correspondiente a cada estación será:

$$e = e' + c' = \frac{e_i}{\sqrt{n'}} + \frac{e_i}{n'} = 0{,}232m$$

- La radiación se realiza desde las estaciones de los itinerarios. Por tanto, el error acumulado de las tres redes (trigonométrica + topográfica + de relleno) será:

$$e_u = \sqrt{e^2 + e_r^2} = 0{,}234m$$

7.2) Se va a realizar un levantamiento topográfico para el trazado de un plano a escala 1:2.500. Los métodos e instrumentos topográficos que está previsto emplear son los siguientes:

- ***Red trigonométrica: una red de triángulos de longitudes medias en torno a 1.500m; se aplicará la regla de Bessel en todas las visuales; las cadenas más largas estarán formadas por un máximo de 6 triángulos. Se enlaza con la red geodésica, determinando y compensando los errores de cierre.***

  Instrumentos: teodolito de $0{,}2^s$ de apreciación, anteojo de 28 aumentos, nivel tórico de 20" de sensibilidad, plomada óptica. Se desprecia el error en la medida de la base.

- ***Red topográfica: itinerarios primarios de 6 tramos, de longitud media 275m, encuadrados entre los vértices de la red trigonométrica; itinerarios secundarios de 5 tramos y la misma longitud media, encuadrados entre un vértice de la triangulación y la estación de un itinerario primario. Inclinación máxima de las visuales $\alpha = 5^g$; altura máxima prevista para el prisma $A_p = 1{,}5m$.***

  Instrumentos: taquímetro de 10^s de apreciación, anteojo de 30 aumentos, nivel tórico de 30" de sensibilidad, plomada óptica; distanciómetro (e_d = 5mm + 3mm·K), prisma sobre jalón con nivel esférico.

- ***Red de detalle: radiación, a una distancia máxima de 300m. Inclinación máxima de las visuales α = 5ᵍ; altura máxima prevista para el prisma Ap = 1,5m.***

  Instrumentos: los mismos que en la red topográfica.

Determina si los errores accidentales acumulados en las redes planimétricas tienen representación en el plano.

Calcularemos de forma independiente los errores accidentales correspondientes a cada una de las redes planimétricas. Finalmente calcularemos los errores acumulados, comprobando si su valor en el plano supera el límite de la percepción visual.

<u>Errores accidentales en la red trigonométrica.</u>

- En la medida de ángulos acimutales con un teodolito intervienen cuatro causas de errores accidentales: falta de verticalidad del eje principal, dirección, puntería y lectura. Las expresiones a emplear son:

$$e_{va} = \frac{1}{12}\, s^s = \frac{20''}{12}\, \frac{400\ 100\ 100}{360\ 60\ 60} = 5{,}14^s$$

Tomamos, para e_e+e_p, el valor *0,00125*:

$$e_{da} = \frac{e_e + e_p}{D}\, r^s = \frac{0{,}0125}{1.500}\, 636.620 = 5{,}31^s$$

$$e_{pa} = \frac{30^s}{A}\left(1 + 4\frac{A}{100} \right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{30^s}{28}\left(1 + 4\frac{28}{100} \right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}61^s$$

$$e_{la} = \frac{2}{3}\, a^s\, \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\, 0{,}2^s\, \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}09^s$$

Hemos dividido por $\sqrt{2}$ los errores de puntería y lectura, e_{pt} y e_{lt}, puesto que se va a aplicar la regla de Bessel. El error angular total, cometido en una visual con el teodolito, será:

$$e_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 7{,}56^s$$

ya que se trata de causas de error independientes que actúan conjuntamente. En cada triángulo intervienen *6* visuales, dos por cada uno de los ángulos a medir, por lo que haremos:

$$e'_a = e_a\sqrt{6} = 18{,}52^s$$

Por otra parte, puesto que se medirán los tres ángulos de cada triángulo, calculando y compensando el error de cierre, tomaremos como valor de E_a un *80%* del que hemos calculado:

$$E_a = e'_a\, \frac{80}{100} = 14{,}82^s$$

En una cadena de *n” = 6* triángulos, con lados de longitud media *1.500m*, el error angular acumulado vale:

$$\varepsilon_a = \frac{E_a\ D}{r}\sqrt{\frac{n''\ (n''+1)\ (2n''+1)}{6}}$$

$$\varepsilon_a = \frac{14{,}82^s\ 1.500m}{636.620}\sqrt{\frac{6\ (7)(13)}{6}} = 0{,}333m$$

- El error accidental total en la cadena de triángulos se debe a las dos causas que hemos visto: error en la medida de la base y errores angulares. Como vamos a despreciar el primero, será:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_a = 0{,}333m$$

<u>Errores accidentales en la red topográfica.</u>

Itinerarios primarios: Los errores accidentales se producen en la medida de distancias y en la medida de ángulos acimutales:

- En la medida de distancias con distanciómetro, suponemos que cada tramo se mide una sola vez. Para distancias medias de *275m*, tenemos:

$$e_d = 5mm + 3mm \;\; 0{,}275 = 5{,}8mm = 0{,}0058m$$

Al emplear plomada óptica y prisma sobre jalón, tomamos:

$$e_e = 0{,}0025m \qquad\qquad e_p = 0{,}01m$$

Y el error de inclinación del jalón será (tomando $\beta = 1^g$):

$$e_j = \frac{Ap \; sen \; \beta}{cos \; \alpha} = 0{,}0236\,m$$

El error total en distancia para una visual de los itinerarios será:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0{,}026m$$

- En la medida de ángulos acimutales con taquímetro se dan las mismas causas de error accidental que vimos para la red trigonométrica. Los valores de los errores varían, ya que en esta red se emplea un instrumento distinto y la longitud de las visuales es menor:

$$e_{va} = \frac{30''}{12} \; \frac{400 \;\; 100 \;\; 100}{360 \;\; 60 \;\; 60} = 7{,}72^s$$

$$e_{da} = \frac{0{,}025}{275} \; 636.620 = 57{,}87^s$$

$$e_{pa} = \frac{30^s}{30} \left(1 + 4 \frac{30}{100} \right) = 2{,}20^s$$

$$e_{la} = \frac{2}{3} 10^s = 6{,}67^s$$

El error angular total en una visual será:

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 58{,}80^s$$

- Los errores, en medida de distancias y de ángulos, acumulados a lo largo del itinerario de $n' = 6$ tramos, serán respectivamente:

$$e_{ca} = \frac{58{,}80^s \;\; 275m}{r} \sqrt{\frac{n' \; (\; n'+1 \;) \; (\; 2\,n'+1 \;)}{6}} = 0{,}24m$$

$$e_{cl} = E_d \sqrt{n'} = 0{,}0026 \sqrt{6} = 0{,}065m$$

Por tanto, el error de cierre de los itinerarios primarios:

$$e_{c1} = \sqrt{e_{ca}^2 + e_{cl}^2} = 0{,}251m$$

Vemos que los errores en la medida de distancias con distanciómetro son inferiores a los errores angulares. No ocurriría lo mismo si se empleasen procedimientos estadimétricos, mucho menos precisos.

- En los itinerarios secundarios se cometen los mismos tipos de errores. Los valores serán los mismos que en itinerarios primarios, aunque varían los errores acumulados. Al tratarse, en este caso, de itinerarios de *5* tramos:

$$e_{cl} = 0,026\sqrt{5} = 0,059m$$

$$e_{ca} = \frac{58,80^s \ \ 275m}{r}\sqrt{\frac{5\ \ (6)(11)}{6}} = 0,19m$$

$$e_{c2} = \sqrt{e_{ca}^2 + e_{cl}^2} = 0,197m$$

Errores accidentales en la red de detalle.

Se cometen los mismos tipos de errores que en la red anterior, pero en este caso no hay acumulación de errores como en un itinerario o una triangulación.

- Para distancias de *300m*, el error del distanciómetro vale:

$$e_d = 5mm + 3mm\ \ 0,300 = 5,9mm = 0,0059m$$

Los restantes errores en distancia son iguales que los de la red anterior. Por tanto:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0,026m$$

- Los errores cometidos en la medida de ángulos acimutales coinciden con los que ya hemos calculado, pues se trata del mismo instrumento topográfico, salvo el error de dirección:

$$e_{dr} = \frac{0,025}{300}636.620 = 53,05^s$$

El error angular total vale:

$$E_a = \sqrt{e_{vr}^2 + e_{dr}^2 + e_{pr}^2 + e_{lr}^2} = 54,07^s$$

Para expresarlo en metros, hacemos:

$$E_a = \frac{54,07\ \ D}{r} = \frac{54,07\ \ 300}{636.620} = 0,025m$$

- El error total correspondiente a una visual en radiación vale:

$$e_r = \sqrt{E_d^2 + E_a^2} = 0,036m$$

Acumulación de errores. Comprobación final.

- Si se compensa el error ε_t de una cadena de triángulos entre sus *6* triángulos, tendremos:

$$\xi_t = e'' + c'' = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n''}} + \frac{\varepsilon_t}{n''} = 0,192m$$

- Cada itinerario primario se encuadra entre dos vértices de la triangulación. El error máximo, acumulado en las dos redes, vale:

$$e_1 = \sqrt{\xi_t^2 + \xi_t^2 + e_{c1}^2} = 0,369m$$

Como se trata de itinerarios de *6* tramos, el error correspondiente a cada punto vale:

$$e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{n}} = \frac{0,369}{\sqrt{6}} = 0,151m$$

y, al compensar el error de cierre, la corrección correspondiente a cada punto vale:

$$c'_1 = \frac{e_1}{n} = \frac{0{,}369}{6} = 0{,}062m$$

Admitimos que, una vez compensados, el máximo error absoluto acumulado en los puntos de los itinerarios primarios vale:

$$\varepsilon_{p1} = e'_1 + c'_1 = 0{,}212m$$

- Cada itinerario secundario se encuadra entre un vértice de la triangulación y una estación de un itinerario primario. El error máximo acumulado vale:

$$e_2 = \sqrt{\xi_t^2 + \varepsilon_{p1}^2 + e_{c2}^2} = 0{,}347m$$

Compensando el error de cierre, como en los itinerarios primarios, tendremos:

$$e'_2 = \frac{e_2}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}347}{\sqrt{5}} = 0{,}155m$$

$$c'_2 = \frac{e_2}{n} = \frac{0{,}347}{5} = 0{,}070m$$

Admitimos que, una vez compensados, el máximo error absoluto acumulado en los puntos de los itinerarios secundarios vale:

$$\varepsilon_{p2} = e'_2 + c'_2 = 0{,}225m$$

- Los errores máximos acumulados corresponden a la red de relleno y se cometen en los puntos radiados desde estaciones de los itinerarios secundarios. Por tanto:

$$e_u = \sqrt{\varepsilon_{p2}^2 + e_r^2} = 0{,}228m$$

Los errores máximos acumulados cometidos en el levantamiento no tendrían representación en el plano, ya que a escala *1:2.500* el límite de la percepción visual supone:

$$0{,}2 \;\; 2.500 = 500mm = 0{,}5m \; > \; 0{,}228m$$

7.3) Se pretende realizar un levantamiento planimétrico, para trazar un plano a escala 1:5.000, utilizando los siguientes métodos e instrumentos:

- ***Red trigonométrica: Levantamiento de vértices por GPS. Error máximo 0,5m.***
- ***Red topográfica: Itinerarios primarios realizados con estación total. Cada itinerario estará compuesto por un máximo de 5 tramos, de longitudes próximas a 300m. Las características de la estación total son:***
  - ***Compensador de doble eje. Precisión: $P_e = 1^s$***
  - ***Número de aumentos del anteojo: 28***
  - ***Precisión del dispositivo electrónico de medida de ángulos: 10^s***
  - ***Plomada láser. Prisma sobre jalón con nivel esférico.***
  - ***Expresión para el cálculo del error en la medida de distancias:***
  - ***e_d (mm) = 5 + 3 · D/1000***
- ***Red de detalle: Radiación realizada con la misma estación total. La distancia máxima de radiación será de unos 200m.***

Para calcular los errores en distancia en las redes topográfica y de detalle supondremos:

$$\beta = 1^g \qquad \alpha = 10^g \qquad Ap = 2m$$

Comprueba si los errores que se cometerían tienen representación en el plano.

Vamos a calcular los errores accidentales que se cometerían en cada una de las redes del levantamiento, comprobando que ninguno de ellos supera la tolerancia. A continuación calcularemos los errores acumulados, para determinar el error absoluto que se cometería en los puntos más desfavorables del levantamiento. Si este error no supera la tolerancia, el plan de trabajos establecido es válido.

Errores accidentales en la red trigonométrica.
El error máximo que se cometería en los vértices de la red levantada por GPS es de *0,5m*.

Errores accidentales en la red topográfica.
En los itinerarios que constituyen la red topográfica, o intermedia, se producen dos tipos de error:

- Errores en la medida de ángulos.

$$e_{va} = \frac{1}{4} P_e = 0{,}25^s$$

Pe = precisión del estabilizador del compensador

$$e_{da} = \frac{e_e + e_p}{D} r^s = \frac{0{,}0125}{300} 636620 = 26{,}53^s$$

$e_e + e_p = 0{,}0125$ con plomada óptica y jalón con nivel esférico
r^s = número de segundos de un radian, en segundos centesimales
D = longitud de los tramos del itinerario

$$e_{pa} = \frac{150^s}{A}\left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \frac{150^s}{28}\left(1 + 4\frac{28}{100}\right) = 11{,}36^s$$

A = número de aumentos del anteojo. Tomamos la expresión para distancias grandes, haciendo *50"≈150*$50'' \approx 150^s$.

$$e_{la} = \frac{2}{3} p^s = 6{,}67^s$$

p = precisión del sistema de lectura de ángulos, en segundos.

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 29{,}62^s$$

Este error angular corresponde a una visual del itinerario.

- Errores en la medida de la distancia: puesto que la longitud de cada tramo se ha medido dos veces, dividimos los errores e_d y e_j por $\sqrt{2}$.

$$e_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(5 + 3\ \frac{D}{1000}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(5 + 3\ \frac{300}{1000}\right) = 4{,}17mm = 0{,}00417m$$

Al emplear plomada óptica y prisma sobre jalón, tomamos:

$$e_e = 0{,}0025m \qquad e_p = 0{,}01m$$

Y el error de inclinación del jalón será:

$$e_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Ap\ sen\ \beta}{cos\ \alpha} = 0{,}022m$$

El error lineal total de cada tramo del itinerario será:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0{,}025m$$

- Error total del itinerario.

Los errores angulares y lineales se acumulan, a lo largo de itinerario, de la siguiente forma:

$$e_{ca} = \frac{E_a \ D}{r^s} \sqrt{\frac{n' \ (n'+1) \ (2n'+1)}{6}} = 0{,}103m$$

$$e_{cl} = E_d \ \sqrt{n'} = 0{,}056m$$

n' = número de tramos del itinerario = *5*

$$e_c = \sqrt{e_{ca}^2 + e_{cl}^2} = 0{,}117m$$

que es el error de cierre del itinerario.

<u>Red de detalle.</u>

También en el método de radiación se producen errores en la medida de ángulos y en la medida de distancias. Los errores angulares tienen los mismos valores que los calculados para la red topográfica, que se realiza con el mismo instrumento, salvo el error de dirección.

- Errores angulares.

$$e_{va} = 0{,}25^s$$

$$e_{da} = \frac{e_e + e_p}{D} \ r^s = \frac{0{,}0125}{200} \ 636.620 = 39{,}79^s$$

$$e_{pa} = 11{,}36^s$$

$$e_{la} = 6{,}67^s$$

$$\varepsilon_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 41{,}91^s$$

Este error angular transformado en error lineal valdría:

$$E_a = \frac{\varepsilon_a \ D}{r^s} = \frac{41{,}91 \ 200}{636620} = 0{,}013m$$

- Errores en la medida de la distancia.

$$E_d = 5 + 3 \ \frac{D}{1000} = 5 + 3 \ \frac{200}{1000} = 5{,}60mm = 0{,}0056m$$

Al emplear plomada óptica y prisma sobre jalón, tomamos:

$$e_e = 0{,}0025m \qquad e_p = 0{,}01m$$

Y el error de inclinación del jalón será:

$$e_j = \frac{Ap \ sen \ \beta}{cos \ \alpha} = 0{,}032m$$

Error lineal total:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0{,}0339m$$

- Error total en radiación.

$$e_r = \sqrt{E_a^2 + E_d^2} = 0{,}0363m$$

<u>Acumulación de errores. Comprobación final</u>.

- Red trigonométrica + red topográfica.

Puesto que cada itinerario se apoya en dos vértices:

$$e = \sqrt{\xi_t^2 + \xi_t^2 + e_c^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + 0,117^2} = 0,717m$$

Si compensamos los errores de cierre producidos, el error que corresponde a cada estación de los itinerarios será:

$$e' = \frac{e}{\sqrt{n'}} = \frac{0,717}{\sqrt{5}} = 0,320m$$

y, al compensar dicho error de cierre, la corrección correspondiente a cada estación valdrá:

$$c' = \frac{e}{n'} = \frac{0,717}{5} = 0,143m$$

Admitimos que el error máximo en una estación de itinerario es la suma de estos dos valores:

$$e = e' + c' = 0,320 + 0,143 = 0,463m$$

- Red trigonométrica + red topográfica + red de relleno.

La radiación se realiza desde las estaciones del itinerario. Por tanto:

$$e_u = \sqrt{e^2 + e_r^2} = \sqrt{0,463^2 + 0,0363^2} = 0,465m$$

Para comprobar si tiene este error representación en el plano se obtiene la distancia mínima con representación:

$$5.000 \;\; 0,2 = 1.000mm = 1m$$

1m es mayor que el error máximo esperable, *0,465m*, por lo que éste no tiene representación en el plano. En consecuencia, cabe esperar que los errores accidentales que se produzcan en el levantamiento no vayan a superar, en ningún caso, la tolerancia.

7.4) Se desea comprobar si los errores accidentales que se cometerían en la fase altimétrica de un levantamiento topográfico son admisibles. La tolerancia altimétrica se fija en 0,10m.

Los vértices trigonométricos se levantarán con un nivel, de 20" de sensibilidad del nivel de burbuja y anteojo de 30 aumentos. Se realizarán itinerarios cerrados, partiendo del punto altimétrico fundamental. Se prevé que los itinerarios más largos estén compuestos por unos 200 tramos, con visuales de 50m de longitud media, empleando el método del punto medio.

La red por pendientes se realizará con estación total, en paralelo a las redes planimétricas correspondientes. Las características de la estación total son: 30" de sensibilidad del nivel tórico, anteojo de 30 aumentos, precisión del dispositivo electrónico de medida de ángulos: 10 ^{s}, corrección automática de los errores de curvatura terrestre y refracción. La expresión que da el error en la medida de la distancia con este instrumento es: e = 5mm + 5mm· K; La estación total está dotada de plomada láser y se empleará prisma sobre jalón con nivel esférico. Los itinerarios más largos son de 6 tramos, de longitudes en torno a 250m, encuadrados entre vértices de la triangulación. La máxima altura de horizonte prevista es de 5 ^{g}. Máxima altura de prisma prevista: 2m.

La red de detalle se levantará con estación total y consistirá en una radiación, a distancias máximas de 300m, desde las estaciones de los itinerarios. Máxima altura de horizonte prevista 5 ^{g}. Máxima altura de prisma prevista: 2m. Calcula el máximo error altimétrico de los puntos radiados, comprobando si

excede a la tolerancia fijada.

La altimetría de un levantamiento topográfico suele hacerse estableciendo dos redes, una por alturas y otra por pendientes. En nuestro caso, la primera se emplea para determinar la altitud de los vértices de la triangulación. La red por pendientes, que se realiza a la vez que las redes planimétricas topográfica y de detalle, incluye las estaciones de los itinerarios y los puntos radiados.

<u>Errores accidentales en la red por alturas.</u>

- En nivelación geométrica se cometen dos tipos de error accidental, error de horizontalidad del eje de colimación y error de puntería:

$$e_h = \frac{1}{3} S^s = \frac{20\ \ 400\ \ 100\ \ 100}{3\ \ 360\ \ 60\ \ 60} = 20,58^s$$

$$e_p = \frac{50''}{A}(1+\frac{4\ A}{100}) \approx \frac{150^s}{A}(1+\frac{4A}{100}) = 11^s$$

El error total de una visual con nivel será:

$$E_n = \sqrt{e_h^2 + e_p^2} = 23,33^s$$

En una visual de *50m*, este error corresponde a:

$$E'_n = \frac{E_n}{r^s} D = \frac{23,33}{636.620} 50 = 0,0018m$$

Para un itinerario de *200* tramos, el error acumulado sería:

$$\xi_n = E'_n \sqrt{200} = 0,0259m$$

que es el error de cierre máximo que tendremos en la red por alturas y que, como vemos, es inferior a la tolerancia.

<u>Errores accidentales en la red por pendientes.</u>

- En la medida de ángulos verticales se producen los errores de verticalidad, de puntería y de lectura:

$$e_{vc} = \frac{1}{3} S^s = \frac{30\ \ 400\ \ 100\ \ 100}{3\ \ 360\ \ 60\ \ 60} = 30,86^s$$

$$e_{pc} = \frac{150}{A}(1+\frac{4A}{100}) = \frac{1500}{30}(1+\frac{4\ \ \ 30}{100}) = 11^s$$

$$e_{lc} = \frac{2}{3} a^s = \frac{2}{3} 10^s = 6,67^s$$

Error cenital total:

$$E_c = \sqrt{e_{vc}^2 + e_{pc}^2 + e_{lc}^2} = 33,43^s$$

- En la medida de distancias con distanciómetro, para tramos de *250m*:

$$e_d = 5mm + 5mm\ \ 250/1.000 = 6,25mm = 0,00625m$$

Al emplear plomada láser y prisma sobre jalón, tomamos:

$$e_e = 0,0025m \qquad\qquad e_p = 0,01m$$

Y el error de inclinación del jalón será:

$$e_j = \frac{Ap\ sen\ \beta}{cos\ \alpha} = 0,032m$$

Error lineal total:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_j^2} = 0{,}0337m$$

- Los errores altimétricos en una visual con goniómetro son:

Error por visuales inclinadas y en la medida de la distancia:

$$e_t = D\ [\ (\ 1 + \frac{E_d}{D}\ )\ \ tg\ (\ \alpha + E_c\ ) - tg\ \alpha\ ] = 0{,}0159m$$

Como valor de α hemos tomado el más desfavorable, $\alpha = 5^g$.
Error en la medida de la altura del aparato. Tomamos: $e_i = 0{,}01m$
Error de falta de verticalidad de la mira. Suponemos una inclinación máxima de la mira de $\beta = 1^g$ y una altura máxima del prisma de $2m$:

$$e_m = Ap\ sen\,\beta\ \ tg\ (\ \alpha + \beta\ ) = 0{,}00297m$$

El error altimétrico total de una visual con la estación total será:

$$E_v = \sqrt{e_t^2 + e_i^2 + e_m^2} = 0{,}0190m$$

- Calculamos el error acumulado en un itinerario por pendientes, con *6* tramos de *250m*, suponiendo que cada desnivel se mide dos veces, una con visual de frente y otra con visual de espaldas:

$$\xi_i = \frac{E_v}{\sqrt{2}}\sqrt{6} = 0{,}0329m$$

- Los errores altimétricos correspondientes a la red de detalle son:

$$e_t = D\ [\ (\ 1 + \frac{E_d}{D}\ )\ \ tg\ (\ \alpha + E_c\ ) - tg\ \alpha\ ] = 0{,}0185m$$

como en los itinerarios por pendientes, pero con una distancia máxima $D = 300m$. Los errores e_i y e_m toman los mismos valores que en dichos itinerarios. El error total de una visual en radiación se calcula:

$$\xi_r = \sqrt{e_t^2 + e_i^2 + e_m^2} = 0{,}0212m$$

Se observa que ninguno de los errores de esta red supera la tolerancia fijada.

<u>Acumulación de errores. Comprobación final.</u>

- Suponemos que el error de cierre de los itinerarios de nivelación geométrica se compensa repartiéndolo entre sus *200* tramos. El error correspondiente a cada uno de los puntos del itinerario será:

$$\xi_v = \frac{\xi_n}{\sqrt{200}} + \frac{\xi_n}{200} = 0{,}00196m$$

- Cada itinerario por pendientes se encuadra entre dos vértices de la triangulación, levantados mediante la red de nivelación por alturas. Por tanto, el máximo error acumulado de estas dos redes será:

$$e = \sqrt{\xi_v^2 + \xi_v^2 + \xi_i^2} = 0{,}033m$$

Como en los ejercicios anteriores, admitimos que el máximo error altimétrico absoluto en las estaciones de los itinerarios será la suma del error que corresponde a cada punto y de la corrección:

$$\varepsilon = e' + c' = \frac{e}{\sqrt{n}} + \frac{e}{n} = 0{,}019m$$

• Puesto que la radiación se realiza desde las estaciones de los itinerarios, el máximo error absoluto en los puntos radiados y, por tanto, en el levantamiento, será:

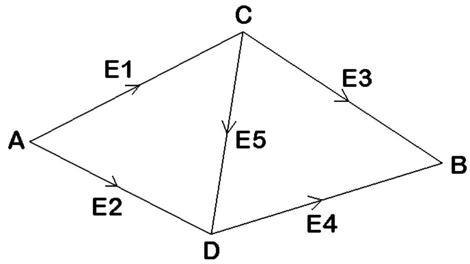
$$E = \sqrt{\varepsilon^2 + \xi_r^2} = 0{,}0285m$$

que resulta inferior a la tolerancia.

8. AJUSTE DE OBSERVACIONES POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

8.1) Se desea determinar de forma rigurosa las cotas de los puntos C y D, conociendo las de los puntos A y B, Z_A = 10 m y Z_B = 10,90 m. Para ello, estacionamos sucesivamente un nivel de línea en E1, E2, E3, E4 y E5, obteniendo los siguientes datos de campo:

Est.	***Punto visado***	***Lectura mira***
E1	***A***	***2,777***
	C	***2,284***
E2	***A***	***1,229***
	D	***1,524***
E3	***C***	***0,988***
	B	***0,591***
E4	***D***	***1,317***
	B	***0,123***
E5	***C***	***0,988***
	D	***1,784***



Calcula los valores de Z_C y Z_D aplicando el método de mínimos cuadrados

En la ecuación tipo del método de mínimos cuadrados para observaciones de desniveles:

$$dZ_2 - dZ_1 = Z_1^2 - (Z_1^2)' + v$$

dZ_1 y dZ_2 son las incógnitas, Z_1^2 es el valor observado del desnivel entre dos puntos *1* y *2* y $(Z_1^2)'$ es el valor calculado a partir de los valores aproximados de las cotas de los puntos desconocidos. En este ejercicio los puntos *A* y *B* son fijos y sus cotas no varían. Por tanto, las únicas incógnitas son las correcciones en los valores de las cotas de los puntos *C* y *D*, es decir dZ_C y dZ_D. Puesto que se determinan los desniveles de cinco tramos, uno desde cada punto de estación, el sistema estará compuesto por cinco ecuaciones.

- Calculamos los desniveles observados de los tramos *AC*, *AD*, *CB*, *DB* y *CD*, a partir de las lecturas de mira, en el sentido que indican las flechas en la figura:

$$Z_A^C = m_A - m_C = 0{,}493$$

$$Z_A^D = m_A - m_D = -0{,}295$$

$$Z_C^B = m_C - m_B = 0{,}397$$

$$Z_D^B = m_D - m_B = 1{,}194$$

$$Z_C^D = m_C - m_D = -0{,}796$$

- Los valores aproximados de las cotas de los puntos incógnita podemos obtenerlos resolviendo dos de las nivelaciones simples, por ejemplo:

$$Z_C' = Z_A + Z_A^C = 10 + 0{,}493 = 10{,}493m$$

$$Z_D' = Z_A + Z_A^D = 10 + (-0{,}295) = 9{,}705m$$

- Los valores estimados de los desniveles los obtenemos a partir de las cotas, fijas o aproximadas, de los puntos extremos de cada tramo:

$$(Z_A^C)' = Z_C' - Z_A = 10{,}493 - 10 = 0{,}493$$

$$(Z_A^D)' = Z_D' - Z_A = 9{,}705 - 10 = -0{,}295$$

$$(Z_C^B)' = Z_B - Z_C' = 10{,}90 - 10{,}493 = 0{,}407$$

$$(Z_D^B)' = Z_B - Z_D' = 10{,}90 - 9{,}705 = 1{,}195$$

$$(Z_C^D)' = Z_D' - Z_C' = 9{,}705 - 10{,}493 = -0{,}788$$

- A partir de los desniveles observados y de los estimados planteamos las cinco ecuaciones, con la estructura de la ecuación tipo. Como los puntos *A* y *B* son fijos, los valores de dZ_A y dZ_B son nulos. Por tanto, las ecuaciones quedan:

$$dZ_C = 0{,}493 - (0{,}493) + v_1 = 0 + v_1$$

$$dZ_D = -0{,}295 - (-0{,}295) + v_2 = 0 + v_2$$

$$-dZ_C = 0{,}397 - (0{,}407) + v_3 = -0{,}010 + v_3$$

$$-dZ_D = 1{,}194 - (1{,}195) + v_4 = -0{,}001 + v_4$$

$$-dZ_C + dZ_D = -0{,}796 - (-0{,}788) + v_5 = -0{,}008 + v_5$$

Y las matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad X = \begin{vmatrix} dZ_C \\ dZ_D \end{vmatrix} \qquad L = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}010 \\ -0{,}001 \\ -0{,}008 \end{vmatrix} \qquad V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{vmatrix}$$

Los resultados finales se obtienen:

$$A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^T A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad (A^T A)^{-1} = \begin{vmatrix} 0{,}375 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}375 \end{vmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = \begin{vmatrix} 0{,}375 & 0{,}125 & -0{,}375 & -0{,}125 & -0{,}250 \\ 0{,}125 & 0{,}375 & -0{,}125 & -0{,}375 & 0{,}250 \end{vmatrix}$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L = \begin{vmatrix} 0{,}0059 \\ -0{,}0004 \end{vmatrix}$$

- Finalmente las cotas compensadas son:

$$Z_C = Z_C' + dZ_C = 10{,}493 + 0{,}0059 = 10{,}4989$$

$$Z_D = Z_D' + dZ_D = 9{,}705 + (-0{,}0004) = 9{,}7046$$

8.2) Conocidas las coordenadas de las bases topográficas A, B y C, se estacionó en cada

una de ellos y se visó a un punto P.

Coordenadas:

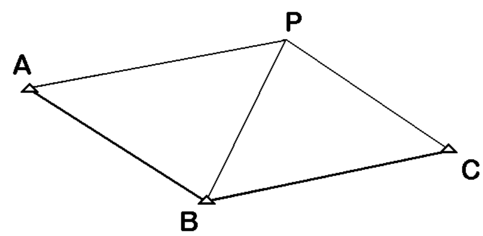
$X_A = 677.337{,}953m$	$Y_A = 4.163.808{,}427m$
$X_B = 673.679{,}144m$	$Y_B = 4.163.587{,}274m$
$X_C = 674.145{,}353m$	$Y_C = 4.163.688{,}744m$

Datos de campo:

Est.	Pto.	L.Acimutal
A	B	$112{,}0247^g$
	P	$63{,}2438^g$
B	C	$354{,}0461^g$
	P	296.8136^g
C	A	185.1098^g
	P	$214{,}5161^g$

Calcula las coordenadas planas del punto V.

Se trata de una intersección múltiple, por lo que disponemos de más observaciones que las estrictamente necesarias para resolverla. Por lo tanto, ajustaremos las observaciones por el método de mínimos cuadrados para encontrar la solución óptima.



- En primer lugar, calculamos unas coordenadas aproximadas del punto *P*. Para ello podemos aplicar el método ya conocido de intersección directa simple tomando, por ejemplo, los puntos *A* y *B*. Las coordenadas aproximadas obtenidas son:

$$X'_P = 673.835{,}415m \qquad Y'_P = 4.163.904{,}694m$$

Con estos valores y los valores conocidos de las coordenadas de *A*, *B* y *C*, calculamos las distancias y los acimutes aproximados correspondientes a las tres visuales:

$$(D_A^V)_{CAL} = 506{,}6910m$$
$$(D_B^V)_{CAL} = 353{,}8023m$$
$$(D_C^V)_{CAL} = 377{,}7512m$$
$$(\theta_A^P)' = 87{,}83079^g$$
$$(\theta_B^P)' = 29{,}12419^g$$
$$(\theta_C^P)' = 338{,}74105^g$$

- Los datos de campo se tomaron sin orientar el instrumento. A partir de ellos calcularemos los acimutes observados, teniendo en cuenta que:

$$\theta_A^P = Co_A + L_A^P = (\theta_A^B - L_A^B) + L_A^P$$

Para ello, calculamos los acimutes de los tramos *A-B*, *B-C* y *C-A*. Con esos acimutes y las correspondientes lecturas, calculamos las correcciones de orientación en las tres estaciones. Finalmente, con las correcciones y las lecturas de las visuales al punto *P*, calculamos los acimutes observados. Nótese que, aunque desde cada estación se han lanzado dos visuales, éstas actúan como una única observación pues una de ellas es a otro punto conocido y sólo se emplea para orientar. Los valores de los acimutes observados son:

$$\theta_A^P = 87,83074^g$$
$$\theta_B^P = 29,12430^g$$
$$\theta_C^P = 338,77486^g$$

- Las tres bases son puntos fijos, por lo que las únicas incógnitas son dX_P y dY_P. Planteamos las ecuaciones del método de mínimos cuadrados para observaciones de ángulos:

$$\frac{r^s}{(D_A^P)_{CAL}^2}\left[(Y_P'-Y_A)dX_P-(X_P'-X_A)dY_P\right]=\left[\theta_A^P-(\theta_A^P)'\right]^s+v_1^s$$
$$\frac{r^s}{(D_B^P)_{CAL}^2}\left[(Y_P'-Y_B)dX_P-(X_P'-X_B)dY_P\right]=\left[\theta_B^P-(\theta_B^P)'\right]^s+v_2^s$$
$$\frac{r^s}{(D_C^P)_{CAL}^2}\left[(Y_P'-Y_C)dX_P-(X_P'-X_C)dY_P\right]=\left[\theta_C^P-(\theta_C^P)'\right]^s+v_3^s$$

No olvidemos que todos los valores angulares deben ir expresados en segundos. r^s es el número de segundos centesimales de un radián. Las ecuaciones quedan:

$$238,7103052\ dX_P + (-1.233,54115)\ dY_P = -0,460269686 + v_1^s$$
$$1.614,332748\ dX_P + (-794,7621222)\ dY_P = 1,113073016 + v_2^s$$
$$963,4332586\ dX_P + 1.382,748679\ dY_P = 338,1276914 + v_3^s$$

y las matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 238,7103052 & -1.233,54115 \\ 1.614,332748 & -794,7621222 \\ 963,4332586 & 1.382,748679 \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} -0,460269686 \\ 1,113073016 \\ 338,1276914 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} dX_P \\ dY_P \end{vmatrix}$$

- Solución: obtenemos los valores de las incógnitas mediante

$$X = (A^tA)^{-1}A^tL$$

Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$dX_P = 0,099439577m \qquad dY_P = 0,12093177m$$

y los valores obtenidos para las coordenadas del punto incógnita serán:

$$X_P = X'_P + dX_P = 673.835,5144m$$
$$Y_P = Y'_P + dY_P = 4.163.904,8149m$$

En el caso de observaciones de ángulos la solución final se obtiene por iteraciones, tomando como nuevas coordenadas aproximadas de *P* los valores que acabamos de calcular. Se repite el proceso completo hasta que las diferencias entre los resultados de las iteraciones sean despreciables:

<u>Segunda iteración:</u>

$$(D_A^V)_{CAL} = 506,8116m \qquad (D_B^V)_{CAL} = 353,9547m \qquad (D_C^V)_{CAL} = 377,7388m$$
$$(\theta_A^P)' = 87,81825^g \qquad (\theta_B^P)' = 29,13063^g \qquad (\theta_C^P)' = 338,74105^g$$
$$\theta_A^P = 87,83074^g \qquad \theta_B^P = 29,12430^g \qquad \theta_C^P = 338,76735^g$$

$$A = \begin{vmatrix} 238,8964273 & -2.528,316124 \\ 1.613,557229 & -794,5830852 \\ 964,0361859 & 1.382,395964 \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} 124,946942 \\ -63,2757628 \\ 75,097393 \end{vmatrix}$$

$$dX_P = -0{,}0027775m \qquad dY_P = -0{,}01828256m$$

Los nuevos valores obtenidos para las coordenadas del punto incógnita serán:

$$X_P = X'_P + dX_P = 673.835{,}5117m$$
$$Y_P = Y'_P + dY_P = 4.163.904{,}7966m$$

<u>Tercera iteración:</u>

$$(D_A^V)_{CAL} = 506{,}8054m \qquad (D_B^V)_{CAL} = 353{,}9371m \qquad (D_C^V)_{CAL} = 377{,}7306m$$
$$(\theta_A^P)' = 87{,}82044^g \qquad (\theta_B^P)' = 29{,}13163^g \qquad (\theta_C^P)' = 338{,}76455^g$$
$$\theta_A^P = 87{,}83074^g \qquad \theta_B^P = 29{,}12430^g \qquad \theta_C^P = 338{,}76735^g$$

$$A = \begin{vmatrix} 238,\ 8569615 & -2.528,\ 553873 \\ 1.613,\ 625057 & -794,\ 6481244 \\ 963,\ 9963619 & 1.382,\ 468225 \end{vmatrix} \qquad L = \begin{vmatrix} 103{,}064146 \\ -73{,}3216267 \\ 103{,}04934 \end{vmatrix}$$

$$dX_P = 0{,}000543983m \qquad dY_P = -0{,}00666663m$$

Los nuevos valores obtenidos para las coordenadas del punto incógnita serán:

$$X_P = X'_P + dX_P = 673.835{,}5122m$$
$$Y_P = Y'_P + dY_P = 4.163.904{,}7900m$$

<u>Cuarta iteración:</u>

$$(D_A^V)_{CAL} = 506{,}8047m \qquad (D_B^V)_{CAL} = 353{,}9314m \qquad (D_C^V)_{CAL} = 377{,}7263m$$
$$(\theta_A^P)' = 87{,}82127^g \qquad (\theta_B^P)' = 29{,}13225^g \qquad (\theta_C^P)' = 338{,}76455^g$$
$$\theta_A^P = 87{,}83074^g \qquad \theta_B^P = 29{,}12430^g \qquad \theta_C^P = 338{,}76369^g$$

$$A = \begin{vmatrix} 238,\ 8411293 & -2.528,\ 63866 \\ 1.613,\ 64352 & -794,\ 6766659 \\ 963,\ 9883563 & 1.382,\ 496976 \end{vmatrix} \qquad L = \begin{vmatrix} 94,.7127525 \\ -79{,}4971364 \\ 111{,}741446 \end{vmatrix}$$

$$dX_P = 0{,}000198564m \qquad dY_P = -0{,}00243125m$$

Los nuevos valores obtenidos para las coordenadas del punto incógnita serán:

$$X_P = X'_P + dX_P = 673.835{,}5124m$$
$$Y_P = Y'_P + dY_P = 4.163.904{,}7876m$$

Puesto que las diferencias dX_P y dY_P son ya muy pequeñas, daremos como definitivos los valores obtenidos en esta última iteración.