2. COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES

2.1) Calcula las coordenadas totales de los puntos 1, 2, 3, 4 y 5, tomando como origen el punto O, conociendo las coordenadas parciales siguientes:

de 1 respecto a O:	***(20,40 N***	***34,70 E)***
de 2 respecto a 1:	***(32,80 S***	***5,60 E)***
de 3 respecto a 2:	***(15,20 S***	***22,30 O)***
de 4 respecto a 3:	***(8,90 N***	***41,50 O)***
de 5 respecto a 4:	***(18,40 N***	***19,10 E)***

Al tomar como origen de coordenadas el punto *O*, las coordenadas absolutas de *1* coinciden con sus coordenadas relativas respecto a *O*:

$$X_1 = 34{,}70\ E = +34{,}70$$
$$Y_1 = 20{,}40\ N = +20{,}40$$

Para los demás puntos realizaremos un arrastre de coordenadas, teniendo en cuenta que la coordenada absoluta de un punto se obtiene sumando a la coordenada absoluta de otro punto la coordenada parcial del primero respecto al segundo:

$$X_2 = X_1^2 + X_1 = 5{,}60\ E + 34{,}70\ E = 5{,}60 + 34{,}70 = 40{,}30 = 40{,}30\ E$$
$$Y_2 = Y_1^2 + Y_1 = 32{,}80\ S + 20{,}40\ N = -32{,}80 + 20{,}40 = -12{,}40 = 12{,}40\ S$$

$$X_3 = X_2^3 + X_2 = 22{,}30\ O + 40{,}30\ E = -22{,}30 + 40{,}30 = 18{,}00 = 18{,}00\ E$$
$$Y_3 = Y_2^3 + Y_2 = 15{,}20\ S + 12{,}40\ S = -15{,}20 - 12{,}40 = -27{,}60 = 27{,}60\ S$$

$$X_4 = X_3^4 + X_3 = 41{,}50\ O + 18{,}00\ E = -41{,}50 + 18{,}00 = -23{,}50 = 23{,}50\ O$$
$$Y_4 = Y_3^4 + Y_3 = 8{,}90\ N + 27{,}60\ S = 8{,}90 - 27{,}60 = -18{,}70 = 18{,}70\ S$$

$$X_5 = X_4^5 + X_4 = 19{,}10\ E + 23{,}50\ O = 19{,}10 - 23{,}50 = -4{,}40 = 4{,}40\ O$$
$$Y_5 = Y_4^5 + Y_4 = 18{,}40\ N + 18{,}70\ S = 18{,}40 - 18{,}70 = -0{,}30 = 0{,}30\ S$$

2.2) Las coordenadas de dos puntos A y B respecto al origen de coordenadas O son:

$X_O^A = 1.120$	$Y_O^A = 2.600$	$Z_O^A = 117m$
$X_O^B = 1.870$	$Y_O^B = 3.750m$	$Z_O^B = 98m$

Calcula las coordenadas parciales de B respecto a A. Dadas las coordenadas de A en otro sistema de coordenadas, centrado en O1 y orientado como el anterior:

$X_{O1}^A = 2.740m$	$Y_{O1}^A = 1.460m$	$Z_{O1}^A = 220m$

calcula las coordenadas de B en este nuevo sistema.

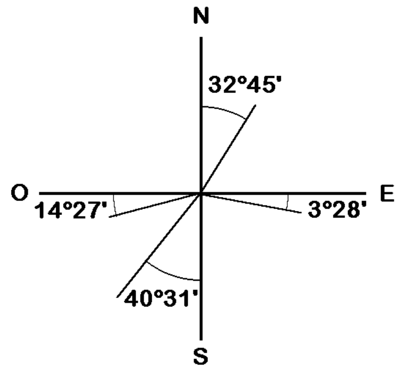
- Coordenadas parciales de *B* respecto a *A*:

$$X_A^B = X_O^B - X_O^A = 1.870 - 1.120 = 750m$$
$$Y_A^B = Y_O^B - Y_O^A = 3.750 - 2.600 = 1.150m$$
$$Z_A^B = Z_O^B - Z_O^A = 98 - 117 = -19m$$

- Coordenadas de *B* en el sistema *O1*:

$$X_{O1}^{B} = X_{A}^{B} + X_{O1}^{A} = 750 + 2.740 = 3.490m$$
$$Y_{O1}^{B} = Y_{A}^{B} + Y_{O1}^{A} = 1.150 + 1.460 = 2.610m$$
$$Z_{O1}^{B} = Z_{A}^{B} + Z_{O1}^{A} = -19 + 220 = 201m$$

2.3) Los rumbos al cuadrante y ejes verdaderos más cercanos de varias visuales son:
a) N - 32°45' - E
b) S - 40°31' - O
c) E - 3°28' - S
d) O - 14°27' - S
Calcula el acimut correspondiente a cada visual.



La forma de calcular los acimutes se deduce de la figura:

a) $\theta = 32^{o}45'$

b) $\theta = 180^{o} + 40^{o}31' = 220^{o}31'$

c) $\theta = 90^{o} + 3^{o}28' = 93^{o}28'$

d) $\theta = 270^{o} - 14^{o}27' = 255^{o}33'$

2.4) Los acimutes correspondientes a varias visuales son:
a) $78^{g}27^{m}$ b) $133^{g}80^{m}$ c) $165^{g}46^{m}$ d) $343^{g}67^{m}$
Calcula los rumbos al cuadrante y ejes verdaderos más cercanos.

Operamos a la inversa que en el ejercicio anterior:

a) $100^{g} - 78,27^{g} = 21,73^{g}$

$E - 21^{g}73^{m} - N$

b) $133,80^{g} - 100^{g} = 33,80^{g}$

$E - 33^{g}80^{m} - S$

c) $200^{g} - 165,46^{g} = 34,54^{g}$

$S - 34^{g}54^{m} - E$

d) $343,67^{g} - 300^{g} = 43,67^{g}$

$O - 43^{g}67^{m} - N$

2.5) Calcula los acimutes de las alineaciones formadas por el origen de coordenadas y cada uno de los puntos siguientes:
a) A (317,262 ; 415,694)
b) B (190,773 ; -17,525)
c) C (-123,687 ; -314,922)
d) D (-78,879 ; 144,571)
y las distancias reducidas de cada punto al origen.

Según el cuadrante en que se sitúa cada uno de los puntos, calculamos los acimutes con las expresiones siguientes:

a) Primer cuadrante:

$$\theta_O^A = arc\ tg \frac{|\ X_O^A\ |}{|\ Y_O^A\ |} = arc\ tg \frac{317,262}{415,694} = 41,5014^g$$

$$D_{OA} = \sqrt{(\ X_O^A\ )^2 + (\ Y_O^A\ )^2} = 522,931m$$

b) Segundo cuadrante:

$$\theta_O^B = 200^g - arc\ tg \frac{|\ X_O^B\ |}{|\ Y_O^B\ |} = 200^g - arc\ tg \frac{190,773}{17,525} = 105,832^g$$

También:

$$\theta_O^B = 100^g + arc\ tg \frac{|\ Y_O^B\ |}{|\ X_O^B\ |} = 100^g + arc\ tg \frac{17,525}{190,773} = 105,832^g$$

$$D_{OB} = \sqrt{(\ X_O^B\ )^2 + (\ Y_O^B\ )^2} = 191,576m$$

c) Tercer cuadrante:

$$\theta_O^C = 200^g + arc\ tg \frac{|\ X_O^C\ |}{|\ Y_O^C\ |} = 300^g - arc\ tg \frac{|\ Y_O^C\ |}{|\ X_O^C\ |} = 223,825^g$$

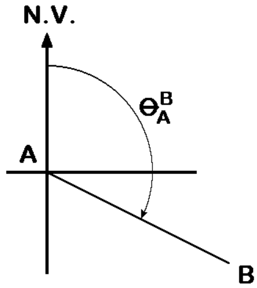
$$D_{OC} = \sqrt{(\ X_O^C\ )^2 + (\ Y_O^C\ )^2} = 338,341m$$

d) Cuarto cuadrante:

$$\theta_O^D = 400^g - arc\ tg \frac{|\ X_O^D\ |}{|\ Y_O^D\ |} = 300^g + arc\ tg \frac{|\ Y_O^D\ |}{|\ X_O^D\ |} = 368,203^g$$

$$D_{OD} = \sqrt{(\ X_O^D\ )^2 + (\ Y_O^D\ )^2} = 164,690m$$

2.6) Calcula el acimut de la alineación formada por dos puntos A y B, de coordenadas:
A (1.844,324 ; 3.026,778) B (2.711,124 ; 2.215,439)
Calcula también la distancia reducida entre ambos puntos.



- Para calcular el acimut θ_A^B suponemos que el origen de coordenadas se traslada al punto *A* y determinamos en qué cuadrante se sitúa *B* con relación a este nuevo sistema de ejes:

$$X_B > X_A \qquad Y_B < Y_A$$

Por tanto, *B* se sitúa en el segundo cuadrante con relación a *A*. La expresión a emplear en este caso es:

$$\theta_A^B = 200^g - arc\ tg \frac{|\ X_B - X_A\ |}{|\ Y_B - Y_A\ |} = 200^g - arc\ tg \frac{866,800}{811,339} = 147,897^g$$

O bien:

$$\theta_A^B = 100^g + arc\ tg \frac{|\ Y_B - Y_A\ |}{|\ X_B - X_A\ |} = 100^g + arc\ tg \frac{811,339}{866,800} = 147,897^g$$

Si necesitamos calcular el acimut recíproco θ_B^A, sabemos que *A* se sitúa en el cuarto cuadrante con relación a *B*. Para calcular un acimut a partir de su recíproco haremos:

$$\theta_B^A = \theta_A^B \pm 200^g$$

siempre que pueda despreciarse la convergencia de meridianos. En nuestro caso:

$$\theta_B^A = \theta_A^B + 200^g = 147,897^g + 200^g = 347,897^g$$

En este caso sumamos 200^g, ya que si los restamos, el resultado sería negativo.

- La distancia reducida vale:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 1.187,271m$$

2.7) *Las coordenadas de dos puntos A y B son:*

A (X_A = 2.348,765 ; Y_A = 3.437,489 ; Z_A = 189,623)

B (X_B = 1.189,769 ; Y_B = 1.815,275 ; Z_B = 177,545)

Calcula la distancia natural y la distancia reducida entre dichos puntos; calcular el acimut de la alineación que forman.

- La distancia natural se calcula:

$$D_N = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} = 1.993,739m$$

La distancia reducida es la longitud de la proyección del segmento *AB* sobre el plano horizontal:

$$D_R = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 1.993,703m$$

- Para calcular el acimut, determinamos en qué cuadrante se sitúa *B* con relación a un sistema de ejes centrado en *A*. Se trata del tercer cuadrante, ya que:

$$X_B < X_A \qquad Y_B < Y_A$$

Podemos aplicar la expresión:

$$\theta_A^B = 200^g + arc\ tg \frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} = 200^g + arc\ tg \frac{1.158,996}{1.622,214} = 239,493^g$$

2.8) *La distancia reducida entre dos puntos P y Q vale D_{PQ} = 714,320m y el acimut de la alineación que forman θ_P^Q = 121º15'38". Calcula las coordenadas cartesianas parciales de Q respecto a P y las de P respecto a Q.*

Para transformar las coordenadas polares (distancia reducida y acimut) en cartesianas, utilizamos las expresiones:

$$X_P^Q = D_{PQ}\ sen\ \theta_P^Q = 714,320\ sen\ 121^o15'38'' = 610,612m$$

$$Y_P^Q = D_{PQ}\ cos\ \theta_P^Q = 714,320\ cos\ 121^o15'38'' = -370,683m$$

Las coordenadas parciales de *P* respecto a *Q* tienen los mismos valores absolutos que las anteriores, pero signos contrarios:

$$X_Q^P = -X_P^Q = -610,612m$$

$$Y_Q^P = -Y_P^Q = 370,683m$$

También podemos calcularlas con las expresiones iniciales, puesto que conocemos el acimut θ_Q^P:

$$\theta_Q^P = \theta_P^Q \pm 180^o = 121^o15'38'' + 180^o = 301^o15'38''$$

$$X_Q^P = D_{PQ}\ sen\ \theta_Q^P$$

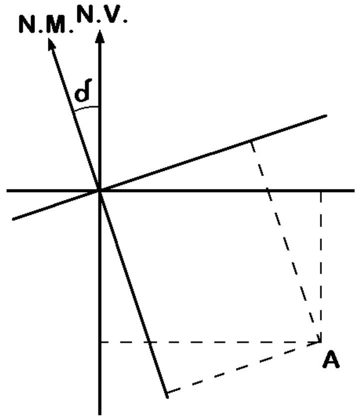
$$Y_Q^P = D_{PQ}\ cos\ \theta_Q^P$$

2.9) *Las coordenadas planas de un punto A respecto a los ejes magnéticos valen (182m ; -240m). Halla el valor de las coordenadas de ese mismo punto referidas al Norte geográfico y con el mismo origen. Declinación 8,50^g occidental.*

Los orígenes de los dos sistemas de coordenadas coinciden y, por tanto, la distancia reducida del punto *A* al origen de coordenadas, es la misma en ambos sistemas:

$$D_{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{182^2 + 240^2} = 301{,}20m$$

$$Rumbo_O^A = 200^g - arc\ tg\ \frac{|\ x\ |}{|\ y\ |} = 158{,}6953^g$$



Como la declinación es occidental:

$$\theta_O{}^A = Rumbo_O{}^A - \delta =$$

$$= 158{,}6953^g - 8{,}50^g = 150{,}1953^g$$

Coordenadas:

$$X_O{}^A = D_{OA}\ \ sen\ \theta_O{}^A =$$

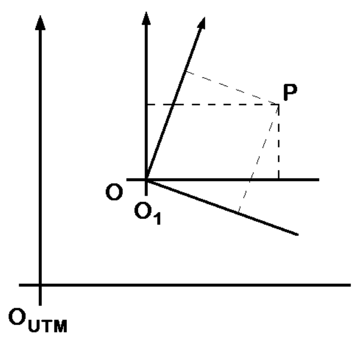
$$= 301{,}20\ \ sen\ 150{,}1953^g = 212{,}326m$$

$$Y_O{}^A = D_{OA}\ \ cos\ \theta_O{}^A =$$

$$= 301{,}20\ \ cos\ 150{,}1953^g = -213{,}633m$$

2.10) *Las coordenadas de un punto P en un sistema dado de ejes cartesianos son (236,43m ; 384,28m). Se sabe que el eje Y de dicho sistema tiene un acimut de 27,3^g y que las coordenadas planas de su origen O respecto al origen de coordenadas UTM son (1.815,32m ; 1.512,69m). Calcula las coordenadas de P referidas al sistema UTM.*

Para calcular las coordenadas de *P* respecto a O_{UTM} realizaremos dos operaciones: en primer lugar calcularemos las coordenadas de *P* respecto a un sistema de ejes centrado en *O*, pero referido al Norte geográfico; en segundo lugar realizaremos un arrastre de coordenadas para pasar de este origen al origen UTM.



- El sistema intermedio de ejes cartesianos tiene, por tanto, un origen O_1 que coincide con *O*, pero sus ejes están orientados como los ejes UTM.

Coordenadas de *P* en el sistema *O*:

$$X_O{}^P = 236{,}43m \qquad\qquad Y_O{}^P = 384{,}28m$$

$$D_{OP} = \sqrt{(\ X_O^P\ )^2 + (\ Y_O^P\ )^2} = 451{,}188m$$

Llamamos $\lambda_O{}^P$ al ángulo formado por la alineación *OP* y el eje *YY* del primer sistema de coordenadas, medido desde dicho eje y en el sentido de las agujas del reloj. Este ángulo no es propiamente un acimut, ya que no está referido a la meridiana, pero se calcula como si lo fuera:

$$\lambda_O{}^P = arc\ tg\ X_O{}^P / Y_O{}^P = arc\ tg\ 236{,}43/384{,}28 = 35{,}11^g$$

Para calcular las coordenadas de *P* en el sistema O_1, determinamos el acimut de la alineación formada por *P* y el origen O_1. El eje *YY* de este sistema sigue la dirección de la meridiana; el eje *YY* del sistema *O* forma con el del sistema O_1 un ángulo de $27{,}3^g$. El acimut que buscamos vale:

$$\theta_{O1}{}^P = \lambda_O{}^P + 27{,}3^g = 62{,}41^g$$

- La distancia no depende de la orientación del sistema de coordenadas cartesianas que adoptemos. Por consiguiente:

$$D_{OP1} = D_{OP} = 451,188m$$

Coordenadas de *P* respecto al sistema O_1.

$$X_{O1}^{P} = D_{OP1} \ \ sen\ \theta_{O1}^{P} = 451\ ,188 \ \ sen\ 62,41^{g} = 374,79m$$

$$Y_{O1}^{P} = D_{OP1} \ \ cos\ \theta_{O1}^{P} = 451,188 \ \ cos\ 62,41^{g} = 251,20m$$

Para pasar del sistema O_1 al UTM basta con realizar un arrastre de coordenadas, ya que ambos sistemas están orientados de la misma forma y sólo difieren en la posición del origen de coordenadas:

$$X_{UTM}^{O1} = X_{UTM}^{O} = 1.815,32m$$

$$Y_{UTM}^{O1} = Y_{UTM}^{O} = 1.512,69m$$

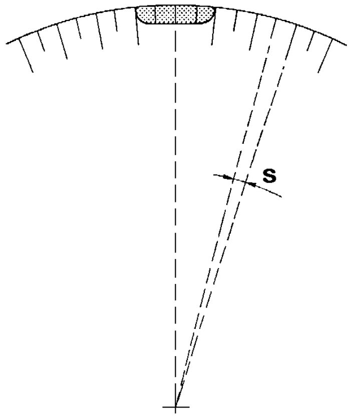
- Coordenadas de P respecto al origen UTM:

$$X_{UTM}^{P} = X_{UTM}^{O1} + X_{O1}^{P} = 1.815,32 + 374,79 = 2.190,11m$$

$$Y_{UTM}^{P} = Y_{UTM}^{O1} + Y_{O1}^{P} = 1.512,69 + 251,20 = 1.763,89m$$

3. INSTRUMENTOS TOPOGRÁFICOS

3.1) Calcula la sensibilidad de un nivel tórico cuyo radio de curvatura es de 50m, sabiendo que las divisiones están separadas 2mm.



Llamamos sensibilidad en un nivel tórico al ángulo *s*, expresado en segundos, que habría que girar para que la burbuja se desplace una división exacta.

$$R = 50m = 50.000mm$$

La relación entre el ángulo (*s*) y la distancia (*2mm*) se deduce de:

$$2mm \quad \text{———} \quad s''$$
$$2\pi R \quad \text{———} \quad 360 \cdot 60 \cdot 60$$
$$s'' = \frac{2\ \ 360\ \ 60\ \ 60}{2\ \ \pi\ \ 50.000} = 8,25''$$

3.2) Calcula el radio de curvatura de un nivel tórico cuya sensibilidad es de 30'', sabiendo que la separación entre divisiones es de 2mm.

Tal como vimos en el ejercicio anterior:

$$2mm \quad \text{———} \quad 30''$$
$$2\pi R \quad \text{———} \quad 360 \cdot 60 \cdot 60$$
$$R = \frac{2\ \ 360\ \ 60\ \ 60}{2\ \ \pi\ \ 30} = 13,75m$$

3.3) Se dispone de un nivel tórico de radio de curvatura 75m. Calcula su sensibilidad, en segundos sexagesimales y en segundos centesimales, sabiendo que la distancia entre divisiones es de 2mm.

Como en los ejercicios anteriores: $R = 75m = 75.000mm$

$$2mm \quad \text{———} \quad s''$$
$$2\pi R \quad \text{———} \quad 360 \cdot 60 \cdot 60$$
$$s'' = \frac{2\ \ 360\ \ 60\ \ 60}{2\ \ \pi\ \ 75.000} = 5,5''$$

$$2mm \quad \text{———} \quad s^s$$
$$2\pi R \quad \text{———} \quad 400 \cdot 100 \cdot 100$$
$$s^s = \frac{2\ \ 400\ \ 100\ \ 100}{2\ \ \pi\ \ 75.000} = 16,98^s$$

Comprobación:

$$s^s = \frac{s''\ \ 400\ \ 100\ \ 100}{360\ \ 60\ \ 60}$$

3.4) *Para verificar un nivel tórico, de 20m de radio de curvatura, se cala la burbuja en una posición determinada. A continuación se gira el nivel 180º, comprobando que la burbuja se ha desplazado tres divisiones. Determina la descorrección del nivel.*

La descorrección corresponde a la mitad del desplazamiento de la burbuja, es decir, a *1,5* divisiones. Si la distancia entre divisiones es de *2mm*, *1,5* divisiones equivalen a *3mm*:

$$3mm \;\text{———}\; \alpha''$$
$$2\pi R \;\text{———}\; 360 \cdot 60 \cdot 60$$

La descorrección α vale:

$$\alpha'' = \frac{3 \;\; 360 \;\; 60 \;\; 60}{2 \;\; \pi \;\; 20.000} = 30{,}94''$$

3.5) *Calcula la sensibilidad y la apreciación de un micrómetro, cuyo retículo divide cada grado centesimal del limbo en 10 partes, sabiendo que la distancia aparente entre dos divisiones consecutivas de dicho retículo es de 5mm.*

- La sensibilidad de un micrómetro se define como la décima parte de la menor división. Puesto que el retículo divide 1^g en diez partes, la menor división del micrómetro equivale a:

$$m = 1^g/10 = 0{,}1^g = 10^m$$

La sensibilidad será:

$$s = m/10 = 10^m/10 = 1^m$$

- La apreciación *a* coincide con la sensibilidad siempre que la décima parte de la menor división sea visible, es decir, su tamaño aparente sea mayor o igual que el límite de la percepción visual (*0,2mm*). En nuestro caso, la menor división se ve con un tamaño de *5mm* y su décima parte se verá con un tamaño de:

$$5mm/10 = 0{,}5mm > 0{,}2mm$$

Por tanto, en este caso:

$$a = s = 1^m$$

3.6) *Calcula la sensibilidad y la apreciación de un micrómetro cuyo retículo divide un grado sexagesimal en 60 partes. La distancia entre dos divisiones consecutivas del retículo es de 0,075mm. El sistema óptico del micrómetro es de 20 aumentos.*

- La menor división del micrómetro corresponde a:

$$m = 1^o/60 = 1'$$

La sensibilidad del micrómetro vale:

$$s = m/10 = 1'/10 = 6''$$

Cada división del retículo se aprecia con un tamaño aparente de:

$$0{,}075mm \cdot 20 \text{ aumentos} = 1{,}5mm$$

Por tanto, la décima parte de la menor división se aprecia con un tamaño aparente de:

$$1{,}5mm/10 = 0{,}15mm < 0{,}2mm$$

En este caso la apreciación no coincide con la sensibilidad.

- Para calcular la apreciación, determinamos cuál es la fracción de la menor división que se aprecia con un tamaño aparente de *0,2mm*:

$$1,5/0,2 = 7,5$$

La apreciación se obtiene dividiendo la graduación correspondiente a la menor división por este valor:

$$a = 1'/7,5 = 8''$$

3.7) *Calcula la sensibilidad y la apreciación de un limbo centesimal dividido en 800 partes, cuyo radio mide 20cm.*

- Cada una de las divisiones del limbo corresponde a:

$$400^g/800 = 0,5^g = 50^m$$

Sensibilidad:

$$s = 50^m/10 = 5^m$$

- Para determinar si la apreciación coincide con la sensibilidad, calculamos la distancia entre dos divisiones consecutivas. Podemos admitir que esta distancia equivale a la cuerda correspondiente al ángulo central de 50^m:

$$d = 2\ R\ \ sen\ (50^m/2) = 0,157cm = 1,57mm$$

La décima parte de la menor división tiene, por tanto, un tamaño de:

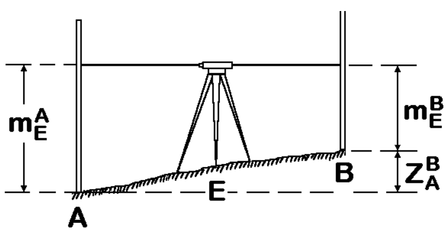
$$d/10 = 1,57mm/10 = 0,157mm < 0,2mm$$

La apreciación no coincide con la sensibilidad.
Apreciación:

$$1,57/0,2 = 7,85$$

$$a = 50^m/7,85 = 6,37^m$$

3.8) *Para determinar el desnivel entre dos puntos A y B se estaciona un nivel en un punto intermedio E. Visando el punto A se determina una lectura de mira m_A = 1,572. Visando el punto B se determina m_B = 0,753. Calcula el desnivel de B respecto a A y el de A respecto a B. Determina la altitud del punto B, sabiendo que la altitud del punto A es 187,232m.*



Aplicando el método del punto medio, el desnivel se calcula:

$$Z_A^B = m_A - m_B = 1,572 - 0,753 = 0,819m$$

El desnivel Z_B^A tendrá el mismo valor absoluto que el Z_A^B y signo contrario:

$$Z_B^A = -Z_A^B = -0,819m$$

La altitud es la coordenada *Z* absoluta. Por tanto:

$$Z_B = Z_A + Z_A^B = 187,232 + 0,819 = 188,051m$$

3.9) *Para determinar el desnivel entre dos puntos E y P se estacionó un nivel en el primero, visando una mira situada en el segundo. La lectura fue 1,862m. Calcula el*

desnivel, sabiendo que la altura del aparato era 1,53m. Calcula la altitud del punto P si la altitud de E es Z_E = 224,651m.

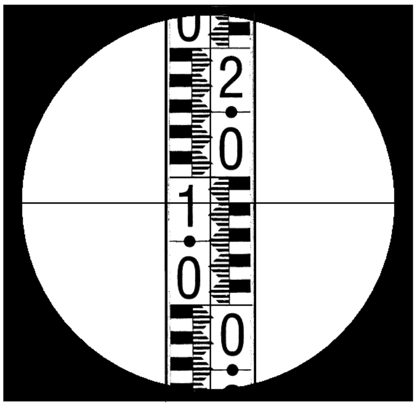
El desnivel viene dado por la expresión:

$$Z_E^P = i - m = 1{,}53 - 1{,}862 = -0{,}332m$$

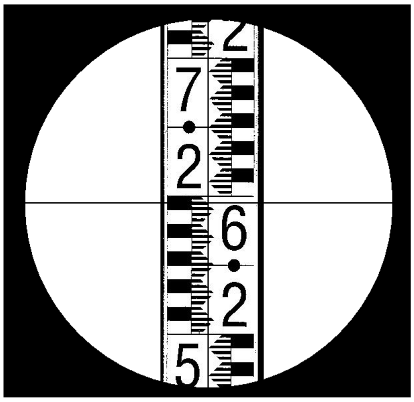
Altitud de *P*:

$$Z_P = Z_E + Z_E^P = 224{,}651 + (-0{,}332) = 224{,}319m$$

3.10) Se ha estacionado un nivel automático en un lugar intermedio entre los puntos A y B. Se visó a ambos puntos y se observaron las lecturas de mira de las figuras adjuntas. Calcula la altitud de B sabiendo que la de A es 143,286m.



punto A



punto B

Las lecturas de mira, según las figuras, son:

$$m_A = 0{,}180m$$

$$m_B = 2{,}695m$$

Por tanto:

$$Z_A^B = m_A - m_B = 0{,}180 - 2{,}695 = -2{,}515m$$

$$Z_B = Z_A + Z_A^B = 143{,}286 + (-2{,}515) = 140{,}771m$$

3.11) Con un nivel de línea reversible, estacionado en un punto E, se visó una mira situada sucesivamente en los puntos A y B. Se tomaron dos lecturas de mira a cada punto, una con el anteojo en posición normal y otra tras girarlo 180º en torno al eje de colimación. En todos los casos, antes de realizar la lectura se procedió a calar la burbuja del nivel de coincidencia del aparato. Las lecturas tomadas fueron:

m_{A1} = 0,672m m_{A2} = 0,674m

m_{B1} = 0,725m m_{B2} = 0,727m

Determina el desnivel entre ambos puntos.

Los niveles de línea reversibles permiten eliminar las posibles descorrecciones (errores sistemáticos) realizando la doble lectura de mira y dando como resultado el promedio de las dos lecturas:

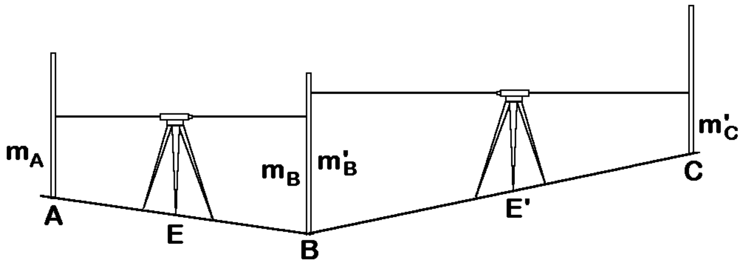
$$m_{cA} = \frac{m_{A1} + m_{A2}}{2} = \frac{0{,}672 + 0{,}674}{2} = 0{,}673m$$

$$m_{cB} = \frac{m_{B1} + m_{B2}}{2} = \frac{0{,}725 + 0{,}727}{2} = 0{,}726m$$

El desnivel vale:

$$Z_A^B = m_{cA} - m_{cB} = 0{,}673 - 0{,}726 = -0{,}053m$$

3.12) *Desde un punto E, intermedio entre los puntos A y B, se visa con un nivel una mira situada sucesivamente en A y en B. Las lecturas tomadas fueron: $m_A = 1{,}157$ $m_B = 1{,}760$. A continuación el nivel se estaciona en E', intermedio entre B y un tercer punto C, visando a una mira situada sucesivamente en B y en C. Las lecturas fueron $m_B' = 2{,}071$; $m_C' = 0{,}428$. Calcula el desnivel entre A y C.*



Calculamos los desniveles parciales:

$$Z_A^B = m_A - m_B = 1{,}157 - 1{,}760 = -0{,}603m$$

$$Z_B^C = m_B' - m_C' = 2{,}071 - 0{,}428 = 1{,}643m$$

Finalmente, por arrastre de coordenadas:

$$Z_A^C = Z_A^B + Z_B^C = -0{,}603 + 1{,}643 = 1{,}040m$$

3.13) *En un punto E_1 se estacionó un nivel, visando a un punto A de altitud 192,437m, y a otro punto B. Las lecturas de mira fueron:*

$m_A = 0{,}923m$ $m_B = 1{,}189m$

Posteriormente se estacionó el nivel en otro punto E_2, visando a los puntos B, C y D, con las siguientes lecturas de mira:

$m'_B = 1{,}423m$ $m'_C = 0{,}979m$ $m'_D = 1{,}635m$

Calcula las altitudes de los puntos B, C y D.

Calculamos el desnivel entre *A* y *B* y la altitud de *B*:

$$Z_A^B = m_A - m_B = 0{,}923 - 1{,}189 = -0{,}266m$$

$$Z_B = Z_A + Z_A^B = 192{,}437 - 0{,}266 = 192{,}171m$$

Desnivel entre *B* y *C* y altitud de *C*:

$$Z_B^C = m'_B - m'_C = 1{,}423 - 0{,}979 = 0{,}444m$$

$$Z_C = Z_B + Z_B^C = 192{,}171 + 0{,}444 = 192{,}615m$$

Desnivel entre *B* y *D* y altitud de *D*:

$$Z_B^D = m'_B - m'_D = 1{,}423 - 1{,}635 = -0{,}212m$$

$$Z_D = Z_B + Z_B^D = 192{,}171 - 0{,}212 = 191{,}959m$$

3.14) *Para calcular el desnivel entre dos puntos A y D se hace estación en tres puntos intermedios E_1, E_2 y E_3 con un nivel de línea, visando a una mira situada sucesivamente en A, B, C y D. Las lecturas tomadas fueron las siguientes:*

Estación	***Punto visado***	***Lectura mira***
E_1	***A***	***2,273***
E_1	***B***	***1,423***

E_2	***B***	***1,898***
E_2	***C***	***1,745***
E_3	***C***	***0,638***
E_3	***D***	***1,752***

Calcula el desnivel entre los puntos A y D.

Calculamos los desniveles parciales:

$$Z_A^B = m_A - m_B = 2,273 - 1,423 = 0,850m$$

$$Z_B^C = m'_B - m'_C = 1,898 - 1,745 = 0,153m$$

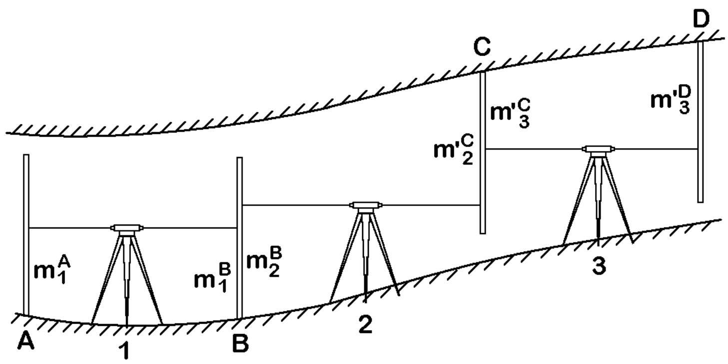
$$Z_C^D = m''_C - m''_D = 0,638 - 1,752 = -1,114m$$

El desnivel pedido viene dado por la expresión:

$$Z_A^D = Z_A^B + Z_B^C + Z_C^D$$

$$Z_A^D = 0,850 + 0,153 - 1,114 = -0,111m$$

3.15) Se ha realizado una nivelación geométrica a lo largo de una galería. Se parte del punto A, de cota 100,000m, y se pretende calcular la cota de los puntos B, C y D. Los puntos A y B estaban fijados en el piso de la galería, mientras que los puntos C y D corresponden al techo de la misma. En estos últimos las lecturas se tomaron con las miras en posición invertida y colgando del techo, tal como se aprecia en la figura adjunta. Calcula las cotas de los puntos B, C y D con las siguientes lecturas de mira:



$m_1^A = 1,527$	***$m_1^B = 1,573$***	***$m_2^B = 1,685$***
$m'_2{}^C = 1,439$	***$m'_3{}^C = 1,037$***	***$m'_3{}^D = 1,206$***

Calculamos el desnivel de cada uno de los tramos y la cota de cada uno de los puntos. En cada caso habrá que tener en cuenta si las miras apoyan en el piso o en el techo de la galería: cuando la mira cuelga del techo, en la expresión de cálculo del desnivel cambia el signo que corresponde a la lectura.

- Tramo *A-B*. Los dos puntos están en el piso:

$$Z_A^B = m_1^A - m_1^B = -0,046m$$

$$Z_B = Z_A + Z_A^B = 99,954m$$

- Tramo *B-C*. El punto *C* está en el techo de la galería y la mira está en posición invertida. Tal como se deduce de la figura:

$$Z_B^C = m_2^B + m'_2{}^C = 3,124m$$

$$Z_C = Z_B + Z_B^C = 103,078m$$

- Tramo *C-D*. Los dos puntos están en el techo de la galería. Por tanto:

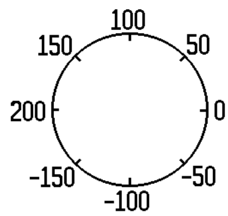
$$Z_C^D = -m'^C_3 + m'^D_3 = 0{,}169m$$
$$Z_D = Z_C + Z_C^D = 103{,}247m$$

3.16) *Estacionada en A una estación total cuyo eclímetro lee distancias cenitales, se visa a otro punto B, leyendo 57º38'. Tras girar 180º acimutalmente y dar la vuelta de campana al anteojo, se vuelve a visar el punto B, leyendo 309º10'. Determina la distancia cenital correcta y el error que se cometería si no se corrige el eclímetro.*

En eclímetros que leen distancias cenitales, la lectura cenital y el error del eclímetro vienen dados por las expresiones:

$$L = \frac{L_D + (360^o - L_I)}{2} = \frac{57^o\,38' + (360^o - 309^o\,10')}{2} = 54^o\,14'$$
$$e = \frac{L_D - (360^o - L_I)}{2} = \frac{57^o\,38' - (360^o - 309^o\,10')}{2} = 3^o\,24'$$

3.17) *Se dispone de un instrumento topográfico con un limbo vertical graduado como se indica en la figura. Se visa un punto, leyéndose un ángulo vertical de 47,3 g. Tras aplicar la regla de Bessel, se vuelve a colimar el mismo punto, leyéndose 151,5 g. Determina si el eclímetro está corregido y, caso de no estarlo, el error y la lectura cenital correcta.*

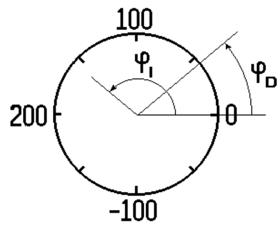


Para que esté corregido tendría que cumplirse:

$$\varphi_D + \varphi_I = 200^g$$

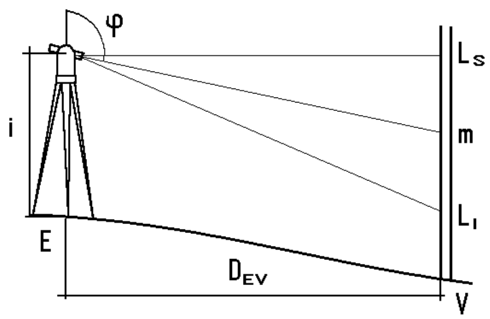
tal como se deduce de la figura adjunta.

Como no se cumple, el eclímetro está descorregido. En este caso, el error y la lectura correcta vienen dados por:



$$e = \frac{\varphi_D - (200 - \varphi_I)}{2} = -0{,}6^g$$
$$\varphi_C = \frac{\varphi_D + (200 - \varphi_I)}{2} = 47{,}9^g$$

3.18) *Con un taquímetro de K=100, estacionado en un punto E, se visa otro punto V, obteniendo las siguientes lecturas:*
Angulo acimutal: 187,74 g
Distancia cenital: 101,12 g
Lectura de mira: 0,347-0,871-1,395
Altura del aparato: 1,42m
Calcular las coordenadas parciales de V respecto a E, sabiendo que el taquímetro se orientó al N.V. antes de tomar las lecturas.



Aplicando la expresión de cálculo de distancias reducidas en estadimetría:

$$D_{EV} = K\,(L_s - L_i)\,sen^2\,\varphi =$$

$= 100\ (1{,}395\text{-}0{,}347)\ sen^2 101{,}12^g = 104{,}768m$

La tangente topográfica t se calcula: $t = D_{EV}/tg\ \varphi = -1'843m$

Al estar orientado el taquímetro, el ángulo acimutal medido coincide con el acimut de la visual. Coordenadas parciales:

$$X_E^V = D_{EV}\ \ sen\ \theta_E^V = 104{,}768\ \ sen\ 187{,}74^g = 20{,}052m$$
$$Y_E^V = D_{EV}\ \ cos\ \theta_E^V = 104{,}768\ \ cos\ 187{,}74^g = -102{,}831m$$
$$Z_E^V = t + i - m = -1{,}843 + 1{,}42 - 0'871 = -1{,}294m$$

3.19) Calcula distancias reducidas y tangentes topográficas entre un punto estación A y los puntos 1, 2 y 3, según los siguientes datos:

Estación	i	Pto.	L. Acimutal	D. Cenital	D. Natural	Ap
A	**1,35m**	**1**	**24,55^g**	**110,46^g**	**18,492m**	**1,42m**
		2	**120,35^g**	**80,25^g**	**45,340m**	**1,42m**
		3	**368,94^g**	**118,85^g**	**20,127m**	**1,42m**

Calcula las coordenadas parciales, respecto a A, de los puntos visados, suponiendo que el aparato estaba orientado.

Distancias reducidas:

$$D_{A1} = D_N\ \ sen\ \varphi = 18{,}492m\ \ sen\ 110{,}46^g = 18{,}243m$$
$$D_{A2} = 45{,}340m\ \ sen\ 80{,}25^g = 43{,}176m$$
$$D_{A3} = 20{,}127m\ \ sen\ 118{,}85^g = 19{,}251m$$

Tangentes topográficas:

$$t_A^1 = D_{A1}/tg\ \varphi = 18{,}243m\ /tg\ 110{,}46^g = -3{,}025m$$
$$t_A^2 = 43{,}176m\ /tg\ 80{,}25^g = 13{,}841m$$
$$t_A^3 = 19{,}251m\ /tg\ 118{,}85^g = -5{,}873m$$

Coordenadas parciales:

$$X_A^1 = D_{A1}\ \ sen\ \theta_A^1 = 18{,}492\ \ sen\ 24{,}55^g = 6{,}862m$$
$$Y_A^1 = D_{A1}\ \ cos\ \theta_A^1 = 18{,}492\ \ cos\ 24{,}55^g = 16{,}903m$$
$$Z_A^1 = t_A^1 + i - Ap = -3{,}025 + 1{,}35 - 1{,}42 = -3{,}095m$$

$$X_A^2 = D_{A2}\ \ sen\ \theta_A^2 = 43{,}176\ \ sen\ 120{,}35^g = 40{,}988m$$
$$Y_A^2 = D_{A2}\ \ cos\ \theta_A^2 = 43{,}176\ \ cos\ 120{,}35^g = -13{,}567m$$
$$Z_A^2 = t_A^2 + i - Ap = 13{,}841 + 1{,}35 – 1{,}42 = 13{,}771m$$

$$X_A^3 = D_{A3}\ \ sen\ \theta_A^3 = 19{,}251\ sen\ 368{,}94^g = -9{,}024m$$
$$Y_A^3 = D_{A3}\ \ cos\ \theta_A^3 = 19{,}251\ cos\ 368{,}94^g = 17{,}005m$$
$$Z_A^3 = t_A^3 + i - Ap = -5{,}872 + 1{,}35 – 1{,}42 = -5{,}943m$$

3.20) Con una estación total se visó, desde A, un punto P. Se obtuvieron los siguientes datos de campo:

Estación	i	Pto.	Acimut	D. reducida	Ap	t
A	**1,53**	**P**	**203,494^g**	**289,762m**	**1,88m**	**0,872m**

Calcula las coordenadas absolutas de P, conocidas las de A (X_A = 1.000 ; Y_A = 1.000 ; Z_A = 100).

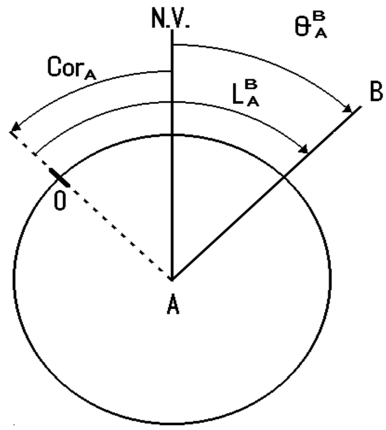
Coordenadas parciales:

$$X_A^P = D \text{ sen } \theta_A^P = 289{,}762m \text{ sen } 203{,}494^g = -15{,}895m$$
$$Y_A^P = D \cos \theta_A^P = 289{,}762m \cos 203{,}494^g = -289{,}326m$$
$$Z_A^1 = t_A^1 + i - Ap = 0{,}872m + 1{,}53m - 1{,}88m = 0{,}522m$$

Coordenadas absolutas:

$$X_P = X_A + X_A^P = 984{,}105m$$
$$Y_P = Y_A + Y_A^P = 710{,}674m$$
$$Z_P = Z_A + Z_A^P = 100{,}522m$$

3.21) Estacionada una estación total en un punto A, extremo de una base cuyo acimut es de 64,38 ^{g}, se leyó acimutalmente 144,57 ^{g} al visar al otro extremo B de dicha base. A continuación se visó a otro punto C, tomándose las siguientes lecturas: Lectura acimutal = 328,74 ^{g} Distancia reducida = 237,476m Altura prisma = 1,70m Tangente topográfica = 24,482m Altura instrumento = 1,28m Calcula las coordenadas parciales del punto C.



Denominamos corrección de orientación, Cor_A, a la diferencia entre un acimut y la lectura acimutal correspondiente. La corrección de orientación representa el ángulo que habría que girar el limbo horizontal para que su división cero correspondiera al Norte verdadero, es decir, para orientarlo.

$Cor_A = \theta_A^B - L_A^B = 64{,}38 - 144{,}57 = -80{,}19^g$

Todas las visuales lanzadas desde la estación A corresponden a la misma corrección de orientación. Por tanto:

$$\theta_A^C = Cor_A + L_A^C = -80{,}19 + 328{,}74 = 248{,}55^g$$

Una vez calculado el acimut, podemos aplicar las fórmulas:

$$X_A^C = D_{AC} \text{ sen } \theta_A^C = 237{,}476 \text{ sen } 248{,}55^g = -164{,}053m$$
$$Y_A^C = D_{AC} \cos \theta_A^C = 237{,}476 \cos 248{,}55^g = -171{,}702m$$
$$Z_A^C = t + i - Ap = 24{,}482 + 1{,}28 - 1{,}70 = 24{,}062m$$

3.22) Con una estación total se determinó la distancia natural entre el punto de estación E y otro punto A, que fue 279,885m. Calcula las coordenadas planas de A respecto a E, sabiendo que el instrumento estaba orientado y que las lecturas angulares fueron: Angulo acimutal: 84,732 ^{g} Angulo vertical: 97,323 ^{g}

Para reducir la distancia natural multiplicamos por el coseno de la altura de horizonte o por el seno de la distancia cenital:

$$D_{EA} = D_N \cos \alpha = D_N \text{ sen } \varphi = 279{,}885 \text{ sen } 97{,}323^g = 279{,}638m$$

Como la estación total estaba orientada:

$$\theta_E^A = L_E^A = 84{,}732^g$$

Coordenadas planas:

$$X_E^A = D_{EA} \text{ sen } \theta_E^A = 279{,}638 \text{ sen } 84{,}732^g = 271{,}634m$$

$$Y_E^A = D_{EA} \ \cos \theta_E^A = 279{,}638 \ \cos 84{,}732^g = 66{,}424m$$

3.23) Calcula los errores a priori en la medida de ángulos y de distancias para una visual horizontal (α = 0^g), a una distancia de 200m, considerando que el prisma no se puede observar con claridad, lanzada con una estación total cuyas características son las siguientes:

Plomada láser; prisma sobre jalón dotado de nivel esférico
Altura de prisma: Ap = 1,5m
Precisión del estabilizador del compensador del nivel electrónico: P_e = 20”
Número de aumentos del anteojo: A = 30
Precisión del dispositivo de lectura de ángulos, según el fabricante, p = 15^s
Error en la medida de la distancia: e_d = 3mm+3ppm

Calcula los errores angulares en segundos centesimales y el de distancia en metros.

Errores angulares:

- Verticalidad: el valor de P_E viene dado en segundos sexagesimales, que hay que transformar en centesimales al calcular los errores:

$$e_{vc} = P_e = 20'' = 20 \frac{400\,100\,100}{360\,60\,60} = 61{,}73^s$$

$$e_{va} = \frac{P_e}{4} = 5'' = 5 \frac{400\,100\,100}{360\,60\,60} = 15{,}43^s$$

- Dirección: como la estación total está provista de plomada láser y el jalón lleva nivel esférico, tomamos $e_e + e_p = 0{,}0125m$. La distancia a medir es de *200m*:

$$e_{da} = \frac{e_e + e_p}{D} \ r^s = \frac{0{,}0125}{200} 636.620 = 39{,}79^s$$

- Puntería: tomamos la expresión correspondiente al caso en que el prisma no se pueda observar con claridad. El resultado de la expresión, segundos sexagesimales, hay que transformarlo en centesimales:

$$e_{pc} = e_{pa} = \frac{50''}{A} \ (1 + \frac{4A}{100}) = 3{,}67'' \qquad 3{,}67 \frac{400\ 100\ 100}{360\ 60\ 60} = 11{,}32^s$$

- Lectura:

$$e_{lc} = e_{la} = \frac{2}{3} p = 10^s$$

- Errores angulares totales:

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2} = 45{,}3^s$$

$$E_c = \sqrt{e_{vc}^2 + e_{pc}^2 + e_{lc}^2} = 63{,}6^s$$

Errores en distancia:

- Error en la medida de la distancia: la expresión del error incluye una parte fija y otra que depende de la distancia *D*:

$$e_d = 3mm + 3 \frac{D}{1.000} = 3mm + 3 \frac{200}{1.000} = 3{,}6mm = 0{,}0036m$$

- Error de dirección (e_e y e_p): tomamos los valores que corresponden, respectivamente, a plomada láser y a jalón:

$$e_e = 0{,}0025m$$
$$e_p = 0{,}01m$$

- Error de inclinación del jalón: tomamos para β el valor que corresponde al empleo de jalón dotado de nivel esférico y $Ap = 1{,}5m$

$$e_i = \frac{Ap\ sen\,\beta}{cos\ \alpha} = \frac{1{,}5\ sen\,1^g}{cos\,0^g} = 0{,}024m$$

- Error total en distancia:

$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_i^2} = 0{,}026m$$

3.24) Calcula los errores a priori al medir el desnivel con una visual de inclinación $\alpha = 5^g$, a una distancia de 200m, considerando que el prisma no se puede observar con claridad, con una estación total cuyas características son las del ejercicio anterior:

Empezamos por calcular los errores en distancia E_d y en la medida de ángulos verticales E_c. El segundo, puesto que las circunstancias de la medición son idénticas a las del ejercicio anterior, valdrá:

$$E_c = 63{,}6^s$$

Para el error en distancia, el único cambio respecto al ejercicio anterior está en la inclinación de la visual α. Por tanto:

$$e_d = 0{,}0036m$$
$$e_e = 0{,}0025m$$
$$e_p = 0{,}01m$$
$$e_i = \frac{Ap\ sen\,\beta}{cos\ \alpha} = \frac{1{,}5\ sen\,1^g}{cos\,5^g} = 0{,}024m$$
$$E_d = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_i^2} = 0{,}026m$$

- Error por visuales inclinadas y en la medida de la distancia:

$$e_t = D\ [\ (1 + \frac{E_d}{D})\ tg\,(\alpha + E_c) - tg\ \alpha\ ] = 0{,}022m$$

- Error en la medida de la altura de aparato: se considera $e_i = 0'01m$
- Error de verticalidad del prisma: tomamos $\beta = 1^g$, ya que el jalón va provisto de nivel esférico:

$$e_m = Ap\ \ sen\,\beta\ \ tg\ (\alpha + \beta) = 0{,}0022m$$

- Error total en nivelación:

$$E_V = \sqrt{e_t^2 + e_i^2 + e_m^2} = 0{,}024m$$

3.25) Calcula los errores a priori que se producirían al lanzar una visual con un nivel automático cuyas características son:

precisión del dispositivo de nivelación, según el fabricante: $P_E = 1^s$
número de aumentos del anteojo: A = 25

- Error de horizontalidad del eje de colimación: tomamos el valor que nos proporciona el fabricante:

$$e_h = P_E = 1^s$$

- Error de puntería: viene expresado en segundos sexagesimales que vamos a transformar en centesimales:

$$e_p = \frac{50''}{A}\ (1 + \frac{4A}{100}) = 4{,}0'' \qquad 4{,}5\frac{400\ 100\ 100}{360\ 60\ 60} = 13{,}35^s$$

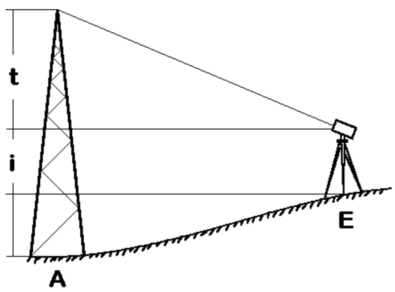
- Error total:

$$E_n = \sqrt{e_h^2 + e_p^2} = 12{,}38^s$$

3.26) Para determinar la altura de una antena se estacionó un teodolito, visando al punto más alto de la misma y leyendo una distancia cenital de 80,49^g. Se sabe que la distancia reducida entre la antena y el punto de estación era 136,52m, que la altura del aparato era 1,35m y que las cotas de la base de la antena y del punto de estación son, respectivamente, 281,32m y 286,77m. Calcula la altura de la antena.

De la figura se deduce:

$$h = t + i + Z_A^E$$



Tangente topográfica:

$$t = D/tg\ \varphi = \frac{136{,}52}{tg\ 80{,}49^g} = 43{,}20m$$

Desnivel:

$$Z_A^E = Z_E - Z_A = 286{,}77 - 281{,}32 = 5{,}45m$$

Altura de la antena:

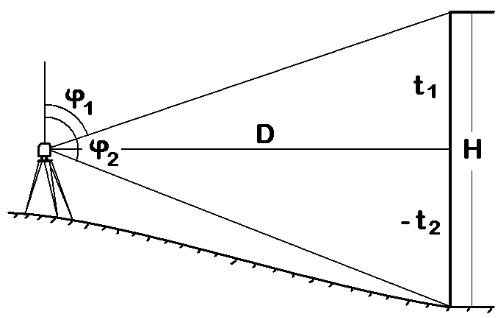
$$h = 43{,}20 + 1{,}35 + 5{,}45 = 50{,}00m$$

3.27) Para determinar la altura de un edificio, se estacionó una estación total en un punto situado a 50m (en distancia reducida) de la fachada, visando al punto más alto y a la base de ésta (los dos puntos visados estaban situados en la misma vertical). Se obtuvieron las siguientes distancias cenitales:

al punto más alto: $\varphi_1 = 75{,}684^g$

a la base: $\varphi_2 = 113{,}824^g$

Calcula la altura del edificio



De la figura se deduce:

$$H = t_1 - t_2$$

Hemos de tener en cuenta que la tangente topográfica correspondiente a la visual a la base, que es una visual descendente, tendrá signo negativo. Para calcular las tangentes topográficas hacemos:

$$t_1 = \frac{D}{tg\ \varphi_1} = \frac{50}{tg\ 75{,}684^g} = 20{,}084m$$

$$t_2 = \frac{D}{tg\ \varphi_2} = \frac{50}{tg\ 113{,}824^g} = -11{,}031m$$

$$H = 20{,}084 - (-11{,}031) = 31{,}115m$$

3.28) Para medir la altura de una torre se estacionó un teodolito en un punto, cuya distancia reducida al eje de la torre es 84,32m, y se visó al punto más alto de la misma leyendo una distancia cenital φ = 54°52'07". El punto de estación tiene la misma cota que la base de la torre y la altura del aparato fue i = 1,40m. Calcula la altura de la torre.

El punto de estación y la base de la torre están a la misma cota, por tanto la altura será:

$$h = t + i$$

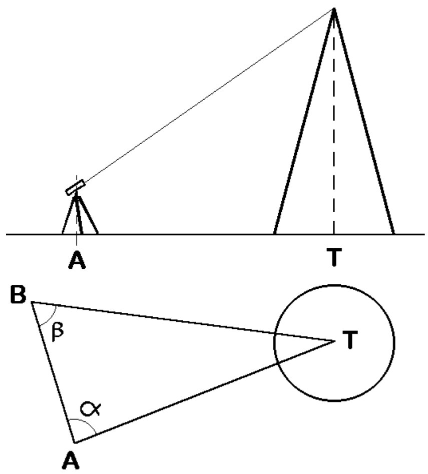
Calculamos *t*:

$$t = \frac{D}{tg\ \varphi} = \frac{84{,}32}{tg\ 54°52'7''} = 59{,}330m$$

La altura de la torre será:

$$h_c = 59{,}330 + 1{,}40 = 60{,}730m$$

3.29) Se necesita determinar la altura de una torre T. Para ello se estacionó una estación total en un punto A, visando al extremo superior de la torre. Se tomaron dos lecturas cenitales, una con anteojo en posición normal φ₁ = 79,374 ᵍ y otra con anteojo en posición invertida, tras aplicar la regla de Bessel, φ₂ = 320,628ᵍ. Ante la imposibilidad de medir directamente la distancia reducida entre A y el centro de la base de la torre, se visó a un segundo punto B, midiendo el ángulo horizontal α = 121,327 ᵍ. Finalmente se hizo estación en B, midiendo el ángulo β = 43,581 ᵍ. Calcula la altura de la torre sabiendo que la distancia entre A y B mide 242,841m, que la altura del aparato en A era i = 1,42m y que el punto A está a la misma cota que la base de la torre.



Empezaremos por resolver el triángulo *ABT* para calcular la distancia reducida *AT*. El ángulo en *T* vale:

$$\gamma = 200^g - \alpha - \beta = 200^g - 121{,}327^g - 43{,}581^g = 35{,}092^g$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{sen\ \gamma}{AB} = \frac{sen\ \beta}{AT}$$

$$AT = \frac{sen\ 43{,}581^g\ \ 242{,}841}{sen\ 35{,}092^g} = 293{,}200m$$

La lectura cenital correcta será:

$$\varphi_N = \frac{79,374^g + (400^g - 320,628^g)}{2} = 79,373^g$$

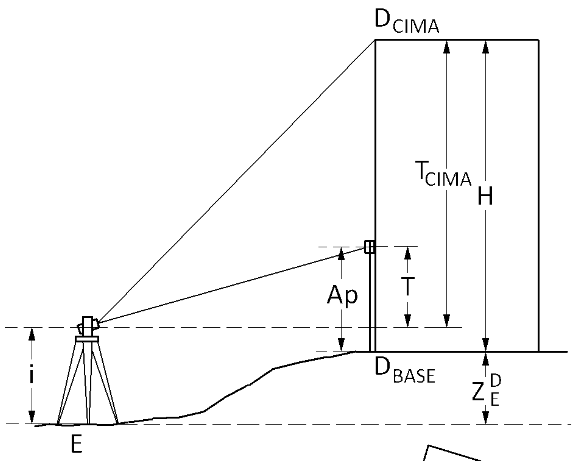
Altura:

$$h = t + i = \frac{AT}{tg\ \varphi} + i = \frac{293,200}{tg\ 79,373^g} + 1,42 = 99,889m$$

3.30) Se estaciona una estación total en un punto E próximo a la base de una torre de planta cuadrada y, previamente orientada, se lanzan visuales a un prisma situado sucesivamente en las dos esquinas más próximas de la torre y, sin prisma, a la parte superior de una de ellas, obteniéndose los siguientes datos:

Est.	i	Punto	L. acimutal	L. cenital	D. reducida	T	A. prisma
E	**1,59m**	**D_{BASE}**	**$12,299^g$**		**56,143m**	**0,861m**	**1,80m**
		D_{CIMA}	**12,299**	**$60,592^g$**	**56,143**		
		I_{BASE}	**395,064**		**59,183**		**1,80**

Calcula la altura y el lado de la planta de la torre, así como la distancia reducida entre el punto de estacionamiento y el centro, no accesible, de la torre.



Comenzamos calculando la altura de la torre; para ello debemos representar la situación de ésta, en función de los datos conocidos, como se ve en el esquema adjunto. Existen distintas formas de calcular la altura de la torre, entre ellas podemos indicar:

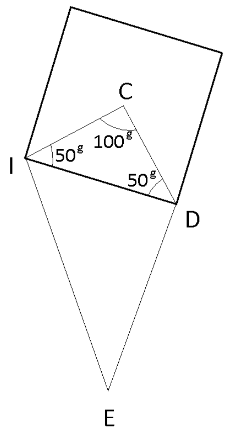
$$H = T_{CIMA} + i - Z_E^D = T_{CIMA} + A_P - T$$

Optamos por la segunda posibilidad, para la cual sólo es necesario calcular la tangente topográfica correspondiente a la visual a la cima:

$$T_{CIMA} = \frac{D_E^D}{tg\ \varphi_E^{D_{CIMA}}} = 56,143\ \cot g\ 60,592 = 39,998m$$

Entonces, la altura de la torre será:

$$H = T_{CIMA} + A_P - T = 39,998 + 1,8 - 0,861 = 40,937m$$



- Cálculo del lado de la torre.

Para calcular el lado de la torre, como se observa en el esquema adjunto, es suficiente resolver el triángulo *EDI* aplicando el teorema del coseno:

$$D_I^D = \sqrt{(D_E^I)^2 + (D_E^D)^2 - 2\ D_E^I\ D_E^D\ \cos\left(\theta_E^D - \theta_E^I + 400^g\right)} = 15,852m$$

El ángulo en *E* se obtiene por diferencia de acimutes entre el acimut mayor y el menor según el sentido creciente del limbo. Como se trata de un limbo directo, que crece según el sentido horario, el acimut mayor será el de *E* a *I*, aunque su valor numérico sea inferior. Este hecho se da cuando el cero de la graduación queda entre las dos visuales. En este caso se obtiene el ángulo conjugado del buscado y con signo negativo, por lo que debemos sumarle 400^g.

- Cálculo de la distancia al centro de la torre.

Para obtener esta distancia calcularemos primero las coordenadas de los puntos *D* e *I* respecto al punto de estación *E*:

$$X_E^I = D_E^I \ sen\ \theta_E^I = -4{,}584m \qquad X_E^D = D_E^D \ sen\ \theta_E^D = 10{,}779m$$

$$Y_E^I = D_E^I \ cos\ \theta_E^I = 59{,}005m \qquad Y_E^D = D_E^D \ cos\ \theta_E^D = 55{,}099m$$

Con estos datos podemos determinar el acimut entre *D* e *I*. Según las coordenadas obtenidas, el punto *D* está al sureste de *I*:

$$\theta_I^D = 100^g + arctg \frac{\left|Y_E^I - Y_E^D\right|}{\left|X_E^I - X_E^D\right|} = 115{,}850^g$$

Obtenemos ahora la distancia desde *I* o *D* hasta el centro de la torre, *C*. Podemos hacerlo resolviendo el triángulo *IDC*, bien calculando el cateto:

$$D_I^C = D_D^C = D_I^D \ cos\ 50^g = 11{,}209m$$

o bien aplicando en el citado triángulo el teorema del seno:

$$D_I^C = \frac{D_I^D \ sen\ 50^g}{sen\ 100^g} = 11{,}209m$$

Ahora calculamos las coordenadas desde *I* y desde *D* a *C*:

$$X_I^C = D_I^C \ sen\ \theta_I^C = 9{,}635m \qquad X_D^C = D_D^C \ sen\ \theta_D^C = -5{,}729m$$

$$Y_I^C = D_I^C \ cos\ \theta_I^C = 5{,}729m \qquad Y_D^C = D_D^C \ cos\ \theta_D^C = 9{,}635m$$

A continuación calculamos las coordenadas del punto *C* respecto al punto de estación *E*. Bastaría calcularlo pasando por *I* o por *D*; nosotros lo haremos por ambos para poder comprobar los cálculos realizados:

$$X_E^C = X_E^I + X_I^C = 5{,}051m \qquad X_E^C = X_E^D + X_D^C = 5{,}051m \qquad \overline{X}_E^D = 5{,}051m$$

$$Y_E^C = Y_E^I + Y_I^C = 64{,}734m \qquad Y_E^C = Y_E^D + Y_D^C = 64{,}734m \qquad \overline{Y}_E^D = 64{,}734m$$

Finalmente calculamos la distancia entre el punto de estación y el centro de la torre.

$$D_E^C = \sqrt{\left(X_E^C\right)^2 + \left(Y_E^C\right)^2} = 64{,}931m$$

3.31) Necesitamos calcular el volumen de un depósito de forma cilíndrica. Para ello se ha estacionado una estación total frente al depósito y se ha situado el prisma en el punto F mas cercano al de estación E y, tras medir la distancia, se han lanzado visuales tanto al extremo inferior del jalon como a la parte superior del depósito. Posteriormente se lanzan dos visuales según las tangentes al depósito, T_I y T_D. Los datos de campo son los siguientes:

Estación	Punto	L. Acimutal	L. Cenital	D. Reducida
E	**F_{SUELO}**	**$114{,}588^g$**	**$98{,}461^g$**	**18,569m**
	F_{CIMA}	**114,588**	**53,093**	**18,569**
	T_I	**107,016**		
	T_D	**122,160**		

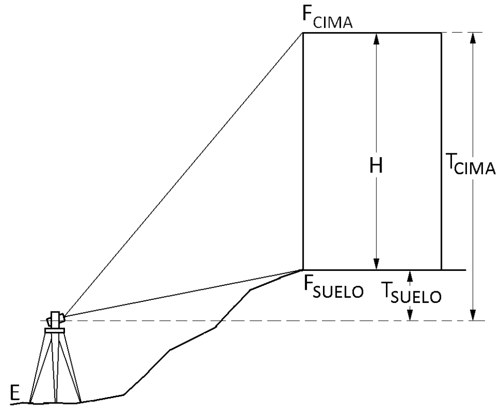
Calcula el volumen del depósito.

Para calcular el volumen del depósito utilizaremos la expresión que calcula el volumen de un cilindro. Para ello necesitamos conocer tanto la altura como el radio.

- Cálculo de la altura.

Comenzamos realizando un esquema de la situación del depósito. De él deducimos la expresión para el cálculo de *H*:

$$H = T_{CIMA} - T_{SUELO}$$



Calcularemos, por tanto, las tangentes topográficas:

$$T_{CIMA} = \frac{D_E^F}{tg\ \varphi_E^{F_{CIMA}}} = \frac{18{,}569}{tg\ 53{,}093} = 16{,}847m$$

$$T_{SUELO} = \frac{D_E^F}{tg\ \varphi_E^{F_{SUELO}}} = \frac{18{,}569}{tg\ 98{,}461} = 0{,}449m$$

Luego, la altura del depósito será:

$$H = T_{CIMA} - T_{SUELO} = 16{,}847 - 0{,}449 = 16{,}398m$$

- Cálculo del radio.

Representamos en planta el depósito y el punto de estación. De este esquema extraemos el triángulo EOT_D, donde calcularemos el radio *R*. De la misma forma podríamos utilizar el triángulo EOT_I. En primer lugar calculamos el valor del ángulo α:

$$\alpha = L_E^{T_D} - L_E^F = 122{,}160 - 114{,}588 = 7{,}572^g$$

A continuación aplicamos la relación del seno en un triángulo rectángulo:

$$sen\ \alpha = \frac{R}{D + R}$$

$$sen\ 7{,}572 = \frac{R}{18{,}569 + R}$$

$$0{,}119\ (18{,}569 + R) = R$$

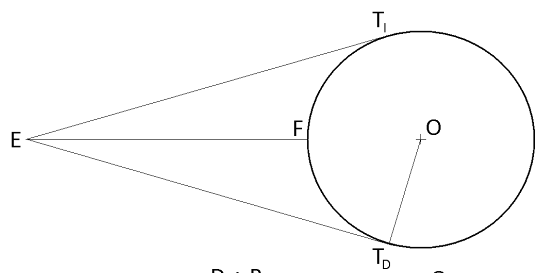
$$2{,}203 + 0{,}116R = R$$

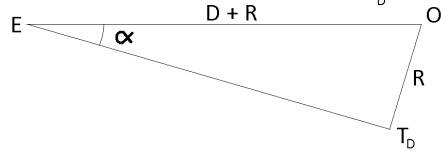
$$2{,}203 = R - 0{,}116R$$

$$2{,}203 = (1 - 0{,}116)R$$

$$2{,}203 = 0{,}881R$$

$$R = \frac{2{,}203}{0{,}881} = 2{,}501m$$





- Volumen del depósito.

Aplicamos la expresión que calcula el volumen de un cilindro:

$$V = Base\ x\ Altura = \pi\ R^2\ H = 322{,}120m^3$$