

## UNIDAD DIDÁCTICA III

### 10. MÉTODOS PLANIMÉTRICOS: RADIACIÓN

#### 10.1.- INTRODUCCIÓN. LOS MÉTODOS TOPOGRÁFICOS

Una vez estudiados los distintos tipos de instrumentos topográficos, debemos conocer las metodologías de trabajo en las que podemos aplicarlos. La utilización de cada uno de estos métodos topográficos, tanto planimétricos como altimétricos, responderá a una serie de parámetros que debemos conocer antes de iniciar un levantamiento topográfico, tales como: finalidad del levantamiento, escala del plano, equidistancia, tolerancia, extensión y características de la zona de trabajo, etc. Como sabemos, la tolerancia en planimetría vendrá dada por el error gráfico, obtenido multiplicando el límite de la apreciación visual ( $0,2mm$ ) por el denominador de la escala del plano. La tolerancia en altimetría vendrá dada como una fracción de la equidistancia.

Los métodos topográficos solucionan una serie de problemas típicos de Topografía, por lo que en un levantamiento topográfico de cierta entidad es habitual que se utilicen varios de estos métodos o todos ellos. Los métodos topográficos se combinarán entre sí con el objetivo de establecer un escalonamiento de puntos, haciendo que los menos precisos se apoyen en otros más precisos, de forma que los errores finales no superen la tolerancia.

Para poder operar así es necesario saber cómo afectan, en cada método topográfico, los errores elementales en la medida de ángulos, distancias y desniveles que se estudiaron en los capítulos dedicados a instrumentos y cómo se acumulan estos errores en cada método y al combinar varios métodos distintos en un mismo levantamiento. De esta forma podremos planificar con detalle cualquier levantamiento topográfico, teniendo en cuenta:

- 1) la tolerancia
- 2) los instrumentos topográficos disponibles
- 3) los distintos métodos topográficos aplicables y sus posibles combinaciones
- 4) los errores elementales y acumulados.

El estudio de los errores nos permitirá elegir la más adecuada de entre todas las combinaciones posibles de métodos e instrumentos topográficos. Para esta elección, además del requisito de no superar la tolerancia ni en los puntos más desfavorables del levantamiento, se tendrán en cuenta otros aspectos, como costos, plazos de ejecución de los trabajos, etc., al igual que sucede en cualquier proyecto de ingeniería.

Los métodos topográficos que vamos a considerar son los siguientes:

#### **Métodos planimétricos:**

- Método de *intersección*.- Tiene como finalidad la obtención de las coordenadas de puntos aislados del terreno con una gran precisión, estacionando en puntos de coordenadas conocidas, intersección directa, o estacionando en los puntos que pretendemos determinar, intersección

inversa.

- Método de *poligonación* o *itinerario*.- Se apoya en uno o dos puntos de coordenadas conocidas, permitiendo obtener las coordenadas de una serie de puntos que se unen mediante una poligonal.
- Método de *radiación*.- Se utiliza para determinar la posición de una serie de puntos, desde los cuales, generalmente, no se va a levantar ningún otro punto.

#### **Métodos altimétricos**

- *Nivelación geométrica*.- Determinación de desniveles mediante visuales horizontales, con empleo del nivel.
- *Nivelación trigonométrica*.- Determinación de desniveles mediante visuales inclinadas, empleando el taquímetro o la estación total.

### **10.2.- FUNDAMENTO DEL MÉTODO DE RADIACIÓN**

Es el método planimétrico más sencillo y puede emplearse en cualquier clase de terreno, incluso en aquellos con arbolado impracticables para otros métodos. Se aplica para levantar zonas de pequeña extensión, limitada por el alcance del instrumento utilizado y la precisión exigida, y, generalmente asociado a otros métodos más precisos, para calcular puntos de relleno en un levantamiento.

La aplicación del método de radiación es muy sencilla y consiste en estacionar el aparato topográfico utilizado en un punto de estación *P* (figura 10.1) que debe estar situado en una posición central respecto a la zona que queremos levantar. A partir de este punto se procede a visar a todos los puntos de interés de esa zona 1, 2, 3, etc., anotando las correspondientes lecturas. Los instrumentos más adecuados para el método de radiación son las estaciones totales y los taquímetros.

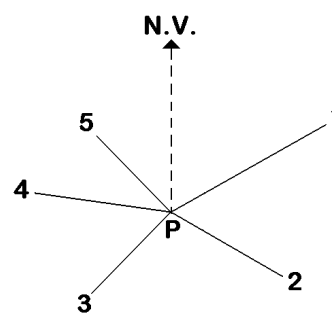


Fig. 10.1. Levantamiento por radiación

Habitualmente interesa relacionar los resultados del levantamiento con otros trabajos topográficos de la misma zona u otras limítrofes, utilizando el mismo sistema de coordenadas cartesianas (normalmente, coordenadas UTM). En ese caso se estacionará en un punto de coordenadas conocidas y habrá que disponer de una dirección de acimut conocido para poder orientar el instrumento u obtener los datos necesarios para orientarlo posteriormente. Si no se dispone de un punto de estación conocido o de una visual de acimut conocido, se realizarán los trabajos topográficos necesarios para conseguirlos.

Si no fuese necesario relacionar el levantamiento con otros, se pueden emplear valores arbitrarios como coordenadas del punto de estación y como acimut de referencia.

El principal inconveniente del método de radiación es la falta de homogeneidad en la precisión de las mediciones, que decrece con la distancia entre el punto visado y el de estación. Además, el método de radiación no tiene comprobación, por lo que, en ocasiones, puede interesar aplicarlo con la regla de Bessel para detectar errores groseros. Cuando se necesite radiar muchos puntos desde la misma estación conviene visarlos sucesivamente, avanzando en sentido horario, y comprobar, volviendo

al primero que se visó, que no se han producido movimientos en el instrumento.

**10.2.1.- Orientación**

Como hemos indicado, normalmente va a ser necesario orientar al Norte la zona levantada por radiación, puesto que suele formar parte de un levantamiento más amplio que, a su vez, también estará orientado o, simplemente, para poder relacionarlo con otros levantamientos. Para conseguirlo se puede proceder de dos formas:

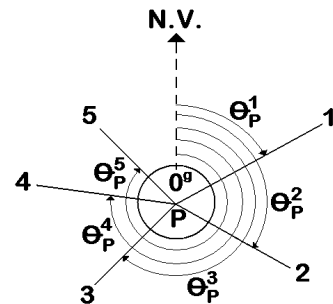


Fig. 10.2. Radiación con instrumento orientado

- Orientar el instrumento topográfico antes de visar los puntos de la zona de interés.
- Visar a estos puntos con el aparato desorientado, pero teniendo la precaución de anotar también la lectura acimutal a un punto de coordenadas conocidas o de una alineación de la cual conozcamos su acimut.

El primer sistema es suficientemente conocido, pues consiste en materializar una base topográfica, tal y como hemos estudiado anteriormente. Las lecturas horizontales tomadas serán, directamente, acimutes (figura 10.2).

El segundo método, que es el recomendable en muchos casos, es el que se conoce con el nombre de *corrección de orientación*. Para aplicarlo debemos conocer el acimut de una alineación, uno de cuyos extremos sea nuestro punto de estación P, y determinar la lectura angular acimutal que obtenemos, con el limbo desorientado, para esa misma alineación.

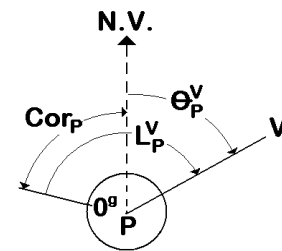


Fig. 10.3. Cálculo de la corrección de orientación

A continuación se visarán todos los puntos a levantar, obteniendo las correspondientes lecturas acimutales. Posteriormente, ya en gabinete, aplicamos la expresión:

$$Cor_P = \theta_P^V - L_P^V$$

obteniendo la corrección de orientación en P, que será el ángulo que deberíamos girar el limbo horizontal para situar la graduación cero en la dirección del Norte verdadero (figura 10.3). El valor de  $Cor_P$  puede ser positivo o negativo, en función de la posición relativa del limbo respecto al Norte.

Finalmente (figura 10.4), para obtener los acimutes de las visuales a todos los puntos levantados desde P basta aplicar la expresión siguiente a cada una de las lecturas acimutales obtenidas:

$$\theta_P^1 = L_P^1 + Cor_P$$

$$\theta_P^2 = L_P^2 + Cor_P$$

...

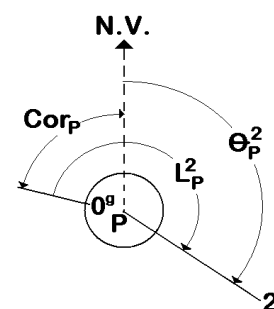


Fig. 10.4. Radiación con instrumento desorientado

El valor de la corrección de orientación lo utilizaremos con su signo, de manera que sumará o restará a la lectura acimutal el ángulo diferencia. Los acimutes deben tener valores entre  $0^g$  y  $400^g$ . Por tanto, si alguno de los obtenidos como resultado de la aplicación de la corrección de orientación tiene signo negativo, le sumaremos  $400^g$ . Del mismo modo, si se obtiene para alguno de ellos un valor mayor de  $400^g$ , le restaremos esa misma cantidad.

Este procedimiento puede emplearse para cualquier método topográfico en el que se requiera orientar el instrumento.

**10.2.2.- Lecturas. Cálculo de coordenadas cartesianas**

En cada visual lanzada se tomarán las lecturas necesarias para obtener los datos que permitan situar planimétricamente el punto radiado: acimut (o rumbo o lectura, en su caso) y distancia reducida. Con estos datos podemos obtener fácilmente las coordenadas cartesianas del punto radiado respecto al de estación (figura 10.5).

$$X'_P = D_{P1} \text{ sen } \theta'_P$$

$$Y'_P = D_{P1} \text{ cos } \theta'_P$$

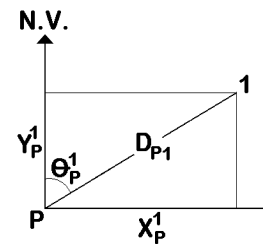


Fig. 10.5. Obtención de coordenadas

Para determinar la altitud de los puntos levantados se puede aplicar, al mismo tiempo que la radiación, el método alimétrico denominado nivelación trigonométrica, que estudiaremos posteriormente.

En la figura 10.6 puede verse una libreta de campo para emplear cuando se aplica el método de radiación y en la que se recogen las lecturas tomadas desde una determinada estación. Las estaciones totales están provistas de sistemas internos de almacenamiento de datos que pueden sustituir a las libretas de campo.

Estación	Altura i	Punto visado	Lectura acimutal	Lectura cenital	Distancia	Altura prisma

Fig. 10.6. Libreta de campo para radiación

**10.2.3.- Causas de error en el método de radiación. Limitación en la longitud de las visuales**

El método de radiación se basa en la determinación de ángulos horizontales y de distancias reducidas, de manera que estará afectado por los errores accidentales que se produzcan en la medida de estos. Para calcular los errores se utilizarán las expresiones estudiadas en 7:

$$e_r = \sqrt{\frac{E_a^2}{r^2} D^2 + E_d^2}$$

donde:  $e_r$  = error total en radiación, expresado en metros.  
 $E_d$  = error en la medida de la distancia, expresado en metros. Una parte del error total es fija y otra parte es proporcional a la distancia (véase 7.5.3).  
 $E_a$  = error angular expresado en segundos (véase 7.2.2).  
 Para pasar a radianes los errores angulares, que van expresados en segundos, se dividen por  $r$ , número de segundos de un radián. Para expresarlos en metros, se multiplican por  $D$ .

Los errores que se producen en la medida de la distancia ( $A'A''$  y  $B'B''$  en la figura 10.7) actúan en la dirección de la alineación que forman el punto de estación  $P$  y el punto radiado. Los errores angulares ( $AA''$  y  $BB''$ ) actúan en sentido transversal. Al tratarse de errores accidentales adoptarán valores al azar y podrán tener signo positivo o negativo, tal como se muestra en el ejemplo de la figura 10.7. El error total que se produce al levantar un punto  $A$  será la combinación de estos dos errores,  $A'A''$  y  $A''A'$ , lo que daría como resultado  $AA'$ . Los errores, tanto angulares como lineales, crecen con la distancia entre el punto radiado y el punto de estación.

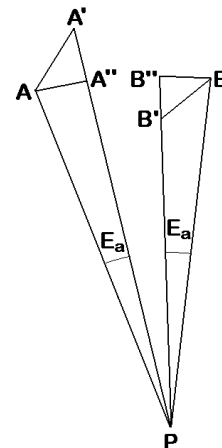


Fig. 10.7. Errores accidentales en radiación

Cuando levantamos dos puntos  $A$  y  $B$  muy próximos entre sí desde una estación  $P$  muy alejada de ellos, los errores totales  $AA'$  y  $BB'$  pueden ser incluso superiores a la distancia  $AB$ . En casos extremos, la posición relativa de los puntos trazados en el plano ( $A'$  y  $B'$ ) puede ser muy distinta a su posición real en el terreno, tal como se muestra en el ejemplo de la figura 10.7 en el que se representa el caso de dos puntos para los que los errores accidentales han resultado tener signos contrarios. La consecuencia directa de este hecho es que, en el método de radiación, no debemos nunca levantar puntos muy próximos entre sí desde un punto de estación muy lejano. Esto constituye la mayor limitación de este método.

Interesa determinar la distancia máxima a la que se puede trabajar por radiación, teniendo en cuenta los errores accidentales  $E_a$  y  $E_d$  propios del instrumento a utilizar. Como hemos visto, el ángulo acimutal y la distancia reducida obtenidos al levantar el punto  $A$  no serán los verdaderos, sino que estarán afectados por un error angular  $AA''$  y un error lineal  $A'A''$ , respectivamente, de manera que el error absoluto es  $AA'$ :

$$AA'' = D \frac{E_a}{r} \quad A'A'' = E_d$$

siendo  $D$  la distancia reducida entre  $P$  y  $A$  y  $r$  el número de segundos de un radián. En el triángulo  $AA'A''$ , que podemos suponer rectángulo en  $A''$ , tenemos (figura 10.7):

$$AA' = \sqrt{(AA'')^2 + (A'A'')^2} = \sqrt{\frac{E_a^2}{r^2} D^2 + E_d^2} = e_r$$

$AA'$ ,  $AA''$  y  $A'A''$  están expresados en las mismas unidades que  $D$ .

Como el error total  $e_r$  debe ser menor o igual que la tolerancia, hacemos:

$$e_r = \sqrt{\frac{E_a^2}{r^2} D^2 + E_d^2} = t$$

siendo  $t$  la tolerancia fijada. Algunos de los errores elementales que intervienen en  $E_a$  y en  $E_d$  dependen de  $D$ . De esta expresión se puede deducir, por tanteos, la longitud máxima  $D$  de las visuales que podemos levantar por radiación, función de las características del instrumento a emplear y de la tolerancia, para evitar que los errores accidentales sean excesivos. Salvo que se indique otra cosa, la tolerancia planimétrica vendrá fijada, según la escala, por el error gráfico (límite de la percepción visual):  $e_g = 0'2mm$ .

$$t = e_g M$$

siendo  $M$  el denominador de la escala.

## 11. MÉTODOS PLANIMÉTRICOS: POLIGONACIÓN O ITINERARIO

### 11.1.- FUNDAMENTO. TIPOS DE ITINERARIOS

El método de poligonación consiste en unir dos puntos de coordenadas conocidas mediante una poligonal o itinerario, con el fin de determinar las coordenadas de cada uno de los puntos intermedios, denominados *estaciones*, que conforman dicha poligonal. En algunos casos el método se aplica partiendo de un punto de coordenadas conocidas y volviendo al mismo punto, tras recorrer la poligonal.

La finalidad que se persigue con este método es obtener un número suficiente de puntos de estación de coordenadas conocidas. Desde ellos se levantarán posteriormente otros puntos de interés, lo que se hará normalmente por radiación o con itinerarios más cortos denominados *secundarios*. El método de poligonación permite relacionar las estaciones elegidas entre sí y calcular conjuntamente sus coordenadas cartesianas, determinando además los errores de cierre cometidos y compensándolos.

Las alineaciones formadas por cada dos estaciones consecutivas del itinerario se denominan *ejes* o *tramos*. Desde cada estación deben ser visibles las dos contiguas que, además, se situarán dentro del rango de alcance del instrumento topográfico que se vaya a emplear.

Para poder transmitir la orientación desde cada estación a la siguiente, y también para obtener una buena precisión, es necesario lanzar siempre dos visuales en cada tramo, una desde cada una de las dos estaciones que lo forman. En cada una de estas visuales se anotarán todas las lecturas, tanto de ángulos como de distancias. Las visuales lanzadas según el sentido de avance del itinerario se denominan *visuales de frente* y las que se lanzan en sentido contrario, *visuales de espaldas*.

Basándonos en las características de los puntos inicial y final del itinerario podemos clasificarlos en varios tipos:

- *Itinerarios cerrados*, cuando el punto inicial coincide con el punto final y conocemos sus coordenadas (punto A en la figura 11.1). Para orientar los itinerarios de este tipo se precisa disponer de una visual de acimut conocido desde la primera estación a un punto exterior al itinerario (en el caso de la figura, la visual A-V).

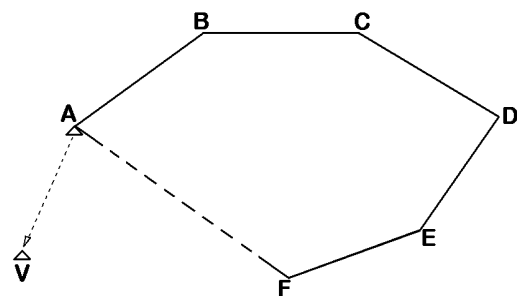


Fig. 11.1. Itinerario cerrado

- *Itinerarios abiertos*: Cuando el punto inicial y el punto final son distintos (puntos A y N en la figura 11.2) y conocemos

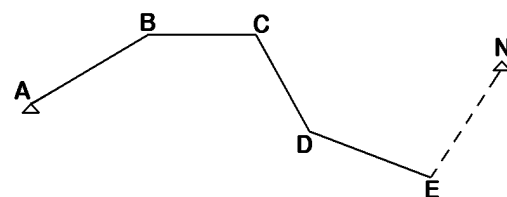


Fig. 11.2. Itinerario encuadrado

las coordenadas de ambos, el itinerario se llama *encuadrado*. Dentro de este tipo de itinerarios se puede definir también el denominado *itinerario colgado*, en el que conocemos las coordenadas del punto inicial pero desconocemos las del punto final. Debemos evitar siempre el realizar itinerarios colgados, pues no permiten compensar los errores angulares y lineales que se cometen.

### 11.1.1.- Equipos empleados. Equipo de poligonación

Los instrumentos más adecuados para el método de poligonación son las estaciones totales y los taquímetros, que permiten medir tanto ángulos como distancias. Al igual que el de radiación, el método de poligonación puede combinarse con el de nivelación trigonométrica, lo que permite levantar también altimétricamente los puntos visados.

Para disminuir el error angular se puede utilizar en itinerarios de precisión el *equipo de poligonación*, que consiste en tres trípodes y tres bases nivelantes que se estacionan sobre tres estaciones consecutivas del itinerario. Cada base nivelante dispondrá de una plomada óptica independiente que permita situarla con precisión sobre la vertical del punto de estación correspondiente. En una de ellas se monta la estación total y en las otras dos unas señales de puntería, de manera que una vez realizadas las lecturas de ángulos acimutales se intercambian, sin mover los trípodes, la estación total y las señales de puntería dejando sobre cada trípode la base nivelante.

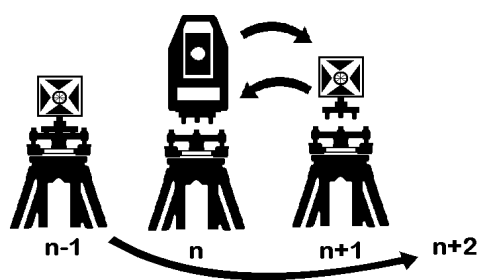


Fig. 11.3. Itinerario con centrado forzado

Gracias a este *centrado forzado* del instrumento y las señales de puntería, el error de dirección disminuye considerablemente. No olvidemos que éste suele ser, con diferencia, el error de mayor magnitud en el método de poligonación. El procedimiento se repite en las restantes estaciones.

### 11.2.- MODO OPERATIVO

Para aplicar el método de poligonación se medirán las distancias reducidas y los acimutes de todos los tramos del itinerario. La medición de los acimutes puede hacerse orientando la estación total en todas las estaciones del itinerario o bien trabajando por corrección de orientación, como se estudió en 10.2.1.

#### 11.2.1.- Itinerario orientado

Para orientar el instrumento topográfico en todas las estaciones del itinerario debemos materializar, en cada una de ellas, una base topográfica, es decir, hacer coincidir una visual determinada con su acimut. Como la primera estación del itinerario será un punto de coordenadas conocidas, para orientar el itinerario se procede de la siguiente forma:

- En itinerarios cerrados orientaremos el instrumento visando, desde la primera estación, a un punto conocido exterior al mismo, habiendo calculado previamente el acimut de la alineación que forma ese punto con el de



estación.

- En itinerarios encuadrados orientaremos el instrumento visando desde la primera estación a la última, que es también un punto conocido (figura 11.4). Si la última estación no fuese visible desde la primera, se puede visar un punto exterior conocido. Antes de lanzar la visual se habrá calculado el acimut de la alineación que se vaya a emplear para orientar, a partir de las coordenadas conocidas de ambos puntos extremos.

En el caso de la figura 11.4 (itinerario encuadrado) se orienta el instrumento en la primera estación *A* mediante una visual a la última estación *E*.

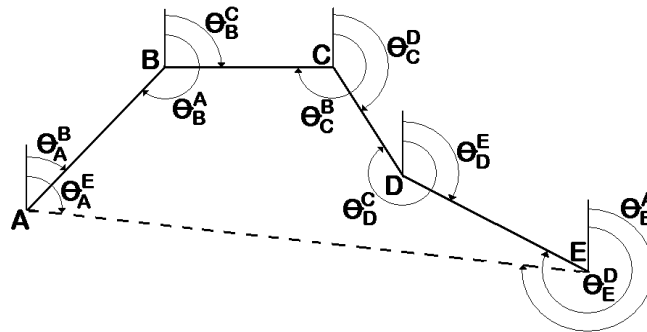


Fig. 11.4. Itinerario encuadrado orientado

Una vez orientado el instrumento, se visa la siguiente estación del itinerario *B* (visual de frente) obteniendo directamente su acimut y la distancia reducida entre ambas estaciones. A continuación, se hace estación en *B* y se visa a *A* (visual de espaldas) y para orientar de nuevo el instrumento basta con hacer coincidir con esta visual su acimut, que es el recíproco del de la visual contraria y se calcula mediante la expresión:

$$\theta_B^A = \theta_A^B \pm 200^g$$

Aunque la distancia reducida del tramo ya se midió en la visual de frente, conviene hacerlo de nuevo como comprobación y para mejorar la precisión.

A continuación se visa el siguiente punto del itinerario, leyendo el acimut y la distancia reducida de este nuevo tramo. Se hace estación este punto y se vuelve a orientar el instrumento con la visual de espaldas, repitiendo esta operación hasta llegar al punto final del itinerario.

Al llegar a la última estación del itinerario se lanza una visual al punto de referencia, que será la primera estación, en el caso de itinerarios encuadrados en que ambos puntos sean visibles entre sí, o un punto exterior de coordenadas conocidas. Se anota el acimut leído, que denominamos *acimut topográfico*. Debido a la acumulación de errores durante la realización del itinerario este acimut topográfico no coincidirá con el calculado a partir de las coordenadas de los puntos conocidos y que denominamos *acimut trigonométrico*. La diferencia entre ambos es lo que se denomina *error de cierre angular* y nos indica la precisión alcanzada en la realización del itinerario.

Se observa que la orientación se transmite siempre lanzando una visual de espaldas al punto anterior del itinerario. Esto significa que los errores acimutales que se cometan en cada estación del itinerario afectarán también a las estaciones posteriores, ya que la orientación se va transmitiendo desde cada una a la siguiente.

### 11.2.2.- Itinerario desorientado

En muchas ocasiones se prefiere realizar el itinerario sin orientar el

instrumento. Trabajando de este modo, el cálculo de los acimutes de los tramos del itinerario se hace posteriormente, en gabinete, determinando la corrección de orientación en cada una de las estaciones del itinerario. Para hacerlo (véase 11.2.1) será necesario lanzar las mismas visuales que en el caso anterior, pero esas visuales no se emplearán para orientar el instrumento sino para anotar las lecturas horizontales obtenidas y, cuando proceda, para medir por segunda vez las distancias reducidas de cada tramo.

Así, estacionados en el punto inicial  $A$  y con el limbo horizontal en una posición arbitraria, se lanza la visual de espaldas al punto de referencia  $X$ , exterior al itinerario, o al punto final de éste. A continuación se lanza la visual de frente al punto  $B$ , anotando también la lectura acimutal obtenida. Seguidamente se estaciona en el punto  $B$ , con el limbo de nuevo en una posición cualquiera, y se toma la lectura de espaldas a  $A$  y de frente a  $C$ . Continuamos de igual manera para el resto de los puntos del itinerario. En el punto final se toma la lectura acimutal al punto de referencia o al punto inicial.

De este modo, los ángulos acimutales obtenidos son todos lecturas, no acimutes. Para obtener los acimutes de cada alineación se calcula en cada una de las estaciones la corrección de orientación, tal como se estudió en el capítulo anterior:

$$Cor_A = \theta_A^X - L_A^X$$

donde  $\theta_A^X$  se calcula a partir de las coordenadas de  $A$  y de  $X$  y  $L_A^X$  es la lectura acimutal desde  $A$  a  $X$ . Esta corrección de orientación  $Cor_A$  es válida solamente para las lecturas realizadas desde  $A$ . Así, para calcular la corrección en  $B$  se hará:

$$\theta_A^B = L_A^B + Cor_A$$

$$\theta_B^A = \theta_A^B \pm 200^g$$

$$Cor_B = \theta_B^A - L_B^A$$

$$\theta_B^C = L_B^C + Cor_B$$

El procedimiento se repite en el resto de los puntos del itinerario, incluido el cálculo del acimut topográfico desde el punto final. El error de cierre angular se calcula de igual forma que en el caso de itinerario orientado.

Trabajando de este modo, la transmisión de orientación de cada estación a la siguiente se hace de forma numérica, a través del cálculo de la corrección de orientación en cada una de ellas. Este procedimiento es muchas veces aconsejable en la práctica, pues elimina la necesidad de orientar el instrumento, operación que debe realizarse con precisión, evita el cálculo de datos en el campo, pues la transmisión de orientación se realiza en gabinete, y además posibilita el levantamiento de las estaciones del itinerario en cualquier orden.

### 11.2.3.- Transmisión de errores angulares

En la realización de un itinerario nos apoyamos en las visuales de espaldas para transmitir la orientación desde cada punto al siguiente. Por ello, los errores que se cometen en cada estación se transmitirán al resto del itinerario.

Para entenderlo con claridad veamos el siguiente ejemplo, un itinerario de

tres tramos en el cual supondremos que todos los errores accidentales que aparezcan tienen el mismo sentido.

Al estacionar en el punto inicial A del itinerario cometemos un error angular  $e_1$ , que se transmitirá íntegro al punto B. Si no cometiésemos ningún error más, el itinerario giraría un ángulo igual al ángulo error, pues el resto de los ángulos entre tramos no tendrían errores, por lo que no obtendríamos D, que es la solución correcta, sino D'. Sin embargo, lo normal es que al determinar el ángulo en B cometamos un nuevo error  $e_2$  y, si suponemos de nuevo que en las estaciones siguientes no cometemos otros errores, el resultado final que obtendríamos será D". Así hasta llegar al resultado final, que será D'''.

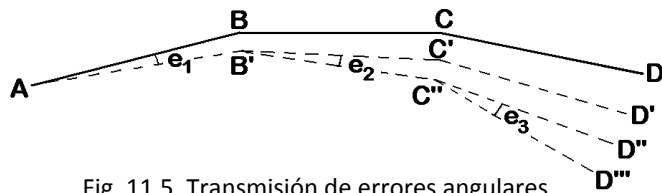


Fig. 11.5. Transmisión de errores angulares en poligonación

Por tanto, el error final  $DD'''$  será:

$$DD''' = DD' + D'D'' + D''D'''$$

Resolviendo el triángulo que se forma en cada punto donde aparece el error y considerando el itinerario como rígido a partir de ese punto, podemos decir que:

$$DD''' = D_{AD} \text{ sen } e_1 + D_{BD} \text{ sen } e_2 + D_{CD} \text{ sen } e_3$$

Este resultado final es una simplificación de la realidad, ya que en la práctica los errores accidentales no van a producirse siempre en el mismo sentido, pero muestra claramente lo que pretendíamos explicar: la transmisión de los errores a las estaciones siguientes del itinerario y su acumulación con los errores cometidos posteriormente.

### 11.3.- CÁLCULO Y COMPENSACIÓN DEL ITINERARIO

Los errores accidentales cometidos en la determinación de acimutes y distancias provocarán diferencias entre la situación real de los puntos de estación y la obtenida al aplicar el método de poligonación. Los errores individuales cometidos en cada medición nunca serán conocidos, pero en itinerarios cerrados y encuadrados disponemos de información suficiente para determinar los errores de cierre, es decir, los errores finales acumulados.

La figura 11.6 muestra una posible forma de compensar errores de cierre en un itinerario cerrado y se ha incluido porque puede ayudar a aclarar algunos conceptos sobre la transmisión de errores en itinerarios y la compensación de los mismos. Las coordenadas de la estación inicial A son conocidas pero, tras realizar el itinerario y resolverlo, obtenemos para este punto un resultado A', distinto del verdadero. Antes de continuar, se comprobará si el error de cierre es excesivo, en cuyo caso habría que repetir el trabajo de campo realizado. Si no es así, se procede a compensarlo.

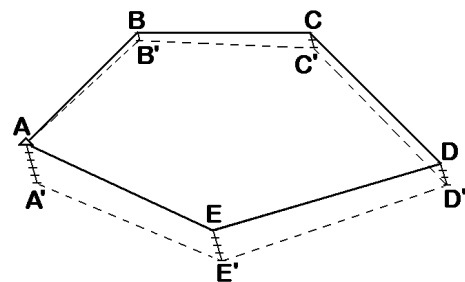


Fig. 11.6. Compensación gráfica de un itinerario cerrado

La compensación gráfica, tal como se ilustra en 11.6, consiste en unir  $A'$  con  $A$  y dividir el segmento  $AA'$  en tantas partes iguales como tramos tenga el itinerario. Se llevará una parte en la estación  $B'$ , dos partes en la  $C'$  y así sucesivamente, obteniendo los puntos compensados  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . El único punto en el que se conoce el error total cometido es el  $A$ , en los demás se ha supuesto que los errores se van acumulando de forma proporcional a medida que avanza el itinerario.

### 11.3.1.- Cálculo de acimutes. Error de cierre angular

El cálculo de acimutes en un itinerario orientado es directo, pues la propia lectura de ángulos sobre el limbo acimutal nos da los acimutes de las distintas alineaciones. En el caso de que el instrumento no se haya orientado, ya se ha explicado el procedimiento a seguir para calcularlos.

Estos acimutes, calculados de una forma u otra, contienen un determinado error angular que se pone de manifiesto al aplicar la expresión:

$$e_{ca} = \theta_{topográfico} - \theta_{trigonométrico}$$

Este error de cierre angular puede ser de dos tipos:

- *Error angular por exceso*, cuando el valor del  $\theta_{topográfico}$  es mayor que el valor del  $\theta_{trigonométrico}$  calculado.
- *Error angular por defecto*, cuando el valor del  $\theta_{topográfico}$  es menor que el valor del  $\theta_{trigonométrico}$  calculado.

La determinación de la naturaleza y el signo del error angular es fundamental de cara a la compensación posterior de éste.

Existe otro método para determinar el valor y la naturaleza del error angular y que consiste en efectuar la diferencia entre el sumatorio de las lecturas angulares correspondientes a las visuales de frente y el sumatorio de las lecturas angulares correspondientes a las visuales de espaldas. Antes de efectuar dicha diferencia debemos restar del sumatorio mayor un número entero de veces el valor  $200^g$ . En este método, y operando siempre en el orden indicado, el error es por exceso si la diferencia resulta positiva y por defecto si resulta negativa. Este método sólo puede aplicarse en itinerarios cerrados (sin considerar la visual al vértice exterior) o en itinerarios encuadrados en que las estaciones inicial y final se visen entre sí.

Una vez determinado el error de cierre angular, se procede a compensarlo de la siguiente forma: dividimos el error de cierre por el número de estaciones del itinerario, obteniendo el factor  $f_a$ . Este factor conserva el signo del error de cierre. Dada la forma en que se transmiten los errores en itinerarios, la compensación se efectuará restando el factor al acimut del primer tramo, el doble del factor al del segundo tramo, el triple al del tercer tramo, etc. Obviamente, al último acimut topográfico, que nos ha servido para determinar el error de cierre angular, se le resta la totalidad del error, de forma que coincida con el acimut trigonométrico:

$$\theta_{1 \text{ compensado}} = \theta_1 - f_a$$

$$\theta_{2 \text{ compensado}} = \theta_2 - 2 f_a$$

$$\theta_{3 \text{ compensado}} = \theta_3 - 3 f_a$$

$$\theta_n \text{ compensado} = \theta_n - n f_a = \theta_n - n \frac{e_{ca}}{n} = \theta_n - e_{ca} = \theta_{\text{trigonométrico}}$$

Así, en el caso de error por defecto tendrán los acimutes compensados mayor valor que los no compensados, sucediendo lo contrario en el caso de error por exceso. Esta forma de compensar acimutes consiste en suponer que los errores angulares cometidos en cada estación son iguales. Existen otros procedimientos para compensar errores angulares, pero no vamos a ocuparnos de ellos.

**11.3.2.- Cálculo de coordenadas. Error de cierre lineal**

En el método de poligonación se lanzan desde cada estación, como ya se ha comentado, la visual de espaldas y la visual de frente. De esta manera disponemos de información, en un sentido y en el contrario, de cada uno de los tramos del itinerario. Esto nos permite medir la distancia reducida de cada tramo desde cada uno de los extremos de éste y promediar los resultados, alcanzando así una precisión mayor.

Una vez promediadas las distancias, se determinan las coordenadas planimétricas parciales de cada estación respecto de la anterior, utilizando para ello los acimutes compensados y las distancias promedio:

$$X_i^j = \bar{D}_{ij} \text{ sen } (\theta_i^j)_{\text{compensado}}$$

$$Y_i^j = \bar{D}_{ij} \text{ cos } (\theta_i^j)_{\text{compensado}}$$

Estas coordenadas contienen errores, en parte debido a que ningún procedimiento para compensar acimutes es perfecto y, además, como producto de la medición de distancias y de la lectura de ángulos cenitales.

Para determinar el error de cierre planimétrico calcularemos el sumatorio de las coordenadas parciales, con su signo, tanto de X como de Y. Si se trata de un itinerario cerrado, este sumatorio debería ser igual a cero. El valor, distinto de cero, que obtengamos es el error planimétrico  $e_p$  en X o en Y, dependiendo de que el sumatorio se efectuase con las coordenadas parciales de X o de Y. Este error será por exceso si tiene signo positivo y por defecto si es de signo negativo.

Si se trata de un itinerario encuadrado, el sumatorio en X o en Y debería ser igual a la diferencia, en X o en Y respectivamente, entre las coordenadas absolutas conocidas de los puntos final e inicial del itinerario. La diferencia que obtengamos será el error planimétrico en cada una de las coordenadas. Este error será por exceso si el sumatorio es mayor que la diferencia entre las coordenadas de los puntos extremos y por defecto si este sumatorio es menor.

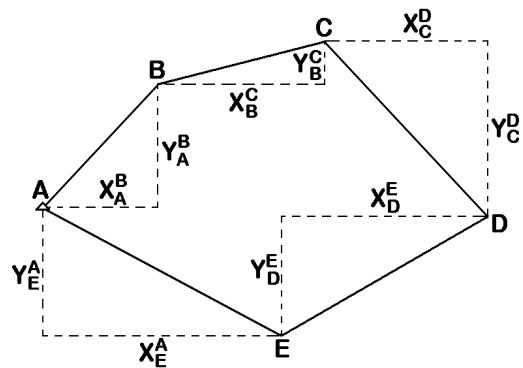


Fig. 11.7. Coordenadas parciales compensadas en un itinerario cerrado

Una vez determinado el error planimétrico, y comprobado que no es excesivo, debemos proceder a compensarlo (figura 11.7). Para ello, aplicamos la siguiente expresión a cada una de las coordenadas parciales:

$$(X_A^B)_C = X_A^B - e_{px} \frac{|X_A^B|}{\sum |X_i^j|}$$

donde  $\sum |X_i^j|$  es el sumatorio de los valores absolutos de las coordenadas parciales. El error  $e_p$  irá con su signo, de manera que si este error es por exceso las coordenadas compensadas serán menores que las no compensadas y al contrario si fuese por defecto.

Las coordenadas absolutas se obtienen, finalmente, por arrastre de coordenadas. De igual forma se procede con las coordenadas Y.

Estación	Parciales sin compensar		Parciales compensadas		Absolutas	
	X	Y	X	Y	X	Y
A	$X_A^B$	$Y_A^B$	$(X_A^B)_C$	$(Y_A^B)_C$	$X_A$	$Y_A$
B	$X_B^C$	$Y_B^C$	$(X_B^C)_C$	$(Y_B^C)_C$	$X_B$	$Y_B$
C	...	...	...	...	...	...
...						
N	$X_{N-1}^N$	$Y_{N-1}^N$	$(X_{N-1}^N)_C$	$(Y_{N-1}^N)_C$	$X_N$	$Y_N$
	$\sum X_i^j$	$\sum Y_i^j$	$\sum (X_i^j)_C =$	$\sum (Y_i^j)_C =$		
	$\sum  X_i^j $	$\sum  Y_i^j $	$= X_N - X_A$	$= Y_N - Y_A$		

La estación N coincidirá con la A en los itinerarios cerrados. En ellos la suma de la columna de coordenadas parciales compensadas será igual a cero. En itinerarios encuadrados este sumatorio será igual a la diferencia entre las coordenadas de las estaciones final e inicial.

Como se ha indicado, es muy frecuente levantar también la coordenada Z de los puntos visados aplicando, en paralelo al de poligonación, el método altimétrico denominado nivelación trigonométrica. En estos casos, el cálculo de errores de cierre altimétricos y su compensación se suele efectuar por procedimientos idénticos a los que acabamos de explicar. Normalmente se dispondrá de dos valores del desnivel de cada tramo, uno obtenido de la visual de frente y otro de la visual de espaldas. Promediaremos estos dos desniveles en valor absoluto y al resultado le aplicaremos el signo correspondiente al desnivel de la visual de frente. El valor obtenido será el que tomemos como desnivel medio del tramo.

**11.4.- ERRORES ACCIDENTALES EN POLIGONACIÓN**

Al igual que el de radiación, el método de poligonación se basa en la determinación de ángulos horizontales y de distancias reducidas, de manera que estará afectado por los errores accidentales que se produzcan en la medida de éstos.

Puesto que se tiende a que los tramos del itinerario tengan longitudes similares, a la hora de calcular los errores consideraremos la distancia reducida media de todos los tramos,  $D$ . Esta distancia vendrá determinada por las prestaciones del instrumento a utilizar y por las características del terreno que se pretende levantar. Puesto que el método de poligonación se aplicará normalmente para disponer de puntos de estación desde los que levantar por radiación el terreno circundante, se tendrá también en cuenta la distancia máxima previamente calculada para la radiación (véase 10.2.3).

#### 11.4.1.- Errores en la medida de ángulos horizontales

Para calcular los errores acimutales correspondientes a una visual del itinerario se emplean las expresiones estudiadas en el capítulo 7. El error resultante  $E_a$  viene expresado en segundos y representará el error angular correspondiente a una visual media, de longitud  $D$ .

Entre los errores angulares, el más importante en magnitud es el error de dirección, que puede reducirse en itinerarios de precisión utilizando el equipo de poligonación. Si se utiliza este equipo, puede tomarse para este error el valor obtenido en 7.2.2.2, haciendo:  $e_e + e_p = 0,5\text{cm} = 0,005\text{m}$

Por otro lado, como hemos visto, los errores acimutales tienden a acumularse a medida que avanza el itinerario, por lo que cuanto más largo sea éste, mayores serán los errores de cierre. En consecuencia, conviene limitar el número de tramos del itinerario, de forma que nunca se supere la tolerancia fijada.

Supongamos un itinerario compuesto por  $n$  tramos, todos ellos de longitud  $D$ . Si en la primera estación se comete un error acimutal  $e_1$ , todo el itinerario resultará girado en una cantidad igual a este error, por lo que el último punto del mismo sufre un desplazamiento:

$$d_1 = D n e_1$$

Todos los ángulos error  $e_1, e_2$ , etc. irán expresados en radianes.

Si en la segunda estación se produce un nuevo error  $e_2$ , el resto del itinerario resultará girado en esa misma cantidad, por lo que el último punto sufrirá un nuevo desplazamiento:

$$d_2 = D (n - 1) e_2$$

y así sucesivamente. Finalmente, el error angular  $e_n$ , cometido en el último tramo, producirá un nuevo desplazamiento en el último punto:

$$d = D e_n$$

Todos estos errores son independientes y actúan conjuntamente, por lo que el error de cierre angular del itinerario vendría dado en función de:

$$e_{ca} = \sqrt{D^2 n^2 e_1^2 + D^2 (n - 1)^2 e_2^2 + \dots + D^2 e_n^2}$$

Sustituimos los errores  $e_1, e_2$ , etc. por el error angular  $E_a$ , que es el error angular total correspondiente a una visual de longitud  $D$ , debido a los errores de verticalidad, dirección, puntería y lectura. Para expresarlo en radianes dividimos  $E_a$  por  $r$ , número de segundos de un radián. El error de cierre angular que se obtendría en el itinerario, consecuencia de la transmisión y acumulación de los errores acimutales individuales de los  $n$  tramos, sería:

$$e_{ca} = D \frac{E_a}{r} \sqrt{n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1} = D \frac{E_a}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

#### 11.4.2.- Errores en la medida de distancias reducidas

Los errores a considerar en la medida de distancias dependerán del instrumento que se emplee. Si se utiliza una estación total, los errores en distancia serán los propios de los métodos electrónicos de medida (véase 7.5.3). Sea  $E_d$  el error total correspondiente a una visual de longitud  $D$ , que es la distancia reducida media de los tramos del itinerario. Suponemos que  $E_d$  está expresado en metros.

A la hora de calcular los errores individuales debemos tener en cuenta que si la longitud de los tramos se mide dos veces y se emplea como resultado el valor promediado, los errores  $e_d$  y  $e_i$  se dividirán por  $\sqrt{2}$ .

Al contrario de lo que sucede con los ángulos acimutales, la medición de la longitud de cada uno de los  $n$  tramos es independiente de las de los demás y no se produce transmisión de errores. Por tanto, la longitud total del itinerario se obtendría como una operación suma de varias mediciones individuales, y el error de cierre lineal del mismo vendría dado por:

$$e_{cl} = E_d \sqrt{n}$$

#### 11.4.3.- Acumulación de errores. Limitación en el número de tramos de un itinerario

Puesto que los errores acimutales y lineales actúan de forma independiente, el error de cierre total del itinerario sería:

$$e_c = \sqrt{e_{ca}^2 + e_{cl}^2}$$

Obtenemos una expresión en función del número de tramos  $n$ , en la que podemos determinar por tanteos el máximo valor de  $n$  para que  $e_c$  no supere la tolerancia en planimetría.

Una vez comprobado que el error de cierre es inferior a la tolerancia, interesa determinar los errores acumulados que se tendrían cuando los distintos métodos planimétricos se combinan entre sí. Supongamos que  $e_i$  es el error de cierre calculado para un itinerario desde cuyas estaciones se van a levantar puntos por radiación. Sea  $e_r$  el error calculado para la radiación (véase 10.2.3). En esta ocasión sólo se tendrán en cuenta los errores acumulados por la aplicación combinada de estos dos métodos.

Si el itinerario está formado por  $n$  ejes, el error correspondiente a cada punto del itinerario será:



$$e' = \frac{e_i}{\sqrt{n}}$$

y, al compensar el error de cierre, la corrección en cada punto será:

$$c' = \frac{e_i}{n}$$

Se admite que, una vez compensado el itinerario, el máximo error absoluto en cada estación sería:

$$e = e' + c'$$

La radiación se aplicará desde las estaciones del itinerario. Por tanto, si el error máximo absoluto en éstas es  $e$  y el error propio de la radiación es  $e_r$ , tendremos:

$$e_u = \sqrt{e^2 + e_r^2}$$

El método de radiación no tiene comprobación y, por tanto, no cabe compensar errores de cierre. Tomaremos el valor obtenido como error máximo absoluto en los puntos levantados por radiación, acumulado entre este método y el de poligonación. El valor de  $e_u$  no debe superar la tolerancia planimétrica.



## 12. MÉTODOS PLANIMÉTRICOS: INTERSECCIÓN

La *intersección*, método planimétrico clásico empleado en Topografía y Geodesia, consiste en el levantamiento de puntos aislados del terreno a partir de dos o más puntos (vértices) cuyas coordenadas son conocidas de antemano. Hasta la aparición de los sistemas electrónicos de medida, la medición de ángulos era mucho más precisa que la de distancias, por lo que el método de intersección mediante observaciones angulares era considerado el más preciso de los métodos planimétricos. En la actualidad, la intersección también puede aplicarse midiendo distancias, lo que se denomina *trilateración*, o combinando la medición de distancias con la de ángulos.

Podemos distinguir dos tipos de intersección: la *directa*, en la que se hace estación en los puntos conocidos, y la *inversa*, en la que se hace estación en los puntos que se pretende determinar. Se habla de intersección *simple* cuando las mediciones realizadas son las mínimas indispensables para calcular las coordenadas de los puntos desconocidos. Siempre es recomendable aplicar la intersección *múltiple*, realizando mediciones adicionales que nos permitan comprobar los resultados obtenidos.

La intersección (y especialmente la directa) puede emplearse para el levantamiento planimétrico de vértices que, distribuidos de forma adecuada y marcados sobre el terreno mediante señales permanentes, van a constituir la red de triangulación, que servirá de estructura y apoyo a las restantes fases de un levantamiento topográfico completo. Los vértices geodésicos de la red de tercer orden se sitúan a distancias excesivas para las aplicaciones topográficas y por eso es preciso levantar nuevos vértices, realizando una triangulación o mediante sistemas GNSS.

Las distancias entre vértices en una triangulación topográfica estarán condicionadas por las longitudes máximas que se pueden alcanzar en los itinerarios y en la radiación, que se vieron en los capítulos anteriores. Si la intersección se aplica midiendo distancias, también estará limitada por el alcance del distanciómetro a emplear. La figura 12.1 muestra parte de la red de vértices (A, B, C, etc.) de un levantamiento, algunos de los itinerarios (como el encuadrado entre los vértices A y B para levantar las estaciones 1 a 6) y los círculos máximos de radiación en las estaciones de uno de los itinerarios.

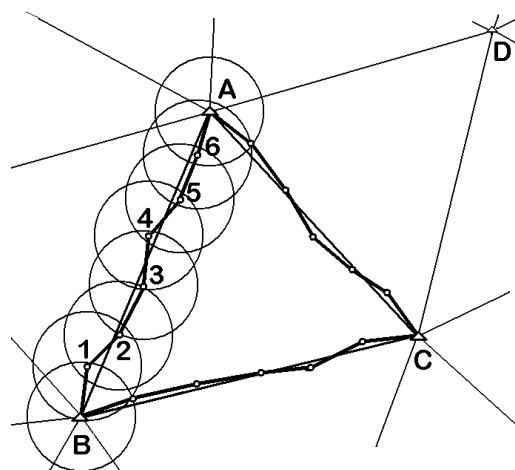


Fig. 12.1. Combinación de métodos planimétricos: intersección, poligonación y radiación

La intersección directa también puede emplearse para el levantamiento de puntos inaccesibles y para el control de deformaciones en obras geotécnicas y grandes estructuras.

Cuando sólo se precisa medir ángulos acimutales, el instrumento topográfico más apropiado para el método de intersección es el teodolito. También puede emplearse la estación total, siempre que su apreciación en las medidas angulares sea compatible con las tolerancias fijadas, o para aplicar la trilateración. Por intersección solamente se determinan las coordenadas planimétricas,  $X$  e  $Y$ . Si interesa determinar también la coordenada  $Z$ , habrá que emplear, además de la intersección, algún método altimétrico.

**12.1.- INTERSECCIÓN DIRECTA MEDIANTE OBSERVACIONES ANGULARES**

Consiste en determinar un punto  $V$  del terreno a partir de los ángulos acimutales  $\alpha$  y  $\beta$  medidos desde dos puntos conocidos  $D$  e  $I$ . Los vértices  $D$  e  $I$  constituyen una base, de la que conocemos la distancia  $DI = b$  y el acimut  $\theta_D^I$ . Las letras empleadas para denominarlos ( $D$  significa “derecha” e  $I$  significa “izquierda”) se refieren a su situación respecto al punto a determinar.

**12.1.1.- Modo operativo**

Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  (figura 12.2) se determinan por diferencia de las lecturas obtenidas con el teodolito o la estación total, al estacionarlo en cada uno de los puntos de la base  $D$  e  $I$  y visar al punto a determinar  $V$  y al otro punto de la base:

$$\alpha = L_D^I - L_D^V$$

$$\beta = L_I^V - L_I^D$$

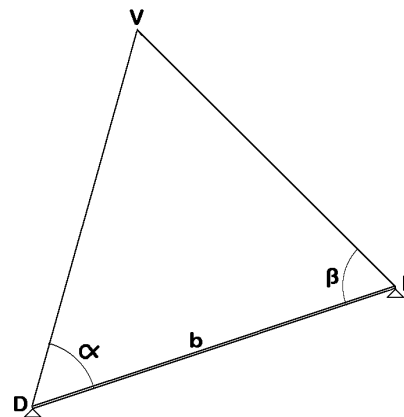


Fig. 12.2. Intersección directa

A partir de estos dos ángulos y de los datos de la base, distancia y acimut, es posible resolver el triángulo  $DIV$  y calcular las coordenadas del punto  $V$ . En la figura 12.3:

- La suma de los tres ángulos del triángulo  $DIV$  debe ser de dos rectos ( $\pi = 200^g = 180^o$ ). Por tanto:  $\omega = \pi - \alpha - \beta$

- Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{DV}{\text{sen } \beta} = \frac{IV}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \omega}$$

de donde podemos despejar  $DV$  e  $IV$ .

- En el caso que muestra la figura 12.3,  $\theta_D^V$  y  $\theta_I^V$  se pueden calcular:

$$\theta_D^V = \theta_D^I - \alpha$$

$$\theta_I^V = \theta_I^D + \beta$$

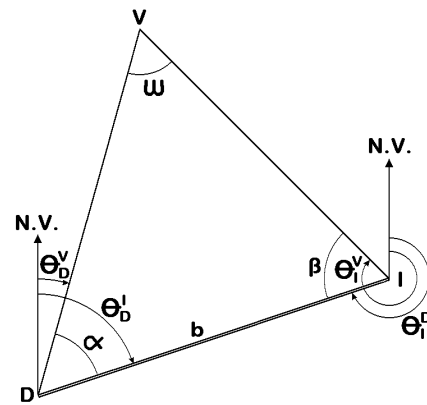


Fig. 12.3. Cálculo de los acimutes

siendo  $\theta_I^V = \theta_V^I \pm \pi$ , siempre que pueda desprejarse la convergencia de meridianos.

- Finalmente, obtenemos las coordenadas parciales de  $V$  a partir de cualquiera de los puntos de la base:

$$X_D^V = DV \text{ sen } \theta_D^V \quad Y_D^V = DV \text{ cos } \theta_D^V$$

$$X_I^V = IV \text{ sen } \theta_I^V \quad Y_I^V = IV \text{ cos } \theta_I^V$$

En topografía interesa siempre comprobar las mediciones efectuadas. En el método de intersección directa es posible hacerlo estacionando también en el punto V y determinando el ángulo  $\omega$  por diferencia de lecturas acimutales de las visuales VD y VI. La suma de los tres ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\omega$  debe valer dos rectos. La diferencia a dos rectos, error de cierre  $e_c$ , si está dentro de la tolerancia, se reparte a partes iguales entre los tres ángulos medidos.

$$(\alpha + \beta + \omega) - 200^g = e_c$$

$$\alpha_{compensado} = \alpha - e_c / 3$$

$$\beta_{compensado} = \beta - e_c / 3$$

$$\omega_{compensado} = \omega - e_c / 3$$

En otras ocasiones se prefiere aplicar la intersección múltiple, estacionando al menos en tres puntos conocidos. Se calculan los triángulos formados y se determina V por varios caminos, comprobando que el error es aceptable y repartiéndolo entre las mediciones angulares realizadas.

### 12.1.2.- Métodos para realizar las observaciones

Dependiendo de la precisión exigida, puede ser conveniente en intersección aplicar la regla de Bessel o los métodos de repetición y reiteración. En una triangulación el número de puntos a visar desde cada vértice será mayor, pues este vértice formará parte de varios triángulos. En este caso, y para aumentar la precisión en las mediciones, se emplean los siguientes métodos:

- **Método de las series o de las vueltas de horizonte.**- Estacionados en un vértice, visamos a todos los que sean visibles desde él, avanzando en el sentido de las agujas del reloj. Volvemos al primer vértice, cerrando el círculo, y comprobamos que no hay diferencia excesiva en la lectura acimutal. A continuación se aplica la regla de Bessel y se repite la vuelta, pero esta vez en sentido contrario, obteniendo un nuevo valor para cada uno de los ángulos medidos. Si la precisión del trabajo exige realizar varias reiteraciones, antes de comenzar cada una de las restantes dobles series se hace girar el limbo acimutal un ángulo aproximado de  $400^g/n$ , siendo  $n$  el número de veces que se va a medir cada ángulo acimutal. Como vemos, este método es similar al de reiteración.

Es el método más rápido, pero tiene el inconveniente de que nos obliga a repetir toda la serie si descubrimos al completarla que ha habido un desplazamiento accidental del limbo. Este método no evita el efecto de torsión, debido a la desigual dilatación por el calor de los distintos componentes de los instrumentos, ya que el tiempo necesario para completar cada serie es suficientemente largo como para que este efecto se produzca.

- **Método de los pares sobre una referencia.**- Estacionado el instrumento en un vértice, se toma una visual de referencia a un punto determinado y desde ella se aplica el método de las series, con series de dos visuales: la de referencia con cada uno de los vértices visados. Es más lento, ya que nos obliga a volver siempre a la visual de referencia, pero tiene la ventaja de que reduce los

errores debidos al efecto de torsión.

- **Método de las combinaciones binarias.**- Consiste en aplicar el método anterior tantas veces como vértices vamos a visar y tomando sucesivamente como referencia cada una de las visuales. Multiplica enormemente el número de mediciones, pero puede ser de aplicación en levantamientos de gran precisión, que nos obligarían, con el método de las series, a efectuar un gran número de reiteraciones.

**12.1.3.- Errores accidentales. Elipse de tolerancia**

El punto *V* siempre se determina con cierta imprecisión, debido a los inevitables errores angulares que se cometen al medir los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Si llevamos a ambos lados de las alineaciones *DV* e *IV* el ángulo *e*, máximo error angular cometido en una visual, obtenemos el cuadrilátero *pqr*s de la figura 12.4. El valor de *e* dependerá de las características del instrumento topográfico empleado. El cuadrilátero nos determina la zona de incertidumbre, dentro de la cual se encontrará realmente el punto *V* si, como es lógico, no se ha superado en ninguna de las visuales el error *e*.

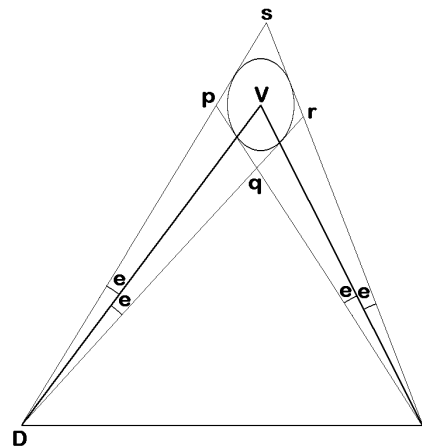


Fig. 12.4. Errores accidentales

Las zonas próximas a las esquinas del cuadrilátero corresponderían a un error próximo al máximo en las dos visuales, lo que no es probable que suceda en la práctica. Por tanto, se sustituye el cuadrilátero por la elipse inscrita, que se denomina *elipse de tolerancia*. Admitimos que los errores que se van a cometer son tales que el punto *V* se situará en el interior de dicha elipse.

Por otro lado, como el valor de *e* será muy pequeño, podemos suponer que los lados del cuadrilátero son paralelos dos a dos y sustituirlo por un paralelogramo. Para determinarlo se trazan por *V* las perpendiculares a *VD* y *VI*, obteniéndose los puntos 1, 2, 3 y 4 (figura 12.5). Los errores lineales  $V1 = V2$  y  $V3 = V4$  dependen del valor de *e* y de la longitud de las visuales *DV* e *IV*.

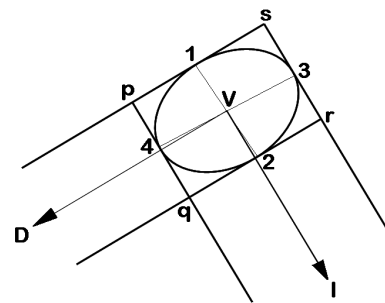


Fig. 12.5. Elipse de tolerancia

El error acimutal cometido en una visual con un teodolito o una estación total vendrá dado, como sabemos, en función de los errores de verticalidad, dirección, puntería y lectura (véase 7.2.2):

$$E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2}$$

Como en la determinación de cada ángulo intervienen dos visuales, según la Teoría de Errores será:

$$e = E_a \sqrt{2}$$

Expresando  $E_a$  en segundos, los errores lineales máximos valdrán:

$$V1 = V2 = DV \operatorname{sen} e = DV \frac{E_a}{r} \sqrt{2}$$

$$V3 = V4 = IV \operatorname{sen} e = IV \frac{E_a}{r} \sqrt{2}$$

siendo  $r$  el número de segundos de un radián. Una vez determinado el paralelogramo se calculan los semiejes de la elipse inscrita, o elipse de tolerancia.

Los errores lineales mínimos se dan cuando las dos visuales  $DV$  e  $IV$  son perpendiculares y de la misma longitud, lo que nos llevaría a elegir los puntos  $D$ ,  $I$  y  $V$  de manera que formen un triángulo aproximadamente isósceles, rectángulo en  $V$ . En ese caso, la elipse de tolerancia se transforma en una circunferencia. En la práctica de la intersección, sin embargo, resultan mucho más convenientes los triángulos aproximadamente equiláteros.

En el caso de ángulos de intersección muy forzados uno de los ejes de la elipse alcanzará valores muy grandes, lo que puede provocar la aparición de errores lineales excesivos. Por eso deben evitarse en lo posible ángulos en  $V$  menores de  $25^\circ$  y mayores de  $175^\circ$ , eligiendo apropiadamente los vértices.

#### 12.1.4.- Acumulación de errores. Comprobación final

En una triangulación cada triángulo se calcula a partir de los anteriores, apoyados todos ellos en la base de la triangulación. Por tanto, los errores se transmiten a lo largo de cada cadena de triángulos, de forma parecida a la que se vio para los errores angulares en poligonación (véase 11.4.1), y serán máximos en los triángulos más alejados de la base.

Siendo  $E_a$  el error acimutal máximo cometido en una visual, expresado en segundos, debe tenerse en cuenta que en cada triángulo se suelen medir los tres ángulos interiores, lo que supone un total de seis visuales. El valor del error se multiplica, por tanto, por  $\sqrt{6}$ . Como, normalmente, se calcula y compensa el error de cierre, admitiremos que el error angular final se reduce a un 80% del valor que hemos calculado. Los errores se van transmitiendo de cada triángulo al siguiente, de forma que el error máximo acumulado sería:

$$\varepsilon_a = 0,8 \sqrt{6} \frac{E_a L}{r} \sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}}$$

siendo  $L$  la longitud media de los lados de los triángulos,  $n'$  el número de triángulos de la cadena más larga (figura 12.6) y  $r$  el número de segundos de un radián. El resultado viene expresado en metros. Esta expresión es idéntica a la deducida para la acumulación de errores angulares en el método de poligonación ya que, en el caso de la triangulación, cada error cometido también se transmite a los triángulos siguientes de la cadena.

Si llamamos  $\varepsilon_b$  al error cometido en la medida de la longitud de la base, el

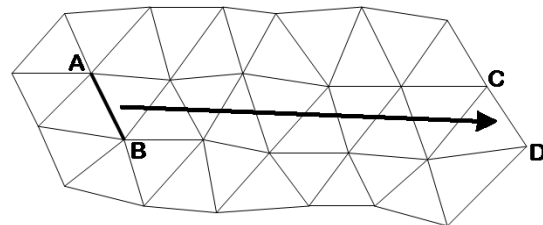


Fig. 12.6. Una cadena con  $n'=10$  triángulos

error máximo de la triangulación, correspondiente a los triángulos más alejados de la base, será:

$$e_{t1} = \sqrt{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_a^2}$$

Si resulta excesivo puede ser conveniente establecer dos redes de triángulos, de forma que la segunda se apoye en la primera y las cadenas de triángulos sean más cortas. Si se actúa así, el error a considerar será el acumulado de las dos redes de triángulos:

$$\varepsilon_t = \sqrt{e_{t1}^2 + e_{t1}^2 + e_{t2}^2}$$

Si sólo se ha establecido una red de triángulos,  $\varepsilon_t = e_{t1}$ . El error  $\varepsilon_t$  se compensará, repartiéndolo entre los  $n''$  triángulos de una cadena, por lo que a cada triángulo de la triangulación secundaria le corresponderá un error  $e'' = \varepsilon_t / \sqrt{n''}$  y una corrección  $c'' = \varepsilon_t / n''$ . Se admite que el máximo error absoluto que se puede producir en un vértice de esta red es la suma del error  $e''$  y de la corrección  $c''$ :

$$\xi_t = e'' + c''$$

Para un itinerario encuadrado entre dos vértices de la triangulación (primaria o secundaria) y llamando  $e_c$  al error de cierre propio del itinerario, tendremos:

$$e_i = \sqrt{\xi_t^2 + \xi_t^2 + e_c^2}$$

Este valor  $e_i$  representa el error acumulado de la triangulación y el itinerario. Para calcular el error total, teniendo en cuenta también la radiación, hay que emplear este valor de  $e_i$  para calcular el error  $e_u$  tal como vimos en 11.4.3.

## 12.2.- INTERSECCIÓN DIRECTA MEDIANTE OBSERVACIONES DE DISTANCIAS

Los sistemas electrónicos de medida permiten obtener grandes precisiones en la determinación de distancias. Por eso, en ocasiones, se prefiere sustituir el método clásico empleado en triangulaciones, la intersección mediante observaciones angulares, por la realizada mediante observaciones de distancias, también denominada *trilateración*.

### 12.2.1.- Modo operativo

Con este método, en lugar de los ángulos acimutales, mediremos los lados de cada uno de los triángulos formados. Las distancias medidas deben reducirse al horizonte. Conocidos los lados es posible resolver el triángulo formado y continuar el cálculo por el procedimiento que hemos explicado.

Si se aplica la trilateración simple, basta con medir los lados  $DV$  e  $IV$  (figura 12.7), pues la longitud de la base  $b$  es conocida. Como comprobación, pueden medirse también los ángulos interiores del triángulo desde aquellos puntos en los que se haga estación.

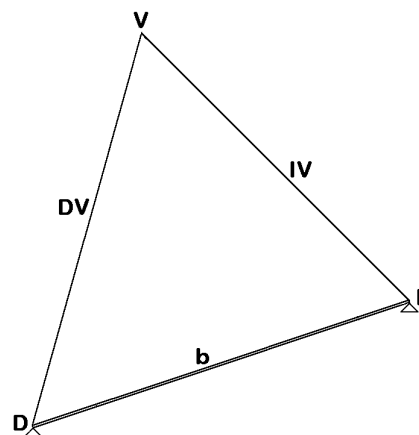


Fig. 12.7. Trilateración topográfica



Puesto que se calcula como un triángulo situado sobre el plano horizontal, las tres distancias deben ser reducidas. En caso necesario, anotaremos los ángulos verticales correspondientes para poder reducir al horizonte las distancias *DV* e *IV*.

Además, si los vértices están situados a cierta altitud, hay que reducir al nivel del mar las distancias medidas (figura 12.8). Para ello, siendo *A'B'* la longitud medida reducida al horizonte entre dos vértices *A* y *B*, *h* la altitud y *R* el radio del elipsoide en la zona del levantamiento, será:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{R}{R+h}$$

*AB* es la longitud reducida al nivel del mar.

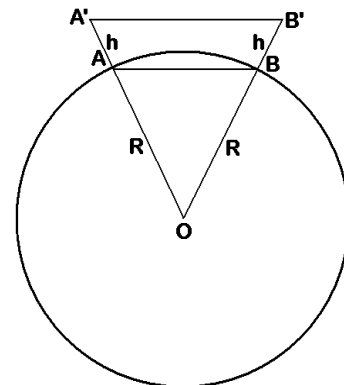


Fig. 12.8. Reducción al nivel del mar

El triángulo se resuelve aplicando el teorema del coseno y, posteriormente, el teorema del seno para calcular los tres ángulos interiores. A partir de ese momento, conocidos los ángulos y las distancias, se actúa como en 12.1.1.

**12.2.2.- Errores accidentales. Elipse de tolerancia**

En este caso, los errores accidentales a considerar son los propios de la medición electrónica de distancias (véase 7.5.3). Estos errores actúan en la misma dirección que las visuales lanzadas y dependen, en parte, de la longitud de la visual.

Siendo *E<sub>d</sub>* el error en distancia máximo que puede cometerse en la medida de la distancia *DV* y *E<sub>d</sub>'* el correspondiente a la distancia *IV*, la elipse de tolerancia (figura 12.9) se construye de forma análoga a la que se vio en 12.1.3.

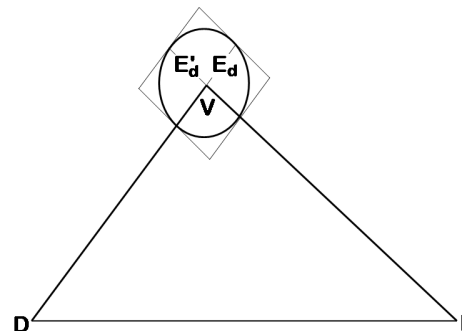


Fig. 12.9. Trilateración: elipse de tolerancia

En el caso de una cadena de triángulos levantados por trilateración se tendría, de forma análoga a la que se vio en 11.4.1:

$$\epsilon_d = 0,8 \sqrt{3} E_d \sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}}$$

siendo *E<sub>d</sub>* el error en la medida de la distancia cometido en la medición de un lado de longitud media y *n'* el número de triángulos de la cadena. A este error acumulado habría que añadir el cometido en la medida de la base, que se trata como en 12.1.4.

**12.3.- INTERSECCIÓN INVERSA MEDIANTE OBSERVACIONES ANGULARES**

En intersección inversa simple sólo se hace estación en el punto o puntos que se pretende determinar. Se calcularán, por diferencia de lecturas, los ángulos horizontales

necesarios para aplicar las expresiones propias de cada uno de los métodos.

### 12.3.1.- Método de Pothenot

Consiste en determinar un punto  $V$  del terreno, en el que se ha estacionado un instrumento topográfico, visando a tres puntos conocidos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , normalmente vértices geodésicos o topográficos. Las únicas lecturas a realizar, como sucede siempre en el método de intersección, son los ángulos acimutales correspondientes a las tres visuales.

Este método se utiliza para el cálculo de puntos complementarios en la triangulación topográfica. También puede aplicarse para situar y orientar la primera estación de un itinerario, lanzando desde ésta visuales a tres vértices topográficos o geodésicos que sean visibles.

El problema puede resolverse conociendo las coordenadas planimétricas de los tres vértices visados y los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , calculados por diferencia de las lecturas acimutales efectuadas. Con estos datos existen dos posibles soluciones, por lo que habrá que especificar cuál de ellas es la que interesa. Para ello basta con situar aproximadamente el punto  $V$  sobre un mapa o plano, o bien indicar su posición geográfica aproximada con relación a los tres vértices visados.

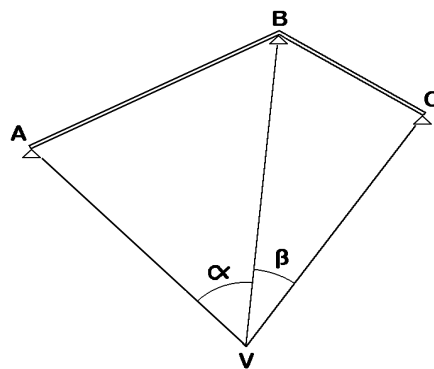


Fig. 12.10. Método de Pothenot

#### • Resolución gráfica

Para determinar gráficamente la posición del punto  $V$  se dibuja en un plano la situación de los tres vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  y se construyen los arcos capaces de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  (figura 12.11):

- A partir de los puntos  $A$  y  $C$  se llevan los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .
- Se trazan por  $A$  y  $C$  las perpendiculares  $A1$  y  $C2$  a las rectas obtenidas.
- Se trazan las mediatrices de los segmentos  $AB$  y  $BC$ .
- Las intersecciones de las mediatrices con las perpendiculares  $A1$  y  $C2$  determinan los puntos  $1$  y  $2$ , centros de los arcos capaces.
- Se trazan los arcos capaces, cuyas intersecciones son el punto  $B$  y el punto  $V$  buscado.

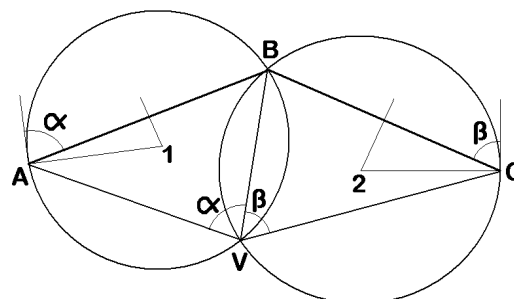


Fig. 12.11. Método de Pothenot: resolución gráfica

La segunda solución se obtendría llevando los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  hacia el otro lado de las rectas  $AB$  y  $BC$  (en el caso de la figura 12.11, hacia abajo).

#### • Resolución numérica

Se pretende calcular las coordenadas planimétricas del punto  $V$  a partir de las de los puntos conocidos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Conocemos también los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , obtenidos en el

terreno al estacionar un instrumento topográfico en el punto a determinar y visar a los tres vértices conocidos. El problema quedará resuelto cuando se conozcan los valores de los ángulos en A y C. Para resolverlo es preciso aplicar las dos expresiones que se deducen a continuación y que aparecen en el texto dentro de sendos recuadros:

- 1) Con los datos disponibles podemos calcular:

$$a = AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$b = BC = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2}$$

El ángulo en B puede calcularse fácilmente. En el caso que muestra la figura 12.12, será:

$$\hat{B} = \theta_B^A - \theta_B^C$$

Los ángulos en A y C no son conocidos, pero podemos calcular su suma:

$$\hat{A} + \hat{C} = 2\pi - \hat{B} - \alpha - \beta$$

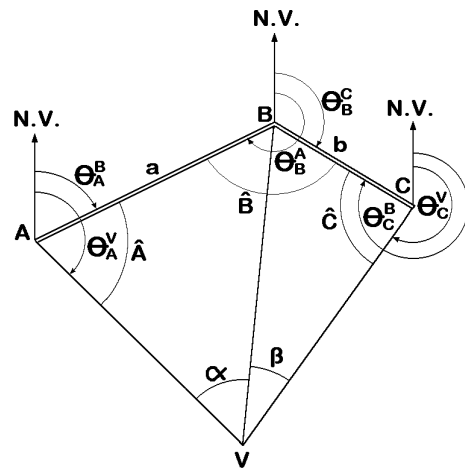


Fig. 12.12. Método de Pothenot: resolución numérica

- 2) Aplicando el teorema del seno en los triángulos ABV y BVC:

$$\frac{BV}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{a}{\text{sen } \alpha} \quad \frac{BV}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \quad BV = \frac{a \text{ sen } \hat{A}}{\text{sen } \alpha} = \frac{b \text{ sen } \hat{C}}{\text{sen } \beta}$$

Agrupando a un lado de la igualdad los términos desconocidos:

$$\frac{a \text{ sen } \beta}{b \text{ sen } \alpha} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}}$$

El primer miembro de la igualdad anterior es conocido. Para simplificar los cálculos se emplea un artificio, igualándolo a la tangente de un ángulo y imaginario.

$$\boxed{\text{tg } \gamma = \frac{a \text{ sen } \beta}{b \text{ sen } \alpha}}$$

- 3) Conocida su suma, los ángulos en A y C pueden calcularse si conocemos también su diferencia. Para ello, vamos a poner la igualdad anterior en función de la suma y la diferencia de estos dos ángulos. Sumando una unidad a ambos lados de la igualdad:

$$1 + \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} = 1 + \text{tg } \gamma \quad \frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{A}} + \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} = 1 + \text{tg } \gamma \quad \frac{\text{sen } \hat{A} + \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} = 1 + \text{tg } \gamma$$

y de la misma forma, restando de la unidad los dos miembros de la ecuación obtenida en 2):

$$\frac{\text{sen } \hat{A} - \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} = 1 - \text{tg } \gamma$$

Dividiendo miembro a miembro las dos igualdades obtenidas:

$$\frac{\text{sen } \hat{A} + \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A} - \text{sen } \hat{C}} = \frac{1 + \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \gamma}$$

- 4) Por otra parte, si hacemos  $\hat{A} = m + n$  y  $\hat{C} = m - n$ , siempre existirán dos valores  $m$  y  $n$  que lo cumplan. De aquí:

$$\hat{A} + \hat{C} = 2m \quad m = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \quad ; \quad \hat{A} - \hat{C} = 2n \quad n = \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \text{sen } \hat{A} + \text{sen } \hat{C} &= \text{sen } (m + n) + \text{sen } (m - n) = \\ &= \text{sen } m \cos n + \cos m \text{sen } n + \text{sen } m \cos n - \cos m \text{sen } n = \\ &= 2 \text{sen } m \cos n = 2 \text{sen } \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \end{aligned}$$

De igual modo:

$$\begin{aligned} \text{sen } \hat{A} - \text{sen } \hat{C} &= \text{sen } (m + n) - \text{sen } (m - n) = \\ &= \text{sen } m \cos n + \cos m \text{sen } n - (\text{sen } m \cos n - \cos m \text{sen } n) = \\ &= 2 \cos m \text{sen } n = 2 \cos \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \text{sen } \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \end{aligned}$$

De donde:

$$\frac{\text{sen } \hat{A} + \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A} - \text{sen } \hat{C}} = \frac{2 \text{sen } \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2}}{2 \cos \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \text{sen } \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2}} = \frac{\text{tg } \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}}{\text{tg } \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2}} = \frac{1 + \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \gamma}$$

- 5) Podemos modificar el segundo miembro de esta última ecuación, teniendo en cuenta que  $\text{tg } \pi/4 = \text{cotg } \pi/4 = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \gamma} &= \frac{\text{tg } \frac{\pi}{4} + \text{tg } \gamma}{\text{cotg } \frac{\pi}{4} - \text{tg } \gamma} \\ \text{tg } \frac{\pi}{4} + \text{tg } \gamma &= \frac{\text{sen } \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} + \frac{\text{sen } \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{4} \cos \gamma + \cos \frac{\pi}{4} \text{sen } \gamma}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \gamma} = \frac{\text{sen } (\frac{\pi}{4} + \gamma)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \gamma} \end{aligned}$$

$$\cotg \frac{\pi}{4} - tg \gamma = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sen \frac{\pi}{4}} - \frac{\sen \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} \cos \gamma - \sen \frac{\pi}{4} \sen \gamma}{\sen \frac{\pi}{4} \cos \gamma} = \frac{\cos (\frac{\pi}{4} + \gamma)}{\sen \frac{\pi}{4} \cos \gamma}$$

Dividiendo y teniendo en cuenta que  $\sen \pi/4 = \cos \pi/4$ :

$$\frac{1 + tg \gamma}{1 - tg \gamma} = \frac{\sen (\frac{\pi}{4} + \gamma)}{\cos (\frac{\pi}{4} + \gamma)} = tg (\frac{\pi}{4} + \gamma)$$

De esta igualdad y de la del punto 4) obtenemos finalmente:

$$\boxed{tg \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} = \frac{tg \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}}{tg (\frac{\pi}{4} + \gamma)}}$$

de donde podemos calcular  $\hat{A} - \hat{C}$ . A partir de aquí tenemos elementos suficientes para determinar las coordenadas de V. En efecto, las distancias AV, BV, CV se calculan aplicando el teorema del seno en los triángulos ABV y BVC. Los acimutes  $\theta_A^V$  y  $\theta_C^V$  valen:

$$\theta_A^V = \theta_A^B + \hat{A} \quad \theta_C^V = \theta_C^B - \hat{C}$$

y con estos datos, el cálculo de las coordenadas parciales de V respecto a A y a C es inmediato:

$$\begin{aligned} X_A^V &= AV \sen \theta_A^V & Y_A^V &= AV \cos \theta_A^V \\ X_C^V &= CV \sen \theta_C^V & Y_C^V &= CV \cos \theta_C^V \end{aligned}$$

Las coordenadas totales de V pueden calcularse por los dos caminos, a partir de las de A y de las de C, para detectar equivocaciones en los cálculos. En cuanto a los posibles errores en los datos de campo, tampoco la intersección inversa simple tiene comprobación. Es conveniente, por tanto, estacionar también en alguno de los vértices conocidos y visar al punto V. Si esto no fuese posible, puede visarse desde V un cuarto vértice que, con los tres anteriores, nos permita resolver más de un Pothenet y comprobar que las coordenadas obtenidas para V son correctas.

**12.3.2.- Método de Hansen**

Consiste en determinar dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  del terreno estacionando en cada uno de ellos y visando a dos vértices conocidos A y B y al otro punto desconocido. Como en los otros tipos de intersección, solamente tomaremos las lecturas acimutales y por diferencia entre estas obtendremos los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  y  $\beta_2$  de la figura 12.13. El problema quedará resuelto determinando los ángulos  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1$  y  $\delta_2$ .

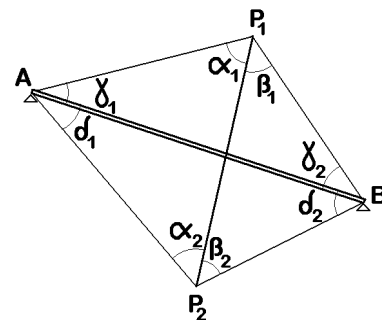


Fig. 12.13. Método de Hansen

Este método se aplica, en sustitución del de Pothenet, cuando solo se dispone

de dos vértices visibles desde el punto a determinar. El tercer vértice se sustituye por otro punto desconocido, en el que es preciso estacionar. También se aplica para trasladar una base AB conocida a otra zona.

• **Resolución numérica**

Los datos de partida son las coordenadas planimétricas de los vértices A y B y los ángulos acimutales medidos desde los puntos de estación.

Para poder aplicar las expresiones del método de Hansen es preciso que las denominaciones de los ángulos coincidan con las de las figuras 12.13 y 12.14:

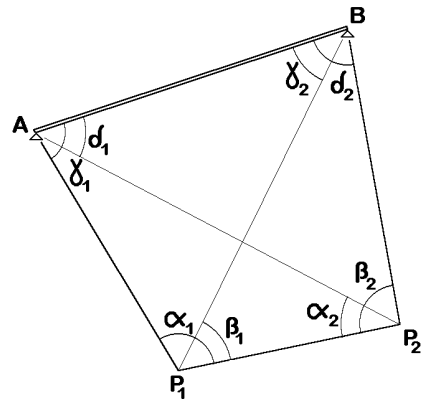


Fig. 12.14. Método de Hansen

- Tomamos el triángulo formado por el primer vértice A y los dos puntos de estación P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>. El ángulo, interior al triángulo, en P<sub>1</sub> se llama α<sub>1</sub>. El ángulo en P<sub>2</sub> se llama α<sub>2</sub>.
- Tomamos el triángulo formado por el segundo vértice B y los dos puntos de estación. El ángulo en P<sub>1</sub> se llama β<sub>1</sub>; el ángulo en P<sub>2</sub> se llama β<sub>2</sub>.
- Tomamos el triángulo formado por los dos vértices y el primer punto de estación P<sub>1</sub>. El ángulo en A se llama γ<sub>1</sub>; el ángulo en B se llama γ<sub>2</sub>.
- Tomamos el triángulo formado por los dos vértices y el segundo punto de estación. El ángulo en A se llama δ<sub>1</sub>, el ángulo en B se llama δ<sub>2</sub>.

Las seis expresiones a aplicar para resolver el problema de Hansen, que se deducen a continuación, aparecen recuadradas en el texto:

- 1) En los triángulos ABP<sub>1</sub> y ABP<sub>2</sub> de las figuras 12.13 y 12.14:  

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \pi - (\alpha_1 - \beta_1) \quad \delta_1 + \delta_2 = \pi - (\beta_2 - \alpha_2)$$

Como en el método de Pothenot, interesa determinar γ<sub>1</sub>-γ<sub>2</sub> y δ<sub>1</sub>-δ<sub>2</sub> para poder calcular los cuatro ángulos γ<sub>1</sub>, γ<sub>2</sub>, δ<sub>1</sub> y δ<sub>2</sub>.

- 2) Aplicando el teorema del seno en los triángulos AP<sub>1</sub>P<sub>2</sub> y BP<sub>1</sub>P<sub>2</sub>:

$$\frac{AP_1}{\text{sen } \alpha_2} = \frac{P_1P_2}{\text{sen}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{P_1P_2}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad AP_1 = P_1P_2 K_1$$

Como α<sub>1</sub> y α<sub>2</sub> son conocidos, podemos hacer:

$$\boxed{K_1(\text{conocido}) = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}} \quad AP_1 = P_1P_2 K_1$$

De igual modo:

$$AP_2 = \frac{P_1P_2 \text{sen } \alpha_1}{\text{sen}(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} = P_1P_2 K_2 \quad \text{con } \boxed{K_2 = \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}}$$

$$BP_1 = P_1P_2 K_3 \quad \text{con } \boxed{K_3 = \frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen}(\beta_1 + \beta_2)}}$$

$$BP_2 = P_1 P_2 K_4 \quad \text{con} \quad K_4 = \frac{\text{sen } \beta_1}{\text{sen}(\beta_1 + \beta_2)}$$

Por otro lado, aplicando la misma propiedad al triángulo  $ABP_1$ :

$$\frac{BP_1}{\text{sen } \gamma_1} = \frac{AP_1}{\text{sen } \gamma_2} \quad \frac{\text{sen } \gamma_1}{\text{sen } \gamma_2} = \frac{BP_1}{AP_1} = \frac{P_1 P_2 K_3}{P_1 P_2 K_1} = \frac{K_3}{K_1}$$

- 3) A partir de aquí, desarrollamos de forma similar a la empleada en el método de Pothénot:

En primer lugar, sumamos una unidad a ambos lados de la igualdad anterior y los ángulos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se sustituyen por la suma y la diferencia, respectivamente, de dos ángulos auxiliares  $m$  y  $n$ . Estos dos ángulos se determinan del modo que vimos en 12.2.1.

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } \gamma_1}{\text{sen } \gamma_2} + 1 &= \frac{\text{sen } \gamma_1 + \text{sen } \gamma_2}{\text{sen } \gamma_2} = \frac{\text{sen}(m+n) + \text{sen}(m-n)}{\text{sen } \gamma_2} = \\ &= \frac{\text{sen } m \cos n + \cos m \text{ sen } n + \text{sen } m \cos n - \cos m \text{ sen } n}{\text{sen } \gamma_2} = \\ &= \frac{2 \text{ sen } m \cos n}{\text{sen } \gamma_2} = \frac{2 \text{ sen } \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}}{\text{sen } \gamma_2} = \frac{K_3 + K_1}{K_1} \end{aligned}$$

A continuación se realiza la misma operación, pero restando una unidad en ambos lados de la igualdad. No olvidemos que el objetivo es transformar la ecuación obtenida en 2) de forma que quede en función de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } \gamma_1}{\text{sen } \gamma_2} - 1 &= \frac{\text{sen } \gamma_1 - \text{sen } \gamma_2}{\text{sen } \gamma_2} = \frac{\text{sen}(m+n) - \text{sen}(m-n)}{\text{sen } \gamma_2} = \\ &= \frac{\text{sen } m \cos n + \cos m \text{ sen } n - (\text{sen } m \cos n - \cos m \text{ sen } n)}{\text{sen } \gamma_2} = \\ &= \frac{2 \cos m \text{ sen } n}{\text{sen } \gamma_2} = \frac{2 \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \text{ sen } \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}}{\text{sen } \gamma_2} = \frac{K_3 - K_1}{K_1} \end{aligned}$$

- 3) Dividiendo miembro a miembro las dos igualdades obtenidas:

$$\frac{\text{tg } \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}{\text{tg } \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}} = \frac{K_3 + K_1}{K_3 - K_1}$$

de donde podemos despejar y calcular  $\gamma_1 - \gamma_2$ , ya que todos los demás datos son conocidos. A partir de aquí y del valor (conocido) de  $\gamma_1 + \gamma_2$ , podemos calcular  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Procediendo de forma similar:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}} = \frac{K_4 + K_2}{K_4 - K_2}$$

que nos permite calcular los valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Como comprobación, estos valores pueden calcularse también, en el caso que se muestra en las figuras, mediante:

$$\delta_2 = 2\pi - \gamma_1 - \alpha_1 - \beta_2 \quad \delta_1 = \pi - \delta_2 - (\beta_2 - \alpha_2)$$



## 13. LEVANTAMIENTO ALTIMÉTRICO

### 13.1.- INTRODUCCIÓN

#### 13.1.1.- Conceptos altimétricos

Aunque en planimetría puede suponerse la tierra como plana dentro de los límites marcados por el triángulo geodésico de 3<sup>er</sup> orden, en altimetría esto representaría un error apreciable, incluso en distancias pequeñas. Salvo para distancias muy pequeñas (<100m), la superficie de referencia para los trabajos altimétricos no puede ser un plano. Los datos han de referirse a *superficies de nivel*, que, como sabemos, se definen como las superficies equipotenciales que iría adoptando el nivel del agua en el caso de una hipotética crecida.

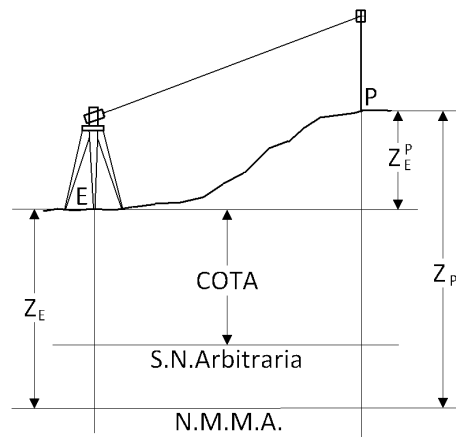


Fig. 13.1. Altitud, cota y desnivel

En general, interesará emplear una referencia común que permita relacionar entre sí los distintos levantamientos altimétricos que se realicen. La superficie de nivel que se emplea como origen de coordenadas  $Z$  corresponde al nivel medio del mar en las distintas zonas de la Tierra y a su prolongación por debajo de los continentes, es decir lo que se denomina geoide. En España se ha establecido como referencia la altitud media del mar en Alicante (N.M.M.A.). A partir de este punto del geoide, calculado con gran precisión, se van determinando otros para crear toda una red de vértices de nivelación que sirvan de apoyo a los trabajos altimétricos.

Se denomina *altitud* a la altura de un punto respecto a la superficie de nivel de referencia (figura 13.1); las altitudes son, por tanto, coordenadas  $Z$  absolutas. *Cota* es la altura de un punto respecto a otra superficie de nivel distinta a la de referencia y que se ha adoptado por conveniencia; por tanto, las cotas son coordenadas  $Z$  relativas. Los instrumentos topográficos nos permiten medir el *desnivel*, es decir la diferencia de altitud o de cota entre dos puntos, uno de los cuales puede ser el punto de estación. A partir de estos desniveles se calcularán las altitudes o las cotas de los puntos visados mediante arrastre de coordenadas  $Z$  desde otros puntos conocidos.

#### 13.1.2.- Métodos de nivelación

Existen tres métodos para realizar una nivelación, según el instrumento topográfico que se emplee:

- *Nivelación geométrica o por alturas*: Se emplea el nivel.
- *Nivelación trigonométrica o por pendientes*: Se emplea la estación total.
- *Nivelación barométrica*: Se emplea el altímetro.

En general, la nivelación geométrica es la más precisa. La nivelación trigonométrica puede realizarse en paralelo a los métodos planimétricos de itinerario y radiación. Por eso será de aplicación en el caso de levantamientos completos en los que las exigencias de precisión altimétrica no sean muy grandes. La nivelación barométrica es la menos precisa y no vamos a extendernos en ella.

Llamamos *nivelación simple* a la consistente en calcular directamente el desnivel entre dos puntos suficientemente próximos. Si los dos puntos estuviesen muy alejados entre sí y fuese necesario emplear estaciones intermedias, hablaríamos de *nivelación compuesta*. Éste es el caso de los itinerarios altimétricos, en los que se van calculando desniveles de cada punto respecto al anterior. Conocida la altitud del primero, determinamos las de los demás, sumando los desniveles correspondientes (con su signo).

Los itinerarios altimétricos deben ser cerrados o encuadrados, como los planimétricos. Se determinará el error de cierre altimétrico y se compensará de forma similar a la estudiada en planimetría.

**13.2.- ERRORES SISTEMÁTICOS EN ALTIMETRÍA**

Los errores sistemáticos que vamos a estudiar son los debidos a la falta de paralelismo entre las superficies de nivel, a la curvatura de la Tierra y a la refracción de la luz.

**13.2.1.- Falta de paralelismo entre las superficies de nivel**

La tierra no es esférica, sino que su forma se aproxima a la de un elipsoide de revolución. A medida que aumenta la latitud, la distancia al centro de la tierra disminuye y la atracción de esta sobre un objeto situado en su superficie será mayor, ya que esta fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Además, la fuerza centrífuga, debida al giro de la tierra en torno a su eje, es máxima en el ecuador y mínima en los polos. Esta fuerza actúa en sentido contrario a la de gravedad; por tanto, su efecto será el de aumentar aun más la diferencia gravitatoria entre el ecuador y los polos.

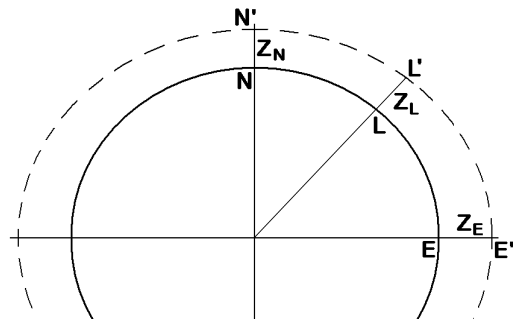


Fig. 13.2. Falta de paralelismo entre las superficies de nivel

Dos superficies se denominan equipotenciales cuando el trabajo necesario para elevar un cuerpo desde una a la otra es el mismo en todos los puntos. El trabajo necesario para elevar un cuerpo de masa  $M$  entre dos puntos situados en dos superficies de nivel  $ELN$  y  $E'L'N'$  será (figura 13.2):

$$T = M g_E Z_E = M g_L Z_L$$

luego:

$$\frac{Z_L}{Z_E} = \frac{g_E}{g_L}$$

Como los valores de la gravedad  $g_E$  y  $g_L$  son distintos en los distintos puntos de la Tierra, también lo serán  $Z_E$  y  $Z_L$ , desniveles entre las superficies equipotenciales en dos zonas distintas. Este hecho complica aquellos trabajos altimétricos cuya envergadura obliga a tenerlo en cuenta. En efecto, si un operador parte de  $E'$  y se mueve por la superficie de nivel  $E'L'N'$  hasta llegar a  $N'$ , adjudicará a ambos puntos la misma altitud, aunque, como hemos visto, los valores  $Z_E$  y  $Z_L$  son distintos. Para considerarlo puede emplearse alguno de los procedimientos siguientes, que dan resultados distintos:

- La *cota ortométrica* se define como la altitud real de los puntos respecto a la superficie de nivel cero, no teniendo en cuenta las restantes superficies de nivel. En nuestro ejemplo, los puntos  $E'$ ,  $L'$  y  $N'$  tendrán cotas ortométricas diferentes al tener distintos valores de  $Z$ .
- La *cota dinámica* de un punto, por el contrario, se define como el esfuerzo expresado en kilográmetros necesario para elevar un kilogramo desde la superficie de nivel cero hasta la que pasa por el punto. Los tres puntos de nuestro ejemplo tendrán la misma cota dinámica, pues están situados en la misma superficie de nivel.

Dependiendo de las necesidades del trabajo altimétrico se aplicará uno u otro de estos procedimientos.

**13.2.2.- Error debido a la curvatura terrestre**

El error debido a la curvatura terrestre está causado por la imposibilidad de que las visuales lanzadas con un anteojo sigan la curvatura de la Tierra. Para cuantificarlo vamos a suponer que las superficies de nivel son esféricas y que las visuales siguen líneas rectas, aunque ya veremos que esto último tampoco es cierto.

El desnivel medido por un instrumento topográfico estacionado en  $E$  (figura 13.3) al visar a un punto  $A$  estará referido al plano horizontal que pasa por  $E$  y será  $AA'$ . Sin embargo, el desnivel real debe ir referido a la superficie de nivel que pasa por  $E$ , y no al plano horizontal, es decir que será  $AA'''$ .

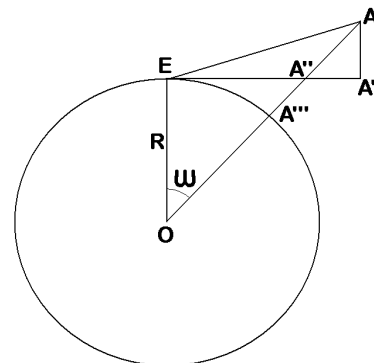


Fig. 13.3. Error debido a la curvatura terrestre

Como  $\omega$ , ángulo formado en el centro de la Tierra por las verticales  $OE$  y  $OA''$ , será muy pequeño, podemos suponer  $AA' \approx AA''$ . La corrección a introducir en el desnivel será entonces:

$$c_e = AA''' - AA' \approx AA''' - AA'' = A''A'''$$

Al ser  $\omega$  muy pequeño, podemos suponer también que  $EA'' \approx EA' = D$ , siendo  $D$  la distancia reducida entre  $E$  y  $A$ . En el triángulo  $OEA''$ , rectángulo en  $E$ , tendremos los lados:

$$OA'' \approx R + c_e \quad OE = R \quad EA'' \approx D$$

siendo  $R$  el radio de la Tierra, supuesta esférica. Por tanto:

$$(R + c_e)^2 = R^2 + D^2$$

$$R^2 + c_e^2 + 2 R c_e = R^2 + D^2$$

Como la corrección  $c_e$  será muy pequeña, podemos despreciar  $c_e^2$ , quedando:

$$2 c_e R = D^2 \quad c_e = \frac{D^2}{2R}$$

Esta corrección será siempre positiva, lo que significa que el desnivel real siempre será mayor que el medido, y es función de la distancia reducida entre los puntos A y E.

### 13.2.3.- Error de refracción

La luz experimenta un fenómeno de refracción al atravesar la interfase entre dos medios de distinta densidad. La atmósfera terrestre puede considerarse como una serie de capas de grosor infinitesimal y densidad decreciente con la altura. Un rayo de luz que parte de un punto A sufrirá una serie de refracciones y no seguirá una trayectoria rectilínea, sino curva. Por tanto, las visuales lanzadas con un anteojo no serán rectas, sino siguiendo una trayectoria curva, que puede asimilarse a un arco de circunferencia de radio  $R'$  y centro  $O'$ .

Un observador situado en E recibe la luz procedente de un punto A según un arco de centro  $O'$  y radio  $R'$  (figura 13.4). Por tanto, asignará a A la lectura correspondiente a  $A'$ , siendo  $EA'$  la tangente en E al arco EA. El operador verá, a través del anteojo, el punto A, pero estará apuntando a  $A'$ , por lo que cometerá un error  $AA'$  por exceso. La corrección  $c_r = AA'$  tendrá signo negativo. En el triángulo  $O'EA'$  de la figura, tenemos:

$$O'A' = R' + c_r \quad O'E = R' \quad EA' = D$$

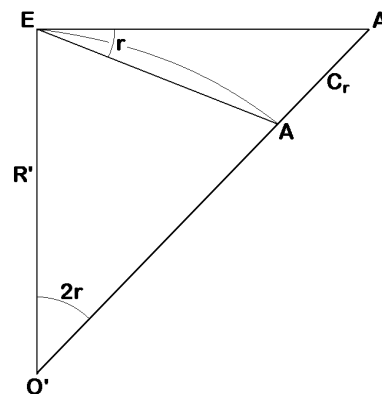


Fig. 13.4. Error de refracción

siendo  $D$  la distancia reducida calculada entre los dos puntos. El triángulo es rectángulo en E, por lo que:

$$R'^2 + c_r^2 + 2 R' c_r = R'^2 + D^2$$

Despreciando  $c_r^2$ , queda:

$$c_r = \frac{D^2}{2R'}$$

El ángulo  $r$ , que es el error angular cometido, se llama *ángulo de refracción*. La relación entre el radio de la Tierra  $R$  y  $R'$  será  $R/R' = 2K$ , donde  $K$  es el llamado *coeficiente de refracción*. De aquí:

$$c_r = \frac{D^2}{2R'} \cdot 2K = \frac{D^2 K}{R}$$

Esta corrección es, como hemos visto, de signo contrario a la correspondiente a la curvatura terrestre, y, por tanto, la compensa parcialmente.

El coeficiente de refracción  $K$  varía con las condiciones atmosféricas, por lo que, si queremos aplicar la corrección con precisión, debemos calcularlo para cada trabajo topográfico. En España es del orden de  $0,08$ , resultando  $R'$  unas  $6,25$  veces mayor que el radio de la tierra  $R$ .

- **Cálculo del coeficiente de refracción:** Si estacionamos dos goniómetros en dos puntos  $A$  y  $B$  y visamos simultáneamente desde  $A$  a  $B$  y desde  $B$  a  $A$ , la trayectoria descrita por las dos visuales será la misma (figura 13.5). Supongamos, para simplificar, que ambos puntos se encuentran sobre la superficie terrestre y que ésta es esférica. Leyendo las distancias cenitales  $\varphi$  y  $\varphi'$ , tendremos:

$$\omega + [200^g - (\varphi + r)] + [200^g - (\varphi' + r)] = 200^g$$

$$2r = \omega - (\varphi + \varphi') + 200^g$$

Dividiendo por  $2\omega$ :

$$\frac{r}{\omega} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega} (\varphi + \varphi' - 200^g)$$

Como  $\omega$  y  $r$  son ángulos muy pequeños, podemos hacer:

$$\frac{2r}{\omega} = \frac{D/R'}{D/R} = \frac{R}{R'} = 2K$$

de donde:

$$K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega} (\varphi + \varphi' - 200^g)$$

siendo  $K$  el coeficiente de refracción buscado. Con este procedimiento puede determinarse  $K$  en el terreno y aplicarlo para calcular la corrección por refracción atmosférica.

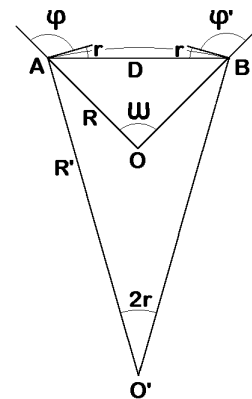


Fig. 13.5. Cálculo del coeficiente de refracción

### 13.3.- NIVELACIÓN GEOMÉTRICA O POR ALTURAS

Como hemos dicho, llamamos nivelación geométrica o por alturas a la que se realiza empleando el nivel o equaltímetro. Se trata, por tanto, de una nivelación por visuales horizontales.

#### 13.3.1.- Nivelación geométrica simple

Ya hemos indicado que nivelación simple es la consistente en calcular directamente el desnivel entre dos puntos, sin necesidad de realizar arrastre de coordenadas. Son varios los métodos que pueden emplearse en nivelación geométrica simple. Algunos de ellos eliminan los errores sistemáticos que hemos estudiado en este capítulo y otros permiten comprobar las lecturas efectuadas.

- **Método del punto extremo:** Para determinar el desnivel  $Z_A^B$ , entre dos puntos  $A$  y  $B$ , se estaciona un nivel en  $A$  y se determina la lectura  $L_A^B$  a una mira situada en  $B$  (figura 13.6). La lectura vendrá afectada por un error  $e$ ,

combinación de los de esfericidad y refracción:  $L_A^B = m_A^B + e$ . El cálculo del desnivel estará afectado por el mismo error  $e$ :

$$Z_A^B = i_A - L_A^B = i_A - (m_A^B + e)$$

siendo  $i_A$  la altura del instrumento. Este método es el más sencillo, pero no permite eliminar los errores sistemáticos de esfericidad y refracción. El método obliga, además, a medir la altura del instrumento, lo que siempre supone un error considerable. Debe limitarse a distancias de nivelada inferiores a  $100m$ .

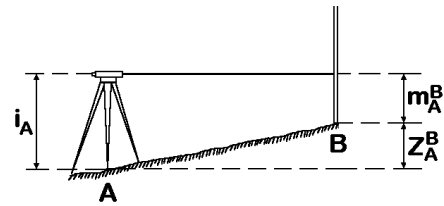


Fig. 13.6. Método del punto extremo

- Método del punto medio:** Se estaciona el nivel en un punto intermedio entre A y B, tal que  $EA = EB$  (figura 13.7). Podemos suponer que los errores sistemáticos cometidos son iguales en las dos visuales, al ser estas de la misma longitud. Entonces:

$$Z_A^B = L_E^A - L_E^B = m_E^A + e - (m_E^B + e) = m_E^A - m_E^B$$

Los errores de esfericidad y refracción se eliminan y, además, tiene la ventaja de que no es preciso medir la altura del instrumento. En la práctica basta con que  $EA \approx EB$  y no es preciso que los tres puntos estén alineados.

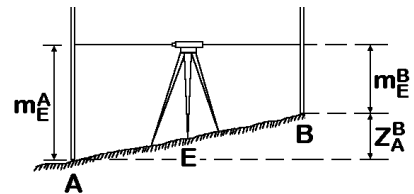


Fig. 13.7. Método del punto medio

Ninguno de estos dos métodos tiene comprobación, ya que el desnivel se determina una sola vez. Por ello, cualquier error grosero podría pasar desapercibido.

- Método de estaciones recíprocas:** Se estaciona primero en A y luego en B, calculando  $Z_A^B$  y  $Z_B^A$  por el método del punto extremo (figura 13.8). Los errores sistemáticos  $e$  serán los mismos en ambos casos:

$$Z_A^B = i_A - (m_A^B + e)$$

$$Z_B^A = i_B - (m_B^A + e)$$

Como resultado del desnivel entre los puntos A y B se dará la semidiferencia de los dos desniveles calculados:

$$\bar{Z}_A^B = \frac{i_A - i_B}{2} - \frac{m_A^B - m_B^A}{2}$$

Los errores sistemáticos se eliminan, pero es preciso estacionar en dos puntos y medir la altura del instrumento en ambas estaciones. La ventaja del método es que tiene comprobación, ya que el desnivel se determina dos veces.

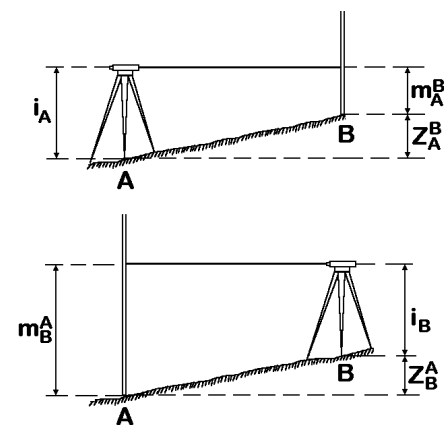


Fig. 13.8. Método de estaciones recíprocas

- Método de estaciones equidistantes:** Se estaciona en dos puntos intermedios  $E$  y  $E'$ , tales que  $AE \approx E'B$  (figura 13.9). Desde cada uno de los puntos se visa a  $A$  y a  $B$ . Podemos suponer que el error sistemático en la visual  $EA$  es igual al de la visual  $E'B$  y que el error de la visual  $E'A$  es igual al de la visual  $EB$ :

$$Z_A^B \text{ medido desde } E = m_E^A + e - (m_E^B + e')$$

$$Z_A^B \text{ medido desde } E' = m_{E'}^A + e' - (m_{E'}^B + e)$$

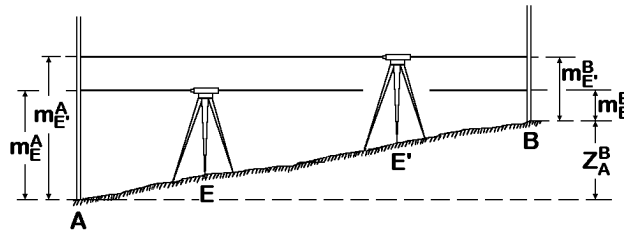


Fig. 13.9. Método de estaciones equidistantes

Sumando las expresiones y dividiendo por 2:

$$\bar{Z}_A^B = \frac{m_E^A - m_E^B}{2} + \frac{m_{E'}^A - m_{E'}^B}{2}$$

Se eliminan errores sistemáticos y no es preciso medir la altura del instrumento. El método permite comprobar las lecturas, pero obliga a estacionar dos veces.

- Método de estaciones exteriores:** Este método sustituye al anterior cuando no es posible estacionar en puntos intermedios entre  $A$  y  $B$ , por existir una zanja, un río, o algún otro accidente. Se estaciona en dos puntos exteriores  $E$  y  $E'$ , tales que  $EA \approx E'B$ . El desnivel se calcula como en el método anterior.

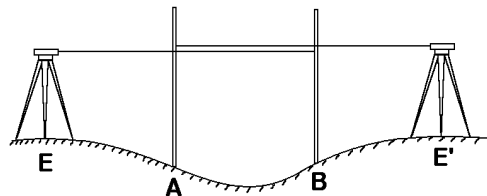


Fig. 13.10. Método de estaciones exteriores

### 13.3.2.- Nivelación geométrica compuesta

La nivelación compuesta se emplea para distancias grandes, cuando es preciso utilizar una serie de estaciones intermedias entre los puntos cuyo desnivel se desea calcular. Los instrumentos empleados son los mismos que en la nivelación simple. El procedimiento consiste en establecer itinerarios altimétricos, similares a los planimétricos.

Las nivelaciones, o líneas de nivelación, pueden alcanzar distancias muy

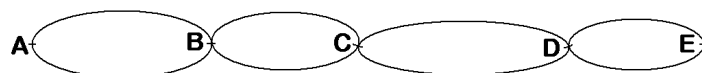


Fig. 13.11. Línea de doble nivelación con cuatro anillos

grandes. Si sólo es posible comprobar el error de cierre al terminarlas, podemos encontrarnos con que un error excesivo invalide todo el trabajo y nos obligue a repetirlo íntegro. Para evitarlo es habitual realizar lo que se llama *líneas de doble nivelación* (figura

13.11). Consisten en dividir el itinerario en varias partes y en cada una de ellas se realiza una nivelación de ida y vuelta, partiendo de un punto y volviendo al mismo. Esto permite comprobar independientemente cada parte del itinerario y detectar dónde se han producido los mayores errores. En el caso de la figura 13.11, el itinerario A-E se ha dividido en cuatro anillos, en cada uno de los cuales se mide un punto intermedio (B, C y D) que sirve de punto de partida para el anillo siguiente.

Los métodos empleados en nivelación compuesta son aplicaciones de los métodos de nivelación simple que hemos estudiado:

- **Método del punto medio:** El desnivel de cada uno de los tramos del itinerario altimétrico se determina aplicando el método del punto medio (figura 13.12). Como sabemos, este método no tiene comprobación, por lo que solamente debemos aplicarlo en itinerarios cerrados o encuadrados.

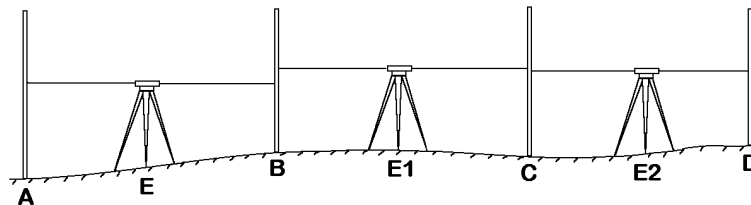


Fig. 13.12. Método del punto medio

- **Método de estaciones dobles:** se opera de forma similar al método anterior, pero cada vez que se realizan las lecturas desde una estación, se mueve el aparato un par de pasos, se vuelve a estacionar y se toman de nuevo las lecturas. De este modo es como si se hicieran simultáneamente el camino de ida y el de vuelta, por lo que el itinerario queda cerrado.
- **Método de estaciones equidistantes, o de Porro:** Equivale a una combinación de los métodos de estaciones equidistantes y de estaciones exteriores. Desde la estación 1 de la figura 13.13 se visa a A y a B, desde la 2 a A, B y C, desde la 3 a B, C y D, etc. Es un método poco empleado, ya que complica bastante la operación y presenta el inconveniente de tener que lanzar visuales más largas, lo que supone problemas en terrenos poco llanos.

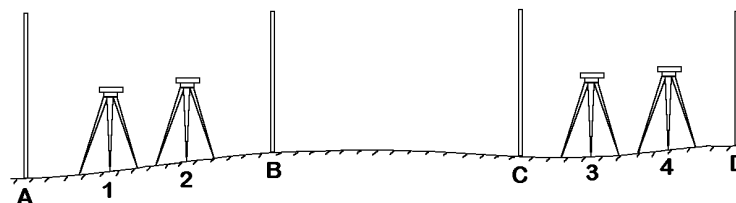


Fig. 13.13. Método de estaciones equidistantes

### 13.3.3.- Cálculo del error de cierre. Compensación

El desnivel total, en una nivelación compuesta, se calcula sumando todos los desniveles parciales y es igual a la suma de las lecturas de espalda menos la suma de las lecturas de frente. Si el itinerario es cerrado, el desnivel total debería ser nulo y el valor obtenido de la suma anterior será el error de cierre. Si el itinerario es encuadrado, obtendremos el error de cierre por diferencia entre el desnivel total calculado y el real, que es la diferencia entre las coordenadas Z conocidas de los dos puntos extremos.



El error de cierre debe calcularse en el campo, por si fuese excesivo, lo que nos obligaría a repetir una parte o la totalidad del trabajo. El error se puede compensar repartiéndolo proporcionalmente a los desniveles o a las distancias de nivelada. Puesto que se tiende a que estas sean muy parecidas, a menudo se compensa el error de cierre repartiéndolo a partes iguales entre los desniveles parciales calculados.

#### 13.3.4.- Tolerancia. Error kilométrico

La tolerancia en nivelaciones geométricas se suele definir en función del *error kilométrico*,  $K_m$ , expresado en *mm*:

$$t = K_m \sqrt{K}$$

$t$  es la tolerancia altimétrica expresada en *mm* y  $K$  la longitud total del itinerario altimétrico expresada en *km*. Dado el error kilométrico, el error de cierre  $e_c$  de un itinerario de nivelación geométrica debe ser tal que no supere la tolerancia:

$$e_c < t = K_m \sqrt{K}$$

Los errores accidentales dependerán del instrumento empleado y de las distancias de nivelada. Deben calcularse de antemano, para estudiar si un aparato determinado es apropiado para un trabajo concreto.

#### 13.3.5.- Errores accidentales. Limitación en la longitud de las visuales

En nivelación geométrica se cometen los dos tipos de errores accidentales, ya estudiados al hablar de los niveles: error de horizontalidad del eje de colimación  $e_h$  y error de puntería  $e_p$ . El error total vale:

$$E_n'' = \sqrt{e_h^2 + e_p^2}$$

expresado en segundos. Para transformar este error angular en un error lineal, haremos:

$$E_n = \frac{E_n'' D 1000}{r}$$

siendo  $r$  el número de segundos de un radián ( $r=206.295''=636.620^s$ ) y  $D$  la distancia de nivelada, expresada en metros;  $E_n$  viene en milímetros.

La distancia máxima de nivelada para que no se supere la tolerancia altimétrica la obtendremos igualando  $E_n$  y  $t$  en la última expresión de 13.3.4:

$$E_n = t = K_m \sqrt{K}$$

de donde:

$$\frac{E_n'' D 1000}{r} = K_m \sqrt{\frac{D}{1000}}$$

$K$ , que es la longitud expresada en *km*, será:  $K = D/1.000$ . De aquí se despeja  $D$ , que será la distancia máxima de nivelada, en metros, para que el error de cierre no supere la

tolerancia fijada.

### 13.4.- NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA O POR PENDIENTES

La nivelación trigonométrica, o por pendientes, es la que se realiza empleando la estación total o el taquímetro. En general, este instrumento es menos preciso, para trabajos alimétricos, que los niveles. Su ventaja estriba en que se trata de un instrumento planimétrico y alimétrico, que permite realizar simultáneamente estas dos partes de un levantamiento topográfico. La nivelación trigonométrica será de aplicación en aquellos levantamientos, o en aquellas fases de un levantamiento, en que las exigencias de precisión en altimetría no sean muy estrictas.

La diferencia entre la nivelación geométrica y la trigonométrica es que en esta última se emplean instrumentos cuyo anteojo es susceptible de bascular en torno a un eje horizontal, por lo que las visuales serán inclinadas, no horizontales. La expresión general para el cálculo del desnivel con visuales inclinadas se vio en 9.3.4:

$$Z_A^B = t + i - Ap$$

En nivelación trigonométrica son aplicables todas las consideraciones que vimos en 13.2 respecto a errores sistemáticos en nivelación.

La nivelación trigonométrica suele emplearse, como hemos visto, en paralelo a los trabajos planimétricos. En estos trabajos siempre interesa determinar las coordenadas del punto de estación, por lo que habrá que calcular también la coordenada  $Z$  de cada estación, lo que obliga a medir la altura del instrumento. En consecuencia, no suele aplicarse el método del punto medio ni los derivados de él, ya que estos métodos permiten determinar el desnivel entre dos puntos visados, pero no con relación al punto de estación.

#### 13.4.1.- Nivelación trigonométrica simple

La nivelación trigonométrica simple se emplea para la determinación de desniveles entre puntos próximos; por ello, puede aplicarse en combinación con el método planimétrico de radiación, permitiendo determinar los desniveles de los puntos radiados con relación al punto de estación. Los métodos empleados son similares a algunos de los que se emplean en nivelación geométrica:

- **Método del punto extremo:** Para determinar el desnivel  $Z_A^B$  entre dos puntos  $A$  y  $B$ , estacionamos en  $A$  y visamos a una mira situada en  $B$ . El desnivel se calcula por la expresión general:  $Z_A^B = t + i_A - m_A^B$ . Como en el caso de la nivelación geométrica, el desnivel será positivo si  $B$  tiene mayor altitud que  $A$  y negativo en caso contrario. Este método no elimina los errores de esfericidad y refracción, por lo que solo debe emplearse en distancias pequeñas. Además, no permite comprobación.
- **Método de estaciones recíprocas:** Se estaciona primero en  $A$  y luego en  $B$ , obteniendo:

$$Z_A^B = t_A + i_A - m_A^B$$

$$Z_B^A = t_B + i_B - m_B^A$$

El desnivel medio se calcula:

$$\bar{Z}_A^B = \frac{t_A - t_B}{2} + \frac{i_A - i_B}{2} - \frac{m_A^B - m_B^A}{2}$$

La diferencia entre los dos valores del desnivel nos dará una idea de la precisión alcanzada con este método.

#### 13.4.2.- Nivelación trigonométrica compuesta

La nivelación trigonométrica compuesta se efectuará, normalmente, a la vez que un itinerario planimétrico. El itinerario altimétrico será, por tanto, encuadrado o cerrado, lo que posibilita la determinación del error de cierre altimétrico y su compensación. En nivelación trigonométrica compuesta se emplea, de forma casi exclusiva el siguiente método:

- **Método de estaciones recíprocas:** Se va estacionando sucesivamente en todas las estaciones del itinerario, visando a la anterior y a la siguiente. En cada estación habrá, por tanto, dos observaciones, una de frente y otra de espaldas.

#### 13.4.3.- Cálculo del error de cierre. Compensación

El error de cierre en un itinerario altimétrico se calcula como en los itinerarios planimétricos. La compensación suele hacerse repartiéndolo proporcionalmente a los desniveles parciales de cada tramo del itinerario.

La tolerancia altimétrica en nivelación trigonométrica suele darse como una fracción (1/3 a 1/5) de la equidistancia.

#### 13.4.4.- Errores accidentales. Limitación en la longitud de las visuales

Como hemos estudiado para la nivelación geométrica, la longitud máxima de las visuales se calculará a partir de la tolerancia altimétrica. En este caso, el error total accidental a considerar  $E_v$  será el debido a las tres causas de errores accidentales que se estudiaron en el capítulo dedicado a la estación total: error por visuales inclinadas y en la medida de la distancia  $e_t$ , error en la medida de la altura del aparato  $e_i$  y error de verticalidad del prisma  $e_m$ .

$$E_v = \sqrt{e_t^2 + e_i^2 + e_m^2}$$

Los tres errores, y por tanto el error total, están expresados en metros. Sólo el primero de ellos depende de la distancia. Para calcular la longitud máxima de las visuales, igualamos el error total a la tolerancia altimétrica y, por tanteos, calculamos la distancia  $D$  máxima para que el error altimétrico no sea excesivo.

### 13.5.- LEVANTAMIENTOS ALTIMÉTRICOS

La realización de un levantamiento altimétrico consiste en la aplicación de los métodos de nivelación en un orden determinado, tendente a la obtención de la representación altimétrica de la zona de interés con unos errores que no excedan la tolerancia fijada. Esta representación se obtiene a partir de una serie de puntos para los que se determina su altitud, constituyendo las *redes altimétricas*.

#### 13.5.1.- Punto altimétrico fundamental

Como punto de partida de un levantamiento altimétrico se emplea un punto cualquiera al que se le asigna una cota o del que se determina su altitud. Si el levantamiento no se va a relacionar con ningún otro, a ese punto de partida se le puede asignar una cota arbitraria. Sin embargo, lo normal es que nos interese ligarlo a otros trabajos, por lo que debemos determinar la altitud de ese punto de partida o *punto altimétrico fundamental*.

El primer paso es la elección del punto idóneo, que suele coincidir con un vértice del levantamiento, habitualmente uno de los extremos de la base, del cual calculamos con precisión sus coordenadas planimétricas.

Cuando la precisión altimétrica requerida es pequeña podemos calcular la altitud de este punto desde los mismos vértices geodésicos utilizados para determinar sus coordenadas planimétricas, sabiendo que estos pueden contener, en altimetría, errores considerables. Para determinar la altitud del punto, se calcula esta desde varios vértices geodésicos, para utilizar posteriormente la media aritmética de los valores obtenidos. Debemos recordar introducir en cada una de las visuales las correcciones por esfericidad y de refracción.

Si el levantamiento requiere mayor precisión debemos partir de algún punto de las redes altimétricas que se describen en 13.6. La operación consiste en arrastrar la altitud de un punto que forme parte de estas redes hasta nuestro punto altimétrico fundamental, lo que se hace con una doble nivelación por alturas. Es una operación rápida, si el terreno es suficientemente llano, puesto que no nos interesan las coordenadas de los puntos intermedios, sino solamente el desnivel entre el punto inicial y el final.

#### 13.5.2.- Redes altimétricas

Estas redes se apoyarán siempre en el punto altimétrico fundamental y, al igual que en las redes planimétricas, debemos utilizar una o varias de ellas en un determinado orden, a efectos de no superar la tolerancia fijada. Las redes altimétricas son de tres tipos:

- **Una sola red por alturas.** Se aplicará cuando el plano exigido precise equidistancias de curvas de nivel muy pequeñas, del orden de *25cm* o menores. Esta red se utilizará en levantamientos topográficos en los que la precisión altimétrica sea mucho mayor que la planimétrica o en levantamientos puramente altimétricos. Lo más habitual en este caso es la aplicación de esta red a zonas restringidas, por ejemplo en el levantamiento de un canal,

en el que la precisión altimétrica es más importante que la planimétrica.

- **Una red por alturas y otra por pendientes.** Este es el caso más general y corresponde a equidistancias de curvas de nivel iguales o menores a  $5m$  o al levantamiento de grandes extensiones de terreno. Levantaremos en primer lugar una red por alturas, que incluirá los puntos más significativos: vértices de la red trigonométrica y puntos de unión de varias poligonales de la red topográfica. Para asignar una altitud a cada uno de estos puntos se realizan, desde el punto altimétrico fundamental, itinerarios altimétricos dobles, que no tienen por qué coincidir con el trazado de los itinerarios de la red topográfica, sino que seguirán el camino más corto y cómodo. El resto de los puntos del levantamiento se levantan por pendientes, es decir con estación total, calculando desniveles al tiempo que se determina la planimetría.
- **Una sola red por pendientes.** Se aplicará en el caso de que la equidistancia de curvas de nivel sea mayor de  $5m$  o el levantamiento se realice sobre una superficie pequeña. En este caso, a partir del punto altimétrico fundamental se levantarán por pendientes todos los puntos del levantamiento a la vez que se levanta su planimetría.

### 13.5.3.- Cálculo y compensación de redes altimétricas

Las nivelaciones se cierran y compensan buscando los cierres mínimos por tanteos. Por tanto, esta operación se realiza de forma totalmente independiente de la planimetría.

Ya se ha indicado que el error máximo admisible se dará como una fracción de la equidistancia utilizada, esta fracción será del orden de la  $3^{\text{a}}$  a la  $5^{\text{a}}$  parte. Esta tolerancia se refiere al error máximo admisible acumulado en las distintas redes altimétricas del levantamiento. Con independencia de ello, la precisión de la red por alturas puede controlarse en función del error kilométrico, como se vio en 13.3.4.

### 13.6.- NIVELACIONES DE REFERENCIA

Como se ha indicado, en la mayoría de los casos interesará relacionar un levantamiento altimétrico con otros anteriores, por lo que necesitamos unas referencias comunes. Para ello, existe en España una serie de puntos de altitud conocida y que sirven de referencia a todo levantamiento. Para determinar estos puntos hay que aplicar métodos y procedimientos propios de la Geodesia.

Una forma de calcular la altitud del punto altimétrico fundamental es obtenerla a partir de los vértices geodésicos, pero al contrario de lo que ocurre en planimetría, cuyas coordenadas se determinan con gran precisión, estos vértices pueden tener errores altimétricos importantes. Por tanto, sólo podremos utilizarlos para levantamientos altimétricos de poca precisión, corrigiendo en todo caso los errores debidos a la curvatura terrestre y a la refracción atmosférica que necesariamente se producirán para visuales de cierta longitud.

En España existe una *Nivelación de Precisión*, levantada por doble nivelación y generalmente con operarios distintos para los itinerarios altimétricos de ida y de vuelta,

con el fin de evitar y corregir vicios de trabajo. Se fijaron  $70m$  como longitud máxima de las visuales. Una de las utilidades básicas fue la de servir de apoyo altimétrico para la realización del Mapa Topográfico Nacional a escala  $1:50.000$ . Las tolerancias de cierre son de  $5mm\sqrt{K}$ , donde  $5mm$  es el error kilométrico. Las señales utilizadas son de dos tipos: las primarias se establecieron para que existiera una, al menos, cada  $25Km$ , las secundarias se situaron en puntos de especial interés o próximas a señales primarias cuya permanencia se consideró dudosa.

Posteriormente, en la Conferencia Internacional de Geodesia celebrada en Hamburgo, en 1912, se dispuso que la tolerancia en la red altimétrica más precisa debe ser menor de  $1mm\sqrt{K}$  y hay que tener en cuenta las correcciones ortométrica y dinámica. En 1928 se proyecta la nueva red de *Nivelación de Alta Precisión* NAP. Con las observaciones de la red se realizó, en 1998, una compensación que comprende toda la red de nivelación peninsular. La nueva *Red de Nivelación de Alta Precisión* (REDNAP) fue comenzada en 1999 y finalizada en 2007 en la Península y un año después en Baleares. Todas las líneas discurren a lo largo de carreteras, autopistas y autovías, con señales espaciadas aproximadamente  $1$  kilómetro.

También existen redes de *Nivelación Topográfica*, con un punto al menos en cada término municipal, generalmente ubicado en la Iglesia Parroquial o en el Ayuntamiento. Realizadas por doble nivelación, con tolerancias de  $30mm\sqrt{K}$  en cierres de anillos y de  $40mm\sqrt{K}$  en el total de cada línea.

Por último, dentro de cada término municipal existen líneas de nivelación sencilla, con tolerancias de  $70mm\sqrt{K}$ .

### 13.7.- REPRESENTACIÓN ALTIMÉTRICA DEL TERRENO

La representación de la altimetría se puede conseguir, generalmente, utilizando alguno de los métodos que se exponen a continuación:

- **Por planos acotados.** Se dispone sobre el plano una serie de puntos, formando una red más o menos regular, indicando en cada uno de ellos su altitud o cota. Suelen representarse por un triángulo invertido, de manera que el vértice inferior de éste indique el punto al que se refiere el valor altimétrico. Este método es el más sencillo de realizar pero el que resulta menos representativo.
- **Por curvas de nivel.** Una curva de nivel es la intersección de una superficie de nivel determinada con la superficie del terreno, es decir, el lugar geométrico de los puntos de la superficie del terreno que tienen la misma altitud (figura 13.14).

Se llama *equidistancia* al desnivel entre dos curvas de nivel consecutivas. La densidad de curvas de nivel en un plano depende de su finalidad, del relieve de la zona, etc. Está relacionada con la precisión de los métodos altimétricos empleados, puesto que si la equidistancia entre curvas de nivel es pequeña debemos utilizar métodos altimétricos más precisos que los necesarios para equidistancias mayores.

Las curvas de nivel deben cumplir las siguientes condiciones:

- Deben ser cerradas.
- No pueden cortarse ni bifurcarse, salvo en casos teóricos excepcionales (cuevas, explanaciones especiales, etc.).
- Varias curvas pueden ser tangentes, para representar, por ejemplo, formaciones rocosas verticales.
- El número de curvas de nivel interrumpidas en el borde del plano debe ser siempre par.
- Entre dos curvas de nivel de igual cota no puede haber un número impar de curvas de nivel de cota distinta.

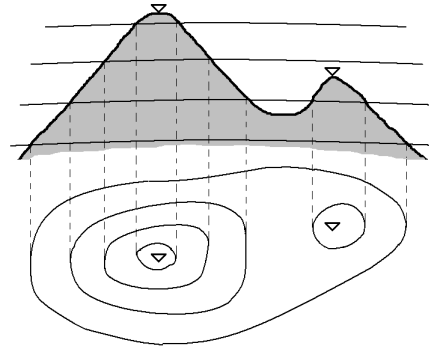


Fig. 13.14. Curvas de nivel

En muchas ocasiones se combinan los dos métodos, de forma que en un plano con curvas de nivel se incluyen también puntos por planos acotados. Esto permite completar la información altimétrica en casos como:

- Zonas muy llanas, en las que las curvas de nivel aparecen muy alejadas entre sí.
- Puntos significativos por los que no pasa ninguna de las curvas de nivel, por ejemplo el punto más elevado de un monte.





## 14. PLANIFICACIÓN DE UN LEVANTAMIENTO TOPOGRÁFICO

### 14.1.- INTRODUCCIÓN

Antes de realizar cualquier levantamiento topográfico es fundamental planificar con todo detalle las distintas fases del mismo. Debemos tener en cuenta la exigencia básica de todo trabajo topográfico: los errores finales no deben exceder a la tolerancia.

Como sabemos, si no se establece otra cosa, la tolerancia en planimetría vendrá definida, en función de la escala  $1/E$ , por el límite de la apreciación visual. Si se establece éste en  $0,2mm$ , la tolerancia en planimetría será:

$$t = 0,2mm E$$

Para la altimetría es habitual tomar como tolerancia una fracción ( $1/3$  a  $1/5$ ) de la equidistancia. Se tiene así en cuenta el hecho de que equidistancias menores requieren mayores precisiones en el levantamiento altimétrico. Para nivelaciones geométricas se emplea el error kilométrico  $k_m$ , que depende del tipo de nivelación que se realice. Si llamamos  $K$  a la longitud total de un itinerario de este tipo, expresada en kilómetros, será:

$$t = k_m \sqrt{K}$$

Establecido un plan de trabajo y antes de comenzar el levantamiento, realizaremos un estudio de errores *a priori*. Para ello, estudiaremos los errores accidentales propios de cada uno de los instrumentos que tengamos previsto utilizar y la acumulación de errores propia de los distintos métodos que se vayan a aplicar. Si los errores totales calculados *a priori* exceden a la tolerancia, será preciso revisar todo el plan de trabajo, considerando otros instrumentos o métodos más precisos o aplicando procedimientos que reduzcan los errores.

En este capítulo se resumen las distintas causas de errores accidentales que afectan a cada instrumento y la forma en que estos errores se acumulan en cada método topográfico. Se recuerdan también algunos procedimientos para aumentar la precisión y se hacen algunas consideraciones sobre la acumulación final de errores. Se explican, además, las distintas redes que configuran un levantamiento topográfico clásico y los criterios para establecerlas. No se incluyen aquí los levantamientos por fotogrametría o por GPS, que son las técnicas más empleadas en la actualidad, que se desarrollarán en próximos capítulos.

### 14.2.- ERRORES ACCIDENTALES EN LA MEDIDA DE ÁNGULOS

Estos errores afectan a todos los goniómetros: teodolitos, estaciones totales, taquímetros y brújulas. Vendrán expresados en segundos, que serán sexagesimales o centesimales en función del tipo de unidades que se utilice para expresar las características del instrumento (sensibilidad, apreciación, etc.). Se estudiaron en 7.2.2.

**14.2.1.- Ángulos acimutales**

- Error de verticalidad del eje principal (véase 7.2.2.1):

$$e_{va} = \frac{1}{12} S$$

S = sensibilidad del nivel expresada en segundos.

En caso de instrumentos que montan nivel electrónico:

$$e_{va} = \frac{1}{4} P_e$$

$P_e$  = precisión del estabilizador del compensador, en segundos.

- Error de dirección (véase 7.2.2.2):

$$e_{da} = \frac{e_e + e_p}{D} r$$

Con plomada mecánica se toma  $e_e + e_p = 0'05m$ .

Con plomada óptica  $e_e + e_p = 0'025m$ .

D = longitud de la visual en metros.

r = número de segundos de un radián.

Con estación total dotada de plomada óptica o láser y jalón porta prisma con nivel esférico, el valor máximo del error es:  $e_e + e_p = 1,25cm = 0,0125m$

- Error de puntería (véase 7.2.2.3):

Con estación total, si la distancia es corta y se observa con claridad el prisma, la expresión del error acimutal será:

$$e_{pc} = \frac{20''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \frac{60^s}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right)$$

Si la distancia es grande y no se puede observar con claridad el prisma, se utilizará:

$$e_{pc} = \frac{50''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \frac{150^s}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right)$$

Si para la medida del ángulo acimutal no se utiliza el prisma, sino que se visa el jalón, la expresión que calcula en error máximo será:

$$e_{pa} = \frac{10''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \frac{30^s}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right)$$

A = número de aumentos del anteojos.

- Error de lectura (véase 7.2.2.4):

$$e_{la} = \frac{2}{3} a$$

a = apreciación del limbo acimutal en segundos.

Cuando se utiliza una estación total, el error de lectura dependerá del dispositivo electrónico que permite leer ángulos sobre los limbos y cuya precisión viene indicada por el fabricante como la desviación típica para ángulos horizontales y verticales (según ISO 17123-3).

**14.2.2.- Ángulos cenitales**

- Error de verticalidad del eje principal (véase 7.2.2.1):

$$e_{vc} = \frac{1}{3} S$$

S = sensibilidad del nivel en segundos.

Cuando el instrumento topográfico dispone de nivel electrónico se utiliza como error el valor de la precisión del estabilizador del compensador  $P_e$ .

- Error de puntería (véase 7.2.2.3):

$$e_{pc} = \frac{50''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \frac{150''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) \quad \text{para distancias grandes}$$

$$e_{pc} = \frac{20''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \frac{60''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) \quad \text{para distancias cortas}$$

A = número de aumentos del anteojo.

- Error de lectura (véase 7.2.2.4):

$$e_{lc} = \frac{2}{3} a_1$$

$a_1$  = apreciación del eclímetro en segundos.

Cuando se utiliza una estación total, el error de lectura dependerá del dispositivo electrónico que permite leer ángulos sobre los limbos y cuya precisión viene indicada por el fabricante como la desviación típica para ángulos horizontales y verticales (según ISO 17123-3).

**14.2.3.- Error angular total**

$$\text{acimutal } E_a = \sqrt{e_{va}^2 + e_{da}^2 + e_{pa}^2 + e_{la}^2}$$

$$\text{cenital } E_c = \sqrt{e_{vc}^2 + e_{pc}^2 + e_{lc}^2}$$

Aplicando la regla de Bessel, los errores de puntería y lectura se dividen por  $\sqrt{2}$ . Aplicando el método de repetición, los errores acimutales se reducen de la siguiente forma:

$$E_a = \sqrt{\frac{2 e_{la}^2}{n^2} + \frac{2 e_{pa}^2}{n} + e_{va}^2 + e_{da}^2}$$

Y aplicando el de reiteración:

$$E_a = \sqrt{\frac{2 e_{la}^2}{n} + \frac{2 e_{pa}^2}{n} + e_{va}^2 + e_{da}^2}$$

NOTA: Para pasarlos a radianes, los errores angulares totales en segundos se dividen por el número de segundos de un radián ( $r=636.620''=206.265''$ ). El error angular expresado en radianes, multiplicado por la distancia, nos dará el error expresado en metros.

### 14.3.- ERRORES ACCIDENTALES EN LA MEDIDA DE DISTANCIAS PLANIMÉTRICAS

Sólo incluiremos aquí los errores accidentales que se cometen en la medida de distancias por métodos electrónicos, que se estudiaron en 7.5.3.

- Error en la medida de la distancia mediante distanciómetro ( $e_d$ ). Viene indicado para cada equipo por parte del fabricante bajo la expresión:  $Amm+Bppm$ .

- Error de dirección ( $e_e$  y  $e_p$ ).  
 $e_e$  con plomada mecánica:  $0,0275m$ .  
 $e_e$  con plomada óptica o láser:  $0,0025m$ .  
 $e_p$  con jalón:  $0,01m$ .  
 $e_p$  con trípode dotado de plomada óptica o láser:  $0,0025m$ .

- Error de inclinación del jalón ( $e_i$ ).

$$e_i = \frac{Ap \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (100 + \alpha)} = \frac{Ap \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$\alpha$  = altura de horizonte de la visual

$\beta$  = inclinación del jalón

$Ap$  = altura del prisma

En el caso de utilizar prisma sobre trípode este error no se contempla.

- Error total en la medida de distancia con distanciómetro.

$$E_D = \sqrt{e_d^2 + e_e^2 + e_p^2 + e_i^2}$$

Si la distancia se mide dos veces, los errores  $e_d$  y  $e_i$  se dividirán por  $\sqrt{2}$ .

### 14.4.- ERRORES ACCIDENTALES EN LA MEDIDA DE DESNIVELES

#### 14.4.1.- Con taquímetro o estación total

- Error por visuales inclinadas y en la medida de la distancia:

$$e_t = D \left[ \left(1 + \frac{E_d}{D}\right) \operatorname{tg} (\alpha + E_c) - \operatorname{tg} \alpha \right]$$

$D$  = distancia reducida.

$\alpha$  = máxima altura de horizonte prevista.

$E_d$  = error total en la medida de distancia (véase 14.3).

$E_c$  = error angular cenital total (véase 14.2.3).

- Error en la medida de la altura de aparato: Se considera  $e_i = 0'01m$ .

- Error de verticalidad de la señal de puntería:

$$e_m = m \operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} (\alpha + \beta)$$

$m$  = máxima altura de prisma (o lectura de mira) prevista, en metros.

$\beta$  = máxima inclinación prevista del jalón portaprismas (o de la mira).

$\alpha$  = máxima altura de horizonte prevista.

- Error total en altimetría con taquímetro o estación total:

$$E_v = \sqrt{e_t^2 + e_i^2 + e_m^2}$$

Todos los errores están expresados en metros y, por tanto, también lo estará el error total. Aplicando métodos en que los desniveles se midan dos veces, dividimos los correspondientes errores totales por  $\sqrt{2}$ .

#### 14.4.2.- Con nivel

- Error de horizontalidad del eje de colimación (véase 8.3):

$$e_h = \frac{1}{3} S$$

S = sensibilidad del nivel de burbuja.

Con niveles automáticos la nivelación definitiva se realiza automáticamente, llegando a precisiones del compensador inferiores a 1" (0,3 – 0,5").

- Error de puntería (véase 8.3):

$$e_p = \frac{50''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right) = \frac{150''}{A} \left(1 + \frac{4A}{100}\right)$$

A = número de aumentos del anteojo.

- Error total en altimetría con nivel:

$$E_n = \sqrt{e_h^2 + e_p^2}$$

Los errores van expresados en segundos. Para pasarlos a metros se dividen por el número de segundos de un radián y se multiplican por la longitud de la visual. Aplicando métodos en que los desniveles se midan dos veces, dividimos los correspondientes errores totales por  $\sqrt{2}$ .

#### 14.5.- REDES DE UN LEVANTAMIENTO TOPOGRÁFICO

Los métodos topográficos clásicos que hemos estudiado se combinan entre sí a la hora de efectuar los trabajos necesarios para realizar el levantamiento topográfico completo de una zona. Los levantamientos topográficos pueden ser altimétricos o planimétricos, según se ocupen solamente de la altimetría o de la planimetría. Los levantamientos altimétricos puros son poco habituales y lo normal es que un levantamiento topográfico incluya la planimetría y la altimetría.

Lo esencial en todo levantamiento es que los errores totales no superen, en ningún punto del mismo, a la tolerancia fijada. Para mantener los errores en límites aceptables, es preciso establecer un escalonamiento de puntos, de manera que los más exactos sirvan de apoyo a los demás.

En las distintas fases de un levantamiento planimétrico clásico se emplean los tres métodos planimétricos que conocemos: radiación, itinerario e intersección. En levantamientos altimétricos se combinarán los métodos altimétricos que también hemos estudiado: nivelación trigonométrica y nivelación geométrica. En el caso de

levantamientos muy sencillos y de poca envergadura, es posible que algunos de estos métodos no se utilicen, pero lo habitual es que intervengan todos.

Normalmente partiremos de los vértices geodésicos próximos a la zona a levantar, que nos proporcionarán un apoyo suficientemente preciso. Si no se dispone de vértices geodésicos en número suficiente, o las circunstancias lo aconsejan, se puede partir de datos obtenidos de observaciones astronómicas. En la actualidad, los sistemas GPS pueden emplearse para levantar esta red o para ayudar a completarla.

Las distancias entre vértices geodésicos, incluso de 3<sup>er</sup> orden, son grandes, por lo que será preciso establecer una red más densa. Esta primera red planimétrica se denomina *red trigonométrica* o *triangulación topográfica* y en ella se emplea el método de intersección.

En la red trigonométrica se apoyará la segunda red de vértices, denominada *red topográfica* o *intermedia*. Los puntos se levantarán, principalmente, por el método itinerario.

Para levantar los puntos finales se establece una tercera red planimétrica, apoyada en la segunda, y que se denomina *red de detalle* o *de relleno*. En ella se emplea, sobre todo, el método de radiación.

Del mismo modo, en el caso más general, estableceremos dos redes altimétricas: una por alturas y otra por pendientes.

#### 14.5.1.- Redes altimétricas

Se estudiaron en 13.5. Estas redes se apoyan en un punto altimétrico fundamental, cuya altitud se determina, en función de las necesidades de precisión del levantamiento desde uno de los puntos de las nivelaciones de referencia disponibles. A partir del punto elegido, la altitud del punto altimétrico fundamental puede medirse mediante un itinerario de nivelación geométrica.

Si no fuese preciso relacionar la altimetría del levantamiento con las de otros levantamientos, puede tomarse una cota arbitraria para el punto altimétrico fundamental.

#### 14.5.2.- Red trigonométrica

Para levantar esta red estableceremos una triangulación topográfica, operando de forma similar a la que se emplea en las triangulaciones geodésicas. El método a utilizar es, por tanto, la intersección directa mediante observaciones de ángulos o de distancias. Los vértices de esta red se denominan *vértices trigonométricos*.

En primer lugar elegiremos la *base* de la triangulación. La base es un lado en el que mediremos con gran precisión su longitud y su

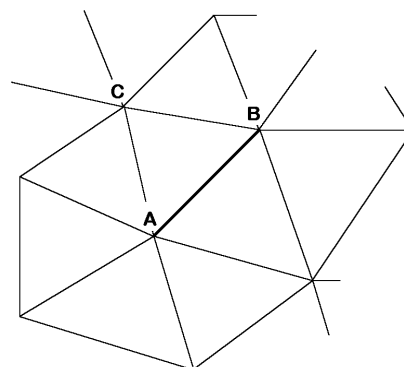


Fig. 14.1. Red trigonométrica

acimut. En él se apoyarán los distintos triángulos que van a constituir la red.

Estacionando en los dos vértices  $A$  y  $B$  que constituyen los extremos de la base (figura 14.1), determinaremos por intersección directa un tercer vértice  $C$ . Normalmente estacionaremos también en  $C$  y visaremos a los dos extremos de la base  $A$  y  $B$ , lo que nos permitirá calcular el error de cierre del triángulo y compensarlo. Con los datos obtenidos resolvemos este primer triángulo  $ABC$  y, conocidas las coordenadas de los vértices  $A$  y  $B$ , calcularemos las de  $C$ . En este momento conocemos tres lados, la base  $AB$  y los lados  $AC$  y  $BC$ . Sobre cada uno de ellos establecemos un nuevo triángulo y continuamos el procedimiento hasta completar la red. Para comprobar las mediciones, enlazaremos los vértices formando polígonos.

Las distancias entre los vértices trigonométricos oscilan entre varios cientos de metros y unos pocos kilómetros, según las condiciones del levantamiento a realizar y las características de las restantes redes del mismo. La base se elegirá de forma que su longitud sea del mismo orden que las de los lados de los triángulos. Si la zona objeto del levantamiento es muy amplia, a veces es aconsejable establecer dos redes trigonométricas, con objeto de evitar una acumulación excesiva de errores en los últimos triángulos: la red principal, con lados grandes y que cubre toda la zona con un reducido número de triángulos; la red secundaria, con lados de longitudes apropiadas al levantamiento y que se apoya en la red principal.

Se dice que una red es *precisa* cuando sus cierres son inferiores a la tolerancia. Se dice que es *homogénea* o *compensada* cuando es rigurosamente geométrica, es decir, cuando los errores se han compensado de forma que se cumplan exactamente las condiciones geométricas de las figuras formadas: suma de los tres ángulos de un triángulo =  $200^g$ , suma de ángulos en un vértice =  $400^g$ , etc.

La red trigonométrica se puede establecer de dos formas (figura 14.2). Lo más habitual es establecer una red continua, con triángulos en todas las direcciones; en el caso del levantamiento de una zona alargada, puede establecerse una red en cadena, que precisará de una segunda base para su comprobación y compensación.

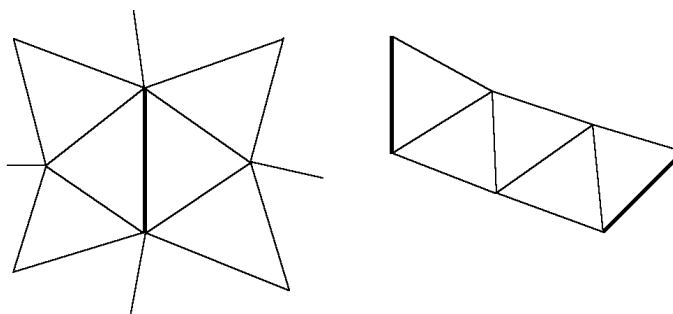


Fig. 14.2. Red continua y red en cadena

La determinación de la base es de enorme importancia para el levantamiento, ya que los restantes trabajos se apoyan en ella. Debe medirse y orientarse con la máxima precisión. La base se situará en la parte central del terreno a levantar, para que el reparto de errores sea uniforme en todas las zonas del mismo. Como hemos indicado, la longitud de la base será del mismo orden de magnitud que los restantes lados de los triángulos. Suele medirse con métodos electrónicos de medida de distancias.

Una vez determinada la longitud de la base, habrá que efectuar las siguientes correcciones:

- **Reducción al horizonte:** Lo que nos interesa es la distancia reducida entre los vértices que constituyen la base, no la distancia natural.
- **Reducción al nivel del mar:** En zonas de gran altitud, la diferencia entre la base y su reducida al nivel del mar debe ser tomada en cuenta (véase 12.2.1).
- **Anamorfosis lineal:** Si vamos a emplear alguna de las proyecciones cartográficas, debemos tener en cuenta la deformación lineal, o anamorfosis lineal, propia de la misma y aplicarla a la longitud de la base de la triangulación.

Además de determinar su longitud, debemos orientar la base, es decir, determinar su acimut. Una de las formas de hacerlo es orientarla con relación a un lado geodésico visible desde la zona del levantamiento. En otras ocasiones será necesario orientar la base mediante observaciones astronómicas, tal como se hace en Geodesia. En cualquier caso, si la envergadura del levantamiento así lo exige, será preciso tener en cuenta la convergencia de meridianos.

#### **14.5.2.1.- Proyecto de la triangulación**

En primer lugar debemos tener en cuenta las características de la zona a levantar y el objetivo del levantamiento. Esto nos permitirá determinar la tolerancia, los instrumentos y métodos que es preciso emplear y las dimensiones más adecuadas de la red de triángulos.

A continuación procederemos a recopilar toda la información disponible sobre: vértices geodésicos próximos, cartografía a distintas escalas existente, fotografías aéreas de la zona, etc. Esta información nos va a servir de ayuda para establecer un plan o proyecto de la triangulación. En este proyecto elegiremos la ubicación más adecuada para la base y las zonas en que van a situarse los distintos vértices, procurando que sean visibles entre sí, lo que nos obligará a buscar los puntos de mayor altitud. El estudio de errores a priori nos permitirá comprobar si el proyecto es apropiado o es necesario revisarlo.

Posteriormente recorreremos el terreno, anotando todos los detalles de interés y comprobando que todos los puntos importantes de la triangulación han sido bien elegidos. En esta etapa completaremos la selección de zonas de ubicación para los vértices y comprobaremos que la situación elegida para la base es idónea. Todos los vértices quedarán marcados con señales apropiadas. Los vértices permanentes se marcan con hitos de hormigón, taladrados para poder instalar las señales de puntería (banderolas).

Toda la información recogida y generada debe quedar perfectamente ordenada y archivada antes de comenzar los trabajos de campo.

#### **14.5.2.2.- Trabajos de campo**

Los trabajos de campo consisten, fundamentalmente, en la medida de los ángulos interiores de los triángulos formados o de los lados de los mismos. Una vez estacionados en un vértice es aconsejable no limitarse a visar los vértices adyacentes, sino todos aquellos que sean visibles. Dispondremos así de información suficiente para realizar los cálculos de la triangulación por diferentes caminos, reduciendo los errores.



Se debe estacionar primero en los vértices menos visibles, ya que al visarlos luego desde otros vértices dispondremos de una primera lectura con el instrumento que nos permitirá localizarlos fácilmente.

Para densificar la red trigonométrica, se determinará también una serie de *puntos trigonométricos complementarios*. Se trata de puntos que no forman parte de los triángulos, pero que se consideran apropiados para servir como vértices. Los métodos habituales para levantarlos son la intersección directa desde los vértices de la triangulación y la intersección inversa. En ambos casos, para que las mediciones tengan comprobación y los errores puedan compensarse, se aplica la intersección múltiple.

Hay que confeccionar, al terminar cada jornada, un croquis indicando todas las direcciones visadas y los ángulos medidos, así como anotar todos los detalles que puedan ser de utilidad en el futuro.

#### 14.5.2.3.- Cálculo de la triangulación

En cada uno de los triángulos se determinará el error de cierre, que será la diferencia a  $200^g$  de la suma de los tres ángulos. El error de cierre debe calcularse en el campo, para comprobar si es aceptable y repetir las correspondientes mediciones en caso contrario.

El cálculo de la triangulación supone, en primer lugar, determinar y compensar los errores de cierre. Para ello pueden aplicarse distintos procedimientos, basados en imponer el cumplimiento de las condiciones geométricas propias de las figuras formadas, triángulos y polígonos. En la bibliografía puede encontrarse más información sobre estos procedimientos.

En el caso más general puede utilizarse un procedimiento muy sencillo. En el ejemplo de la figura 14.3, resolveremos los triángulos  $ABC$ ,  $BCD$  y  $BDE$ , determinando el punto  $E$ . A continuación resolvemos los triángulos  $ABF$ ,  $BFG$  y  $BGE$ , volviendo a calcular el punto  $E$ , lo que nos sirve de comprobación. Continuaremos del mismo modo para los restantes triángulos. Las coordenadas definitivas se obtendrán por promedio.

Con este sistema no se aplica ninguna compensación, aparte de la de cierre de cada triángulo que viene obligada por los cálculos, y los acimutes, longitudes y coordenadas se determinan por promedio. Es un sistema rápido y, en general, suficiente para triangulaciones topográficas.

Disponiendo de un ordenador y del software apropiado, es posible aplicar el método de los mínimos cuadrados para compensar la red. El ajuste de observaciones por este método se trata en el capítulo 15.

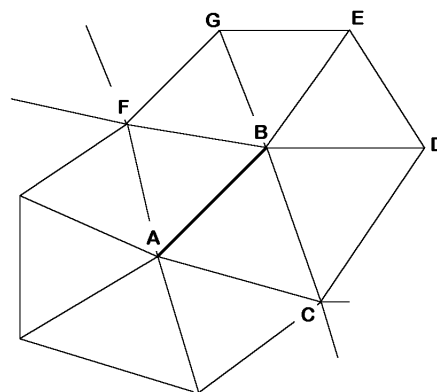


Fig. 14.3. Cálculo por triángulos sucesivos

### 14.5.3.- Red topográfica

Las distancias entre vértices trigonométricos son excesivas para el levantamiento topográfico de los distintos detalles que configuran la superficie del terreno. Por ello se hace necesario establecer una segunda red, entre la triangulación y el levantamiento de detalles, que se denomina *red topográfica o intermedia*.

La red topográfica se apoya en la trigonometría y las exigencias de precisión no serán tan grandes como en ésta. En efecto, al estar los trabajos apoyados en otros, que se realizaron con gran precisión, el número de operaciones encadenadas será menor y, por tanto, también lo será la acumulación de errores. La red topográfica servirá a su vez de apoyo a la red de relleno.

Los puntos de la red topográfica se denominan *puntos topográficos*. Los instrumentos más adecuados para el levantamiento de la red topográfica son los taquímetros y las estaciones totales. En caso necesario, levantamientos de precisión, puede utilizarse el equipo de poligonación que, como sabemos, permite reducir los errores acimutales.

Aunque, en ocasiones, la red topográfica puede levantarse por el método de intersección, el de poligonación es, con diferencia, el método más usado. Consiste en establecer una serie de itinerarios encuadrados, cubriendo la zona a levantar. Llamaremos *itinerarios primarios* a los establecidos entre vértices trigonométricos y/o puntos trigonométricos complementarios, e *itinerarios secundarios* a los establecidos entre puntos topográficos, previamente levantados, pertenecientes a itinerarios primarios o a otros itinerarios secundarios. El objetivo es crear una malla, suficientemente densa, que cubra toda la zona objeto del levantamiento.

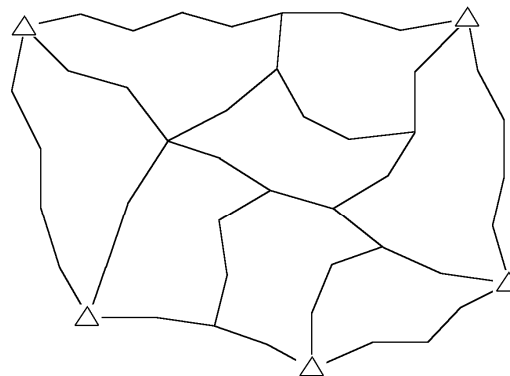


Fig. 14.4. Red topográfica

Los puntos de la red topográfica o intermedia, levantados por el método itinerario, se denominan también *puntos poligonométricos*.

#### 14.5.3.1.- Modo operativo

Como sabemos, el error angular más importante con el método de poligonación es el error de dirección. Para reducirlo interesa aumentar la separación entre estaciones consecutivas de la poligonal. Por otro lado, si se trabaja con estación total, las limitaciones en cuanto a la separación entre estaciones consecutivas serán las propias del instrumento empleado. Se debe tener en cuenta que, desde cada estación, habrá que levantar por radiación la zona que la rodea. La distancia máxima de radiación vendrá determinada por el error máximo admisible o por el alcance del sistema de medida de distancias y será el menor de estos dos valores. También es preciso considerar las características del terreno que se está levantando ya que, si éste es muy accidentado, puede requerir distancias más cortas entre las estaciones.

Calcularemos el número máximo de tramos para que no se supere la tolerancia fijada y, en caso necesario, dividiremos los itinerarios más largos, levantando algún punto intermedio por intersección inversa que nos sirva de estación de cierre.

Interesa que los itinerarios sigan recorridos próximos a la línea recta. Siempre que sea posible se llevarán por las líneas que definan el relieve del terreno, como divisorias de aguas y vaguadas. En otros casos seguirán los bordes de los caminos, las orillas de los ríos, etc., de forma que faciliten el levantamiento de detalles.

Todos los itinerarios deben ser encuadrados o, al menos, cerrados, de forma que sea posible determinar el error de cierre y compensarlo.

#### **14.5.3.2.- Cálculo y compensación de la red**

El error de cierre angular de cada itinerario debe calcularse en el campo, por si fuera excesivo. Para ello, como sabemos, basta con comparar la suma de lecturas acimutales correspondiente a visuales de frente con la correspondiente a visuales de espalda. La diferencia entre ambas, si no existiera error, será un múltiplo entero de  $200^g$ .

Los itinerarios primarios, encuadrados entre vértices cuyas coordenadas vienen fijadas por formar parte de la red trigonométrica, se calculan y se compensan por el procedimiento habitual.

Los itinerarios secundarios pueden calcularse por los mismos procedimientos. Estos itinerarios se establecen entre puntos, ya compensados, pertenecientes a itinerarios anteriores, por lo que las coordenadas calculadas para sus estaciones dependerán del orden en que se hayan ido resolviendo éstos. Según sea este orden, pueden obtenerse pequeñas diferencias en los valores de las coordenadas.

Una forma de operar para obtener un resultado único consiste en realizar los cálculos y compensaciones por distintos caminos y adoptar aquel que nos proporcione los menores errores de cierre. Otra posibilidad es la de realizar una compensación conjunta de la red, empleando el método de los mínimos cuadrados, lo que obliga a disponer de un programa informático apropiado. En cualquier caso, la compensación de la red topográfica debe hacerse de forma que se respeten las coordenadas asignadas a los vértices trigonométricos, en las que se apoyan los puntos topográficos.

#### **14.5.4.- Red de detalle**

El objetivo de esta última red planimétrica es el levantamiento de todos los detalles del terreno. Para ello nos apoyaremos en la red topográfica, previamente levantada, que nos proporciona una malla suficientemente densa de puntos topográficos.

Los métodos a emplear en la red de relleno pueden ser menos precisos que los propios de las redes anteriores, ya que esta red no va a servir de apoyo a ninguna otra y, por tanto, los errores cometidos al levantar un punto se localizarán en éste, sin transmitirse a ningún otro. En cualquier caso, es válida para la red de relleno la exigencia propia de todo el levantamiento: los errores finales no deben exceder la tolerancia fijada.

Para el levantamiento de la red de detalle suele emplearse la estación total.

En esta red se suelen emplear dos métodos:

- **Itinerarios de relleno.** Estos itinerarios, de número reducido de ejes, se encuadran entre los puntos de la red topográfica, de forma que permita su comprobación. Deben adaptarse a las formas del terreno y su objetivo es proporcionar un número suficiente de estaciones desde las que, por el método de radiación, se puedan levantar todos los detalles.
- **Radiación.** Es el método empleado para el levantamiento de todos los detalles del terreno. La radiación se efectúa desde las estaciones de los itinerarios de relleno y desde los puntos de la red topográfica. En caso necesario puede levantarse alguna *estación destacada*. Consiste este procedimiento en levantar por radiación un punto situado en una zona de difícil acceso para otros métodos. Desde ésta levantaremos posteriormente, también por radiación, toda la zona próxima.

El método de radiación no tiene comprobación, por lo que habrá que ser especialmente cuidadoso al emplearlo, sobre todo si se levanta alguna estación destacada.

#### **14.5.4.1.- Modo operativo**

Antes de comenzar el levantamiento de la red de detalle es preciso plantearse el objetivo del levantamiento y la escala del plano a obtener. En función de esta escala determinaremos la máxima dimensión sin representación en el plano y la tendremos siempre presente, para evitar el levantamiento de un número excesivo e innecesario de puntos.

También se habrán de tener en cuenta las limitaciones del método de radiación, evitando levantar puntos próximos desde distancias grandes o desde estaciones distintas. La distancia máxima de radiación se calculará en función de los errores propios del instrumento a emplear, tal como se explicó.

Es importante numerar, de forma apropiada, los puntos que se van levantando y elaborar croquis que recojan todo el trabajo realizado. Debemos proceder de forma sistemática, para evitar que queden zonas sin levantar.

Para anotar las lecturas realizadas en el campo es necesario utilizar una *libreta de campo*, que dispone de una serie de apartados donde figurarán la estación en la que nos situamos, la altura del aparato, el punto al que estamos visando, las lecturas acimutal y cenital, las lecturas sobre mira y alguna observación que nos permita recordar los detalles de interés de ese punto visado. Las estaciones totales disponen de un procesador que almacena toda la información y que les permite, introduciendo algunos datos como altura de aparato, altura de prisma y una serie de correcciones, calcular las coordenadas del punto visado e incluso, en algunos casos, aplicar un método determinado, determinar una superficie, etc. Además están provistas de dispositivos de vertido de todos los datos obtenidos a un ordenador personal, para realizar en éste los trabajos de gabinete posteriores.

Los cálculos a efectuar en gabinete consisten en la resolución de los itinerarios de relleno y en el cálculo de las libretas de campo. Normalmente, los cálculos se realizarán con ordenador y el trazado del plano con ayuda de software específico. Este trazado

incluye la representación altimétrica del terreno que, normalmente, se hará mediante curvas de nivel interpoladas a partir de las coordenadas planimétricas y altimétricas de los puntos de la red de relleno.

#### **14.6.- REDES ALTIMÉTRICAS**

La tolerancia en altimetría será, como sabemos, una fracción de la equidistancia. Este valor será, en principio, distinto al de la tolerancia planimétrica, por lo que la planificación de los trabajos altimétricos podría hacerse de forma independiente a la de los trabajos planimétricos.

No obstante, si el procedimiento consiste en levantar las redes topográfica y de relleno simultáneamente a la de nivelación trigonométrica, las consideraciones sobre equipos a emplear, longitud máxima de las visuales y número máximo de ejes en itinerarios deben establecerse conjuntamente.

##### **14.6.1.- Nivelación trigonométrica o por pendientes**

En el caso más general, se levantarán por nivelación trigonométrica los puntos correspondientes a las redes topográfica y de relleno, por lo que los itinerarios altimétricos coincidirán con los planimétricos. Los errores altimétricos se irán acumulando a lo largo de los itinerarios, por lo que serán máximos para los itinerarios de mayor longitud.

Los errores a considerar son los del apartado 14.4.1 de este capítulo. Determinaremos el error altimétrico  $E_v$  correspondiente a una visual, que viene expresado en metros. Como longitud  $D$  de las visuales tomaremos la que se determinó para los ejes de los itinerarios de la red topográfica.

Los desniveles en itinerarios suelen medirse por duplicado, en la visual de frente y en la de espaldas. Siendo  $n$  el número de ejes de los itinerarios más largos, el error máximo acumulado será:

$$\varepsilon_v = \frac{E_v}{\sqrt{2}} \sqrt{n}$$

Si los errores planimétricos calculados a priori en la red topográfica eran aceptables, normalmente lo serán también los errores altimétricos. Si no es así, tendremos que revisar el plan de trabajos. En general, bastará con dividir los itinerarios más largos, haciendo que una de sus estaciones intermedias forme parte de la red altimétrica por nivelación geométrica.

Al error altimétrico que acabamos de determinar se superpone el debido a la radiación, que se calcula de forma similar, en función del instrumento que se emplee y de las distancias máximas previstas para la red de relleno.

##### **14.6.2.- Nivelación geométrica o por alturas**

Esta red altimétrica servirá para determinar las altitudes de los vértices trigonométricos y de aquellos puntos topográficos en que confluyen varios itinerarios. Se

parte del punto altimétrico fundamental y se determina la altitud de cada punto mediante una nivelación compuesta por alturas, por el método del punto medio, siguiendo el camino más corto.

El error altimétrico correspondiente a una visual se determina tal como se vio en el apartado 14.4.2. Dependerá de la longitud media de las visuales  $D$ , que estimaremos en función del relieve del terreno. En general, la longitud de los tramos de nivelación no debe superar los  $100m$ .

En nivelaciones geométricas puras, la tolerancia viene dada en función del error kilométrico, pero para el levantamiento completo se tiene en cuenta, como se ha visto, la tolerancia calculada como fracción de la equidistancia.

## **14.7.- RED TRIGONOMÉTRICA**

### **14.7.1.- Errores accidentales en la red trigonométrica**

Para calcular los errores a priori de la red trigonométrica consideraremos, en primer lugar, el error en la medida de la base. Para medir bases son muy adecuados los equipos que incorporan métodos electrónicos de medida. El error, en este caso, dependerá de las características del instrumento y de la distancia a medir, tal como se vio en 14.3.

El resto de las lecturas a efectuar en esta red serán ángulos acimutales, o distancias reducidas si se emplea la trilateración, por lo que los únicos errores a considerar, además del de medida de la base, son los estudiados en los apartados 14.2 o 14.3, respectivamente.

Los errores se irán acumulando, desde el primer triángulo, que ocupará normalmente una posición centrada en la zona a levantar, hasta los triángulos situados en los extremos de dicha zona. Lógicamente, los errores serán máximos en estos triángulos periféricos y son estos valores los que vamos a tener en cuenta a la hora de planificar la red trigonométrica.

### **14.7.2.- Criterios para el establecimiento de la red**

Comenzaremos por definir las distancias entre vértices trigonométricos. Estas distancias estarán condicionadas, como sabemos, por las longitudes máximas que se puedan alcanzar en las redes topográfica y de relleno y por las condiciones del terreno a levantar. Puesto que las características de cada red van a condicionar las restantes redes del levantamiento, el proyecto del mismo y el estudio de errores a priori deben establecerse de una forma conjunta.

Las distancias entre vértices oscilarán, normalmente, entre  $1.000$  y  $2.000m$ . En función de los instrumentos a emplear y de la distancia máxima entre ellos, calcularemos el error en la medida de la base  $\varepsilon_b$  y el error angular  $E_a$  correspondiente a una visual, o el  $E_d$  si se aplicase la trilateración.

A continuación, estimaremos el número máximo de triángulos a establecer para alcanzar desde la base los puntos extremos de la zona a levantar. El número máximo

de triángulos en una cadena dependerá de la longitud media de los lados de dichos triángulos y de la forma y dimensiones del terreno a levantar, pero también de la posición en que se sitúe la base.

Los errores se van transmitiendo de cada triángulo al siguiente. Para calcular el error a priori emplearemos la expresión que corresponda, según se aplique la intersección mediante observaciones de ángulos (véase 12.1.4) o de distancias (véase 12.2.2):

$$\epsilon_a = \frac{E_a \sqrt{6} \cdot 0,8 L}{r} \sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}} \quad \epsilon_d = 0,8 \sqrt{3} E_d \sqrt{\frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}}$$

siendo  $L$  la longitud media de los lados de los triángulos y  $n'$  el número de triángulos de la cadena. El resultado viene expresado en metros.

El error máximo de la triangulación, correspondiente a los triángulos más alejados de la base, será:

$$e_{t1} = \sqrt{\epsilon_b^2 + \epsilon_a^2} \text{ (con medida de ángulos)} \quad e_{t1} = \sqrt{\epsilon_b^2 + \epsilon_d^2} \text{ (con medida de distancias)}$$

En caso de que el error se considere excesivo, puede ser conveniente establecer dos triangulaciones. La triangulación secundaria tendrá lados de longitudes similares a las que hemos visto y se apoyará en la triangulación principal. Esta tendrá lados sensiblemente más largos, de forma que el número de triángulos para cubrir el área de interés sea menor, reduciendo así la acumulación de errores. En este caso, el error máximo a considerar será el acumulado de las dos redes:

$$\epsilon_t = \sqrt{e_{t1}^2 + e_{t2}^2}$$

siendo  $e_{t1}$  y  $e_{t2}$  los errores máximos correspondientes a cada una de las redes. Si sólo se establece una red de triángulos,  $\epsilon_t = e_{t1}$ .

En general, no conviene que los lados de la triangulación principal superen los 5.000m de longitud. Para calcular los errores en los triángulos más alejados de la base procederemos como antes, pero teniendo en cuenta que esta triangulación tendrá su propia base, de mayor longitud. Además, el error de dirección será inferior, pues es inversamente proporcional a la distancia.

Para calcular los errores en la triangulación secundaria, hemos de tener en cuenta que ésta se apoya en la principal. En el ejemplo de la figura 14.5, siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  vértices de la triangulación principal, el número de triángulos secundarios necesario para unir dichos vértices será de 5. Por tanto, el error angular máximo en la red secundaria se obtendrá para  $n' = 5$ .

De esta manera, los errores de la red secundaria se reducen enormemente, dado que las cadenas de triángulos son mucho más cortas, al estar apoyadas en los vértices de la red principal.

Otra posibilidad de reducir errores consiste en aplicar alguno de los procedimientos para aumentar la

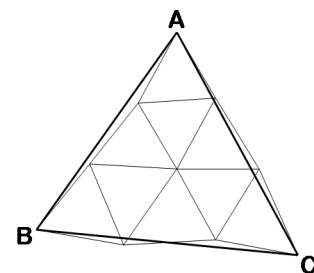


Fig. 14.5. Triangulación secundaria

precisión de las medidas angulares, o, por supuesto, emplear un instrumento más preciso.

## 14.8.- RED TOPOGRÁFICA

### 14.8.1.- Errores accidentales en la red topográfica

La red topográfica o intermedia se levantará, en general, por el método de itinerario. Por consiguiente, en el cálculo de errores a priori en esta red tenemos que considerar tanto los errores acimutales, que se vieron en el apartado 14.2.1, como los errores en distancia, que se vieron en el punto 14.3. Comenzaremos por determinar la longitud máxima  $D$  de los tramos del itinerario, que debe ser inferior al alcance normal del instrumento empleado y que dependerá de la distancia máxima en radiación, puesto que desde las estaciones de los itinerarios se levantará la mayor parte de los puntos de la red de relleno.

Teniendo en cuenta las longitudes máximas de los tramos de los itinerarios y las distancias entre vértices de la red trigonométrica, podremos estimar el número  $n$  de tramos que se necesitaría establecer en los itinerarios más desfavorables.

Para calcular los errores angular y lineal acumulados en un itinerario se aplican las expresiones de 11.4:

$$e_{ca} = D \frac{E_a}{r} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$e_{cl} = E_d \sqrt{n}$$

siendo  $E_a$  y  $E_d$  los errores en ángulos y distancias correspondientes a una visual (véase 14.2 y 14.3) y  $r$  el número de segundos de un radián.

Debemos tener en cuenta que las longitudes de los tramos de los itinerarios se suelen medir dos veces, una en la visual de frente y otra en la de espaldas, por lo que los errores correspondientes se dividirán por  $\sqrt{2}$ .

Puesto que los errores angular y lineal actúan de forma independiente, el error total vendría dado por la expresión:

$$e_c = \sqrt{e_{ca}^2 + e_{cl}^2}$$

### 14.8.2.- Criterios para el establecimiento de la red

Este error máximo debe ser inferior a la tolerancia. Si no fuese así, tendremos que revisar el plan de trabajo y, para ello, podemos comenzar por calcular el número máximo de tramos de longitud  $D$  que puede tener un itinerario para que no se supere la tolerancia, tal como se vio en 11.4.3. Este número será inferior a  $n$ .

Para reducir los errores a priori en la red topográfica podemos actuar de las siguientes formas:

- Reduciendo el número de tramos de los itinerarios hasta un valor que no supere al máximo que hemos calculado.
- Utilizando un instrumento más preciso, para conseguir errores menores en las



mismas condiciones.

Para reducir el número de tramos de los itinerarios será preciso revisar las redes trigonométrica y de relleno. Puede ser conveniente reducir las distancias entre vértices, aunque eso suponga incrementar el número de vértices y los errores acumulados en esa red, o multiplicar el número de puntos trigonométricos complementarios. En caso necesario pueden establecerse dos redes de triángulos, como se ha explicado.

La otra posibilidad es emplear un instrumento que aporte mayor precisión o que haga posible aumentar la distancia entre estaciones sin comprometer la red de relleno, siempre que las condiciones del terreno lo permitan, reduciendo así su número sin necesidad de modificar la red trigonométrica proyectada.

#### **14.9.- RED DE DETALLE**

##### **14.9.1.- Errores a considerar**

Puesto que los métodos topográficos que se emplean en esta red son los de radiación e itinerario, los errores a considerar son los mismos que en la red anterior. En este caso habrá que tener en cuenta las distancias propias de la red y el hecho de que con este método no se produce acumulación de errores.

En ocasiones se aplica la regla de Bessel en el levantamiento de la red de detalle. En ese caso, dividiremos los errores correspondientes por  $\sqrt{2}$ , tal como hemos visto.

##### **14.9.2.- Criterios para el establecimiento de la red**

La primera limitación a tener en cuenta es la relativa al alcance del instrumento que se emplee, especialmente en la medida de distancias. En función de las características del instrumento a emplear se calcularán los errores a priori y la distancia máxima de radiación, tal como se vio en 10.2.3:

$$e_r = \sqrt{\frac{E_a^2}{r^2} D^2 + E_d^2}$$

donde:  $e_r$  = error total en radiación, expresado en m.

$E_d$  = error en la medida de la distancia, expresado en m. Una parte del error total es fija y otra parte es proporcional a la distancia (véase 14.3).

$E_a$  = error angular expresado en segundos (véase 14.2).

Igualando este error a la tolerancia, podremos calcular mediante tanteos la distancia máxima a la que podemos aplicar este método sin que los errores sean excesivos. Si la distancia calculada fuese superior al alcance del instrumento, se tomará este último valor.

El valor de la distancia máxima de radiación condicionará todo el proyecto del levantamiento, como se ha visto, por lo que se debe ser especialmente cuidadoso al determinarla. Si la distancia máxima calculada, o el alcance del instrumento, se considera

excesiva para las características de la zona a levantar (terreno accidentado, existencia de arbolado, etc.) debemos ser realistas y considerar un valor mas reducido a la hora de diseñar el plan de trabajo de nuestro levantamiento

#### 14.10.- ACUMULACIÓN DE ERRORES. COMPROBACIÓN FINAL

En la práctica, puesto que cada red se apoya en las anteriores, parte de los errores de aquellas revertirán en ésta. En consecuencia, aunque en ninguna de las redes se haya excedido la tolerancia, cabe la posibilidad de que los errores finales sí la excedan. Terminaremos este estudio de errores a priori comprobando que esta circunstancia no se da, ya que, de lo contrario, será preciso revisar el plan de los trabajos, buscando la forma de reducir los errores en algunas de las redes o en todas ellas.

- Partimos del error máximo calculado para la triangulación primaria, que llamaremos  $e_{t1}$  (véase 14.7.2). Si se hubiese establecido una triangulación secundaria, para limitar los errores de la red trigonométrica, el error a considerara será el acumulado de las dos redes:

$$\varepsilon_t = \sqrt{e_{t1}^2 + e_{t2}^2}$$

que tiene en cuenta el error de la cadena y los errores propios de los dos vértices primarios en los que se apoya (véase 2.1.4). Si sólo se ha previsto realizar una red de triangulación, será:

$$\varepsilon_t = e_{t1}$$

Este error se compensará, repartiéndolo entre los  $n''$  triángulos de la cadena, por lo que a cada triángulo le corresponderá un error:

$$e'' = \varepsilon_t / \sqrt{n''}$$

y una corrección:

$$c'' = \varepsilon_t / n''$$

Se admite que el máximo error absoluto que se puede producir en un vértice es la suma del error máximo propio de la red  $e''$  y de la corrección  $c''$ :

$$\xi_t = e'' + c''$$

- Los itinerarios primarios se encuadran entre vértices de la triangulación secundaria, por lo que partiremos del error que acabamos de calcular y del error de cierre propio del itinerario  $e_c$ . De modo similar al anterior, tendremos para un itinerario:

$$e_i = \sqrt{\xi_t^2 + \xi_t^2 + e_c^2}$$

Que representa el error acumulado de la triangulación y el itinerario. Si el itinerario está formado por  $n$  ejes, el error correspondiente a cada punto del itinerario será:

$$e' = \frac{e_i}{\sqrt{n}}$$

y al compensar el error de cierre, la corrección en cada punto será:

$$c' = \frac{e_i}{n}$$

Como en el caso anterior, admitiremos que el máximo error absoluto en los puntos poligonómicos de los itinerarios primarios será:

$$e = e' + c'$$

- El mismo procedimiento emplearemos para calcular el error absoluto máximo en los puntos pertenecientes a itinerarios secundarios. Estos itinerarios se encuadran entre puntos pertenecientes a los itinerarios primarios, por lo que en este caso partiremos del error  $e$ . En el caso de itinerarios encuadrados entre un vértice de la triangulación y un punto de un itinerario primario se considerarán los errores  $\xi_i$  y  $e$ , además del error de cierre propio del itinerario. De igual modo se calcula el error en itinerarios de relleno.

- La red de relleno se levanta desde las estaciones de los últimos itinerarios. Por tanto si el error máximo absoluto en estos es  $e_{iu}$  y el error propio de la radiación es  $e_r$ , tendremos:

$$e_u = \sqrt{e_{iu}^2 + e_r^2}$$

El método de radiación no tiene comprobación y, por tanto, no cabe compensar errores de cierre. Tomaremos el valor obtenido como error máximo absoluto en los puntos levantados por radiación, acumulado entre este método y el de poligonación. El valor de  $e_u$  no debe superar la tolerancia planimétrica..



## 15. AJUSTE DE OBSERVACIONES POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Ya hemos visto que es recomendable en Topografía realizar las observaciones de forma que éstas sean redundantes y permitan comprobar los resultados obtenidos. Es el caso de la intersección múltiple, de aplicación en triangulaciones topográficas y (como se verá más adelante) en control de movimientos de estructuras y obras de tierra, y es también práctica habitual en otros trabajos topográficos, especialmente en aquellos en los que se requiere gran precisión.

Una vez realizadas las comprobaciones pertinentes, la solución final se puede obtener resolviendo las distintas combinaciones simples de observaciones y hallando la media, aritmética o ponderada, de sus soluciones. Sin embargo, muchas veces se prefiere calcularla mediante el método de los mínimos cuadrados, que permite obtener una solución única cuando existen datos sobreabundantes y aplica el procedimiento de ajuste más riguroso desde el punto de vista de las leyes matemáticas de probabilidad.

Para cada tipo de observación (de ángulos, de distancias o de desniveles) se empleará un tipo de ecuación, lineal o linearizada. Si se dispone de tantas ecuaciones como incógnitas, el ajuste nos dará la misma solución que se obtendría aplicando los métodos de cálculo que ya conocemos. Si se dispone de más ecuaciones que incógnitas, el ajuste por mínimos cuadrados aporta la solución más probable, que hace mínima la suma de los cuadrados de los *residuos*. Llamamos residuos a los valores que habría que añadir a cada ecuación de un sistema sobreabundante para que éste tenga una solución única, óptima.

Cada observación, adecuadamente tratada, nos va a proporcionar una ecuación. Si las ecuaciones no son lineales hay que linealizarlas aplicando el método de Taylor. Es importante señalar que, en ese caso, la solución del sistema debe obtenerse mediante aproximaciones sucesivas, introduciendo como valores aproximados en cada iteración los obtenidos como solución en la anterior, hasta que las diferencias entre ellos alcancen valores aceptables.

Lo que sigue se basa en el capítulo 14 del libro *The Surveying Handbook* de Brinker y Minnick, adaptado por M. Farjas.

### 15.1.- AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS

Supongamos un sistema sobreabundante de ecuaciones, cada una de las cuales relaciona las incógnitas con una de las observaciones. La forma de plantear las ecuaciones se describe en 15.2. Como el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, para obtener una solución única para éstas se suma a cada ecuación el correspondiente residuo  $V$ :

$$\begin{aligned}
 a_1 X_1 + b_1 X_2 + c_1 X_3 + \dots + n_1 X_n &= L_1 + V_1 \\
 a_2 X_1 + b_2 X_2 + c_2 X_3 + \dots + n_2 X_n &= L_2 + V_2 \\
 &\dots \\
 a_m X_1 + b_m X_2 + c_m X_3 + \dots + n_m X_n &= L_m + V_m
 \end{aligned}$$

$X_i$  son las incógnitas,  $a_i, b_i, \dots, n_i$  son los coeficientes de las incógnitas y  $L_i$  son los términos independientes de las ecuaciones. El ajuste se basa en hacer mínima la suma de los cuadrados de los residuos:

$$\begin{aligned}
 \Sigma(V_i)^2 &= (V_1)^2 + (V_2)^2 + \dots + (V_m)^2 \\
 \Sigma p_i (V_i)^2 &= p_1 (V_1)^2 + p_2 (V_2)^2 + \dots + p_n (V_m)^2
 \end{aligned}$$

La segunda expresión es la que corresponde al caso de observaciones con distintos pesos. Es de aplicación cuando se considera que las observaciones no tienen la misma precisión, por ejemplo por estar hechas a distancias diferentes. Si se entiende que una mayor distancia puede implicar mayor error, pueden tomarse como pesos las inversas de las distancias. En otras ocasiones se emplean como pesos las inversas de las varianzas.

Las ecuaciones se expresan en forma matricial:

$${}_m A_n \ X_1 = {}_m L_1 + {}_m V_1$$

siendo

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & b_m & \dots & n_m \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_m \end{vmatrix} \quad V = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_m \end{vmatrix}$$

Para el caso de observaciones independientes y del mismo peso, la matriz de soluciones  $X$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A^t A X &= A^t L \\
 (A^t A)^{-1} (A^t A) X &= (A^t A)^{-1} A^t L \\
 I X &= (A^t A)^{-1} A^t L \\
 \boxed{X} &= \boxed{(A^t A)^{-1} A^t L}
 \end{aligned}$$

siendo  $A^t$  la matriz traspuesta de  $A$  y  $(A^t A)^{-1}$  la inversa de  $(A^t A)$ . Llamamos  $I$  a la matriz identidad.

En el caso de observaciones independientes pero con distintos pesos, la matriz de pesos será:

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{vmatrix}$$

y la matriz de soluciones se obtiene:

$$\boxed{X = (A^t P A)^{-1} A^t P L}$$

Esta matriz  $X$  está formada por las diferencias entre los valores aproximados que hayamos asignado a las coordenadas de los puntos incógnita y los valores más probables de estas coordenadas. Estos se obtendrán, por consiguiente, sumando a cada valor asignado la correspondiente diferencia.

### 15.1.1.- Comprobación del ajuste

La calidad del ajuste obtenido puede comprobarse analizando la matriz de los residuos, que se calcula:

$$V = AX - L$$

La bondad del ajuste se analiza mediante la distribución  $\chi^2$  (chi cuadrado). Las observaciones originales se comparan con las ajustadas, mediante:

$$\chi^2 = \sum (V_i)^2 (p_i)^2$$

siendo  $V_i$  los residuos, obtenidos de la matriz  $V$ , y  $p_i$  los pesos. El valor obtenido se somete a una prueba de bondad del ajuste, comparándolo con el de la tabla de valores críticos de la distribución  $\chi^2$ . Si el valor obtenido es inferior al de la tabla en el nivel 5%, el ajuste se considera correcto.

A continuación obtenemos la matriz de *covarianza*, que se emplea para calcular las desviaciones estándar y la elipse de errores. La matriz *cofactor*  $Q$  será:

$$Q = (A^t P A)^{-1}$$

La desviación estándar del peso de unidad para un ajuste ponderado se calcula:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{V^t P V}{r}}$$

siendo  $r$  el número de grados de libertad del ajuste, que se calcula restando al número de ecuaciones de observación ( $m$ ) el de incógnitas ( $n$ ). La matriz de covarianza será:

$$\Sigma = (\sigma_0)^2 Q = \begin{vmatrix} (\sigma_1)^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & (\sigma_2)^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & (\sigma_n)^2 \end{vmatrix}$$

Es una matriz cuadrada, de dimensiones  $n \times n$ . En el caso de variables independientes, las correspondientes covarianzas  $\sigma_{ij}$  serían nulas. Las dimensiones y la orientación de la elipse de error estándar en la posición de un punto se obtienen a partir de esta matriz. En el caso, por ejemplo, de que el ajuste se haya realizado para determinar las coordenadas planas desconocidas ( $X$  e  $Y$ ) de un punto, la matriz de covarianza quedaría:

$$\Sigma = (\sigma_0)^2 Q = \begin{vmatrix} (\sigma_X)^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & (\sigma_Y)^2 \end{vmatrix}$$

Los semiejes  $a$  (mayor) y  $b$  (menor) de la elipse de error se calculan:

$$a = \frac{(\sigma_X)^2 + (\sigma_Y)^2 + \sqrt{(\sigma_X)^2 - (\sigma_Y)^2 + 4(\sigma_{XY})^2}}{2}$$

$$b = \frac{(\sigma_X)^2 + (\sigma_Y)^2 - \sqrt{(\sigma_X)^2 - (\sigma_Y)^2 + 4(\sigma_{XY})^2}}{2}$$

Y la orientación:

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\sigma_{xy}}{(\sigma_X)^2 - (\sigma_Y)^2}$$

Siendo  $t$  el ángulo que forma el eje mayor con el eje  $Y$ .

## 15.2.- TIPOS DE ECUACIONES

Como se ha indicado, cada ecuación relaciona las observaciones de campo, debidamente tratadas, con las incógnitas. En el caso de que la relación que liga las variables no sea lineal, se aplica el método de Taylor para linealizarla. Las ecuaciones deben estar en la forma que aparece al principio de 15.1:

$$A X = L + V$$

### 15.2.1.- Observaciones angulares

Se refieren a la determinación de ángulos horizontales (acimutes o lecturas) en intersecciones o itinerarios. Introduciremos unos valores aproximados para los puntos desconocidos y el ajuste nos proporcionará las diferencias que hay que sumarles para obtener los valores ajustados. Si consideramos la visual lanzada desde un punto de estación  $E$  a otro punto  $P$ , el modelo de ecuación será del tipo siguiente:

$$(\theta_E^P)' + d\theta_E^P - \theta_E^P = V_E^P$$

valor aproximado + corrección - valor observado = residuo

La expresión que relaciona las coordenadas de dos puntos y el acimut de la alineación que forman no es lineal:

$$\operatorname{tg} \theta_E^P = \frac{|X_P - X_E|}{|Y_P - Y_E|}$$

Se lineariza, teniendo en cuenta que el acimut es función de las cuatro coordenadas, obteniendo:

$$\frac{r^s}{(D_E^P)_{CAL}^2} [(Y_P - Y_E)dX_P - (Y_P - Y_E)dX_E - (X_P - X_E)dY_P + (X_P - X_E)dY_E] - dC_E = [(L_E^P + C_E') - (\theta_E^P)']^s + v^s$$

- Los valores angulares (acimutes, lecturas y correcciones de orientación) van expresados en segundos
- $r^s$  es el número de segundos de un radián ( $r^s = 636.619,772$ )
- $dX_P, dY_P, dX_E, dY_E, dC_E$  son las incógnitas
- $C_E'$  es la corrección de orientación en el punto de estación  $E$ ;  $L_E^P$  es la lectura horizontal observada



- $(\theta_E^P)'$ ,  $C_E'$  y  $(D_E^P)_{CAL}$  son los valores calculados a partir de las coordenadas aproximadas que hemos introducido

Si cualquiera de los dos puntos fuera conocido y sus coordenadas se considerasen fijas, los correspondientes diferenciales se anularían y no actuarían como incógnitas. Si, por ejemplo, el punto de estación  $E$  fuese fijo, desaparecerían las incógnitas  $dX_E$ ,  $dY_E$  y  $dC_E$ .

### 15.2.2.- Observaciones de distancias

Se trata de distancias reducidas, medidas en itinerarios o en intersecciones con observación de distancias. Se actúa como en el caso de los ángulos horizontales:

$$(D_E^P)_{CAL} + dD_E^P - D_E^P = V_E^P$$

*valor aproximado + corrección - valor observado = residuo*

La expresión que relaciona las coordenadas de dos puntos y la distancia reducida entre ellos no es lineal:

$$D_E^P = \sqrt{(X_P - X_E)^2 + (Y_P - Y_E)^2}$$

Se lineariza, teniendo en cuenta que la distancia reducida es función de las cuatro coordenadas, obteniendo:

$$\frac{1}{(D_E^P)_{CAL}} \left[ -(X_P - X_E)dX_E - (Y_P - Y_E)dY_E + (X_P - X_E)dX_P + (Y_P - Y_E)dY_P \right] =$$

$$= D_E^P - (D_E^P)_{CAL} + v$$

- $dX_P$ ,  $dY_P$ ,  $dX_E$ ,  $dY_E$  son las incógnitas
- $(D_E^P)_{CAL}$  es la distancia calculada a partir de los datos aproximados, mientras que  $D_E^P$  es la distancia observada

Si cualquiera de los dos puntos fuera conocido y sus coordenadas se considerasen fijas, los correspondientes diferenciales se anularían y no actuarían como incógnitas. Si, por ejemplo, el punto de estación  $E$  fuese fijo, desaparecerían las incógnitas  $dX_E$ ,  $dY_E$ .

### 15.2.3.- Observaciones de desniveles

En el caso de la nivelación geométrica, la expresión que relaciona los desniveles y las altitudes ya es lineal. Por tanto, puede emplearse directamente. Al determinar el desnivel entre dos puntos  $A$  y  $B$ , tendremos:

$$dZ_B - dZ_A = Z_A^B - (Z_A^B)' + v$$

- $dZ_A$ ,  $dZ_B$  son las incógnitas
- $(Z_A^B)'$  es el desnivel calculado a partir de los datos aproximados, mientras que  $Z_A^B$  es el observado

### 15.3.- EJEMPLOS DE APLICACIÓN

#### 15.3.1. Intersección directa

Veamos la aplicación del método de mínimos cuadrados al ajuste de observaciones en un caso, muy sencillo, de intersección directa. Supongamos que se trata de determinar las coordenadas  $X_P$  e  $Y_P$  de un punto  $P$  al que visamos desde tres puntos conocidos y fijos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Sólo se determinaron ángulos horizontales, sin orientar el instrumento, y no se hizo estación en el punto a levantar.

En este caso tendremos dos incógnitas ( $dX_P$  y  $dY_P$ ) y tres ecuaciones, cada una de ellas correspondiente a una observación angular, ya que las visuales entre puntos fijos, que se emplean para orientar o para calcular la corrección de orientación, no plantean ecuación. Para determinar unos valores aproximados iniciales para el punto  $P$ , podemos resolver una cualquiera de las intersecciones simples posibles, como se hace en 12.1.1. Obtenemos así los valores  $X_P'$  e  $Y_P'$ .

Las ecuaciones (véase 15.2.1) serán las siguientes:

Como  $A$  es un punto fijo:

$$dX_A = 0 \quad dY_A = 0 \quad dC_A = 0$$

Con las coordenadas aproximadas de  $P$  ( $X_P'$  e  $Y_P'$ ) y las coordenadas conocidas de  $A$  ( $X_A$  e  $Y_A$ ) calculamos  $(D_A^P)_{CAL}$  y  $(\theta_A^P)'$ . Expresamos los valores angulares en segundos centesimales. Por tanto, la primera ecuación queda:

$$\frac{r^s}{(D_A^P)_{CAL}^2} [(Y_P' - Y_A) dX_P - (X_P' - X_A) dY_P] = [\theta_A^P - (\theta_A^P)']^s + v_1^s$$

$\theta_A^P$  es el acimut observado, que se mide directamente en los casos en que se opta por orientar el instrumento o se calcula a partir de la lectura y la corrección de orientación (obtenida al visar a otro punto conocido).

Como  $B$  es un punto fijo:

$$dX_B = 0 \quad dY_B = 0 \quad dC_B = 0$$

La situación es idéntica a la del punto  $A$ . Por tanto, la segunda ecuación queda:

$$\frac{r^s}{(D_B^P)_{CAL}^2} [(Y_P' - Y_B) dX_P - (X_P' - X_B) dY_P] = [\theta_B^P - (\theta_B^P)']^s + v_2^s$$

Como  $C$  es un punto fijo:

$$dX_C = 0 \quad dY_C = 0 \quad dC_C = 0$$

La tercera ecuación es idéntica a las anteriores:

$$\frac{r^s}{(D_C^P)_{CAL}^2} [(Y_P' - Y_C) dX_P - (X_P' - X_C) dY_P] = [\theta_C^P - (\theta_C^P)']^s + v_3^s$$

y las matrices quedarían:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{r^s}{(D_A^P)_{CAL}^2} (Y_P' - Y_A) & -\frac{r^s}{(D_A^P)_{CAL}^2} (X_P' - X_A) \\ \frac{r^s}{(D_B^P)_{CAL}^2} (Y_P' - Y_B) & -\frac{r^s}{(D_B^P)_{CAL}^2} (X_P' - X_B) \\ \frac{r^s}{(D_C^P)_{CAL}^2} (Y_P' - Y_C) & -\frac{r^s}{(D_C^P)_{CAL}^2} (X_P' - X_C) \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} dX_P \\ dY_P \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} [\theta_A^P - (\theta_A^P)']^s \\ [\theta_B^P - (\theta_B^P)']^s \\ [\theta_C^P - (\theta_C^P)']^s \end{vmatrix} \quad V = \begin{vmatrix} v_1^s \\ v_2^s \\ v_3^s \end{vmatrix}$$

Como hemos indicado, los nuevos valores se obtienen:

$$X_P = X_P' + dX_P$$

$$Y_P = Y_P' + dY_P$$

Con estos nuevos valores se repite el proceso hasta que las diferencias sean suficientemente reducidas.

**15.3.2. Nivelación geométrica**

Sea el caso de la figura 15.1, en el que se pretende obtener los valores más probables de las altitudes de los puntos C (Z<sub>C</sub>) y D (Z<sub>D</sub>). Suponemos conocidos y fijos los puntos A y B. Se han realizado observaciones, por el método del punto medio, en todos los tramos que aparecen en la figura.

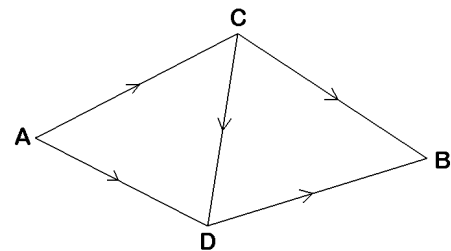


Fig. 15.1. Ajuste de una red de nivelación

Las incógnitas serán dZ<sub>C</sub> y dZ<sub>D</sub>. Como en el caso anterior, comenzamos por asignar valores iniciales aproximados a las altitudes de los puntos desconocidos: Z<sub>C</sub>' y Z<sub>D</sub>'. Para ello basta con resolver algunas de las nivelaciones simples. Puesto que se han medido 5 tramos, tendremos otras tantas ecuaciones como las de 15.2.3.

Los valores observados de cada tramo los obtenemos de los datos de campo. Calcularemos los desniveles de los tramos AC, AD, CB, DB y CD, a partir de las lecturas de mira, en el sentido que indican las flechas en la figura 15.1:

$$Z_A^C = m_A - m_C$$

...

Los valores estimados los obtenemos a partir de las altitudes, fijas o aproximadas, de los puntos extremos de cada tramo:

$$(Z_A^C)' = Z_C' - Z_A$$

...

Planteamos las ecuaciones. Como los puntos A y B son fijos, los valores de dZ<sub>A</sub> y dZ<sub>B</sub> son nulos. Por tanto, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}
 dZ_C &= Z_A^C - (Z_A^C)' + v_1 \\
 dZ_D &= Z_A^D - (Z_A^D)' + v_2 \\
 -dZ_C &= Z_C^B - (Z_C^B)' + v_3 \\
 -dZ_D &= Z_D^B - (Z_D^B)' + v_4 \\
 -dZ_C + dZ_D &= Z_C^D - (Z_C^D)' + v_5
 \end{aligned}$$

Y las matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} dZ_C \\ dZ_D \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} Z_A^C - (Z_A^C)' \\ Z_A^D - (Z_A^D)' \\ Z_C^B - (Z_C^B)' \\ Z_D^B - (Z_D^B)' \\ Z_C^D - (Z_C^D)' \end{vmatrix} \quad V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{vmatrix}$$

Los resultados finales se obtienen:

$$\begin{aligned}
 Z_C &= Z_C' + dZ_C \\
 Z_D &= Z_D' + dZ_D
 \end{aligned}$$