Ejercicios Tema 5: **LOS NÚMEROS COMPLEJOS**

1. Dados los números complejos $z_1 = -2 - i$ y $z_2 = -4 + i$, hallar $z_1 + z_2,\ 3z_1 - 2z_2,\ z_1 z_2,$ $(z_2)^{-1},\ \frac{z_1}{z_2}$.
2. Si $z_1 = 6i$ y $z_2 = 8 - i$, hallar $z_1 z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_2}{z_1},\ z_2^2 - z_1$.
3. Hallar las partes real e imaginaria del complejo $z = \frac{1-i}{1+i}$.
4. Determinar x e y para que se verifique $(1+i)(x+iy) = i$.
5. Calcular $(2+2i)^2,\ (2-2i)^2,\ (2+2i)(2-2i)$.
6. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un número complejo tenga módulo 1 es que su parte real coincida con la parte real de su inverso.
7. Encontrar las cuatro raíces cuartas de $z_1 = -8\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)$ y de $z_2 = -81$.
8. Calcular $\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)^{30},\ \sqrt[3]{-1+i}$.
9. Expresar en forma algebraica los complejos $z_2 = \frac{8}{(1-i)^5},\ z_2 = \left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^{3/4}$.
10. Hallar i^n con $n = 0, 1, \ldots, 9$. Deducir una fórmula para averiguar cualquier potencia de i.
11. Dibujar el conjunto de los puntos del plano tales que su afijo z verifica:
    - a. $Real(z) + Imag(z) = z\bar{z}$.
    - b. $|z|^{-1} \geq 1,\ (z \neq 0)$.
    - c. $|z - 5i| = 8$.
    - d. $Im(z^2) > 2$.
    - e. $Re\left(\overline{z^{-1}}\right) = 1$.
    - f. $2 < |z| < 3$.
    - g. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$.
    - h. $|z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$.
    - i. $Re(z^2 - z) = 0$.
12. Escribir en forma algebraica los complejos siguientes, donde ρ denota el módulo y θ un argumento:
    - a. $\rho = 2,\ \theta = \pi$.
    - b. $\rho = 1,\ \theta = -\pi/4$.
    - c. $\rho = \sqrt{2},\ \theta = \pi/3$.
    - d. $\rho = 2,\ \theta = -\pi/2$.
13. ¿En que vector se transforma $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo 90^o?. ¿Qué ángulo es necesario girarlo para que el resultado sea $2\sqrt{3}\,i$?.
14. Expresar en forma trigonométrica y en forma exponencial los números complejos siguientes:

$$-\frac{1}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \sqrt{3} - i,\ -\frac{1}{2}$$

15. Utilizar la fórmula de Moivre para obtener $\cos 3x$ y $\sin 3x$ en función de $\cos x$ y $\sin x$.

16. Linealizar $\cos^4 x$.

17. Resolver en C las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 - (6+i)x + 7 + 9i = 0.$

b. $x^2 - 2(2-i)x + 3(1-2i) = 0.$

c. $x^4 + x^2 + 1 = 0.$

18. Hallar las cuatro raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0,$ y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ como producto de dos polinomios de segundo grado con coeficientes reales.

19. Resolver:

a. Demostrar que todo número complejo z distinto de 1, pero de módulo 1, se puede expresar como

$$z = \frac{\alpha + i}{\alpha - i}, \text{ para algún } \alpha \in R.$$

b. Sean z_1, z_2, z_3 tres complejos de módulo 1 tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 1.$ Probar que al menos uno de ellos debe ser igual a 1.

c. Encontrar 3 complejos $z_1, z_2, z_3,$ de módulo 1 que verifiquen

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$$

20. Probar que si z_1, z_2, z_3 son tres complejos que verifican

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|, \; z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$

entonces sus imágenes forman en el plano un triángulo equilátero.