Ejercicios Tema 3: **INTEGRAL DE LÍNEA**

(incluye ejercicios de exámenes de cursos anteriores)

1. Dada
$$\int_\gamma \left\{ \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}dx + \frac{1-x^2}{(1+xy)^2}dy \right\}$$
siendo γ cualquier camino que une $(0,0)$ y $(1,1)$:
   a. Probar que es independiente del camino, y calcular dicha integral. **(Solución = 1)**
   b. Comprobar el resultado mediante la función potencial.
2. Dado el campo vectorial
$$\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{2xyz}{1+z^2}, \frac{x^2z}{1+z^2}, \frac{x^2y(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \right)$$
   a. Probar que $\vec{\mathbf{F}}$ es conservativo.
   b. Calcular el trabajo necesario para desplazar un objeto desde $(0,0,1)$ a $(1,1,2)$. **(Solución = 2/5)**
3. Idem para los puntos $(1,-1,1)$ y $(2,1,-1)$, siendo el campo
$$\vec{\mathbf{F}} = (2xz^3+6y, 6x-2yz, 3x^2z^2-y^2)$$
(Solución = 107/5)
4. Verificar el teorema de Green para
$$\oint_\gamma \{(x^2+y^2)dx + (x^2-4)dy\}$$
siendo γ la curva, recorrida en sentido positivo, que delimita al dominio dado por la intersección, en el primer cuadrante, de las curvas $y=x$, $x+y=2$, $x+y=4$, $x^2-y^2=4$. **(Solución = 123/24)**
5. Calcular, mediante una integral de línea, el área del dominio cerrado limitado por las parábolas $y^2+4x-4=0$, $y^2+16x-64=0$, $y^2-4x-4=0$, $y^2-36x-324=0$. **(Solución = 106/3)**
6. Idem para el dominio limitado por $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$, $x=2y^2$. **(Solución = 1/12)**
7. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la curva $y = Chx$ comprendido entre $A(0,1)$ y $B(\log 2, 5/4)$. **(Solución = log2 - 3/2,5/8 + log2/3)**
8. Hallar el momento de inercia de una circunferencia de centro el origen y radio R respecto a uno de sus diámetros. **(Solución =** πR^2**)**
9. Empleando el teorema de Green transformar la integral de línea
$$\oint_\gamma \left\{ \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \log\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy \right\}$$
siendo γ el contorno que limita a un recinto arbitrario D. **(Solución =** $\iint_D y^2dxdy$**)**
10. Averiguar si existe una función potencial Φ para cada una de las siguientes funciones:
    a. $f = (xz-y, x^2y+z^3, 3xz^2-xy)$. **(Solución =** No existe**)**
    b. $f = (2xe^{-y}, \cos z - x^2e^{-y}, -y\sin z)$. **(Solución =** Si existe**)**
11. Siendo γ el contorno del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \le a$, $|y| \le a$, calcular

$$\int_\gamma \left\{ xe^{-y^2}dx + \left(-x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} \right) dy \right\}$$

(Solución = No existe función potencial, por lo que hay que calcular la integral directamente. Se obtiene 0)

12. **(FEBRERO 2012) Dado el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (e^x \sin(y) - y, e^x \cos(y) - x - 2)$,** calcular la integral de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la espiral de ecuación

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)(\cos(t), \sin(t)), \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

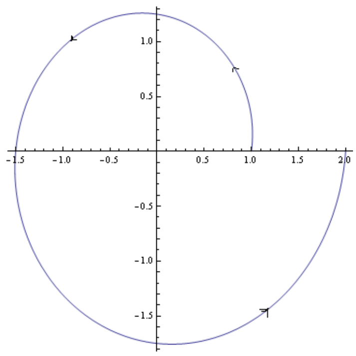


Figura ej. 12

13. **(FEBRERO 2012)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1+x)y^2, \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la frontera del conjunto (Figura 2)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4, y + x > 0\right\}$$

orientada positivamente. Justifica el procedimiento que uses.

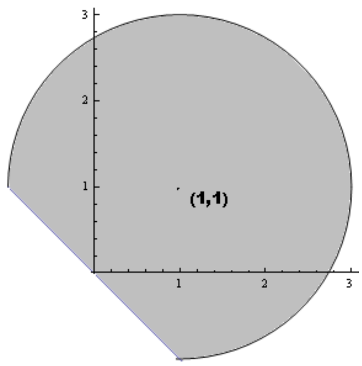


Figura ej. 13

14. **(FEBRERO 2012)** Sea la superficie S definida por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\right\}$$

y sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y, yz^2, x^2z)$. Calcular (directamente) la integral del rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la curva obtenida al intersectar la superficie S con el plano $z = 1$.

15. **(JUNIO 2012)** Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\vec{\mathbf{i}} + (y + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}} + \nabla\Phi(x,y,z)$$

donde

$$\Phi(x,y,z) = \log(2+x^2\cos(y-z)) + \sin\left(e^{x-y+z^2}\right) + \pi x\sqrt{y^2+4z^2}$$

calcular la integral del campo vectorial F a lo largo de la elipse de ecuación:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 2), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

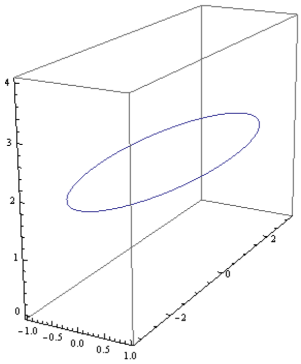


Figura ej. 15

16. (JUNIO 2012) Calcula la integral del campo vectorial

$$\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1+x)y^2, \pi x - log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la curva dibujada en rojo en la Figura, positivamente orientada. Tener en cuenta que el conjunto coloreado en gris es de la forma

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -1 < x < 3; \; -\sqrt{4-(x-1)^2} < y < \phi(x)\right\}$$

donde

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \sqrt{1-(x-2)^2} & \text{si } 1 \le x < 3 \end{cases}$$

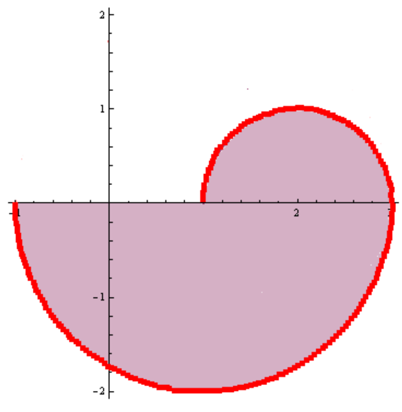
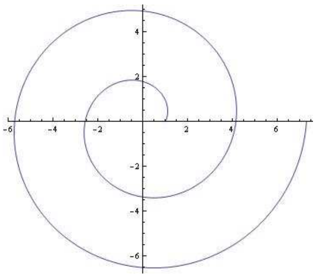


Figura ej. 16

17. (SEPTIEMBRE 2012) Calcula las integrales de los campos vectoriales a lo largo de las curvas que se indican (orientadas positivamente). Justifica el procedimiento que uses en cada caso.

a. Campo $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(2x - y\sin(xy), -x\sin(xy) + (y-1)^2\right)$

Curva $\gamma(t) = \left(\left(1+\frac{t}{2}\right)\cos(t), \sin(t)\right)$, $0 < t < 4\pi$.



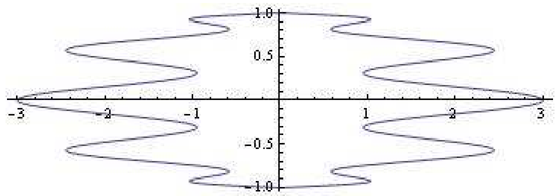


Figura ej. 17.a

Figura ej. 17.b

b. **Campo** $\vec{\mathbf{G}}(x,y) = ((1+x)y^2, \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$

Curva $\sigma(t) = ((2+10\cos(t))\cos(t), \sin(t)),\ 0 < t < 2\pi.$

AYUDA: Cualquier curva de la forma $\sigma(\theta) = (\alpha(\theta)\cos(\theta), \beta(\theta)\sin(\theta))$, **con** α, β **funciones contínuas y** $2\pi - periódicas$ **(es decir,** $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ **y** $\beta(0) = \beta(2\pi)$**) es frontera de un conjunto** $D \subset R^2$ **que puede describirse en coordenadas elípticas como**

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow x = r \cdot \alpha(\theta)\cos(\theta),\ y = r \cdot \beta(\theta)\sin(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1$$

18. **(FEBRERO 2013)** Calcula la integral del campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = ((1+x)y^2 + \cos(x), \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y))$$

a lo largo de la curva parametrizada por la ecuación

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{t}{2}\right)(\cos(t),)\sin(t)),\ 0 \le t \le 2\pi$$

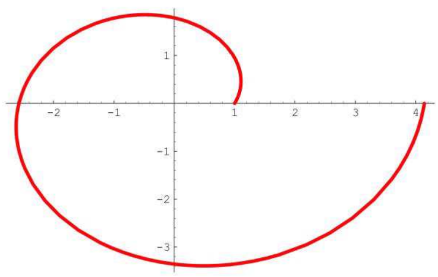


Figura ej. 18

19. **(JUNIO 2013)** Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el recinto limitado por la circunferencia unidad y la parábola $y = 2\sqrt{3}x^2$ (Figura siguiente). Calcular la integral

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot dr$$

donde

$$\vec{F}(x,y) = (-(x-\pi)y^2 + \cos(x^2), \log(1+y^2))$$

y γ es la frontera de recinto D (recorrida en sentido positivo).

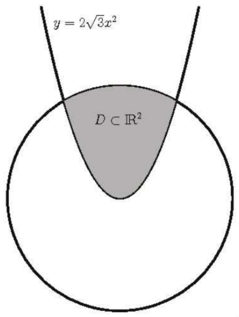


Figura ej. 19

20. **(SEPTIEMBRE 2013)** Calcular la integral del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + \sin^2(\pi x^2 + 1), z + \cos(y^2), y + \log(1 + x^2))$$

a lo largo de la curva obtenida al intersectar el paraboloide de sección elíptica

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = z\right\}$$

con el plano $z = \pi$ (Figura siguiente). Justificar el procedimiento utilizado.

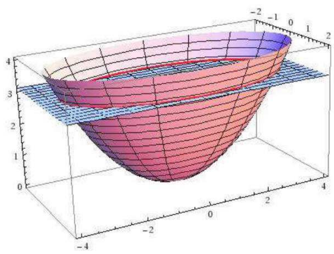


Figura ej. 20

(Nota: Mejor hacerlo por el Teorema de Stokes - ver tema siguiente).