**Ejercicios Tema 9**: **EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS**

(incluye ejercicios exámenes curso pasado)

**1.** Hallar los puntos singulares y determinar su carácter:

$a)\ \frac{1-\cos z}{z^2} \qquad b)\ \exp\left(\frac{1}{z}\right) \qquad c)\ \frac{\sin z}{z^2} \qquad d)\ \frac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$

**2.** En cada caso escribir la parte principal de la función en su punto aislado y determinar el carácter de tal punto:

$a)\ z\exp\left(\frac{1}{z}\right) \qquad b)\ \frac{z^2}{1+z} \qquad c)\ \frac{\sin z}{z}$

$d)\ \frac{\cos z}{z} \qquad e)\ \frac{1}{(2-z)^3}$

**3.** Probar que el punto singular de cada una de estas funciones es un polo. Determinar el orden del polo y calcular su correspondiente residuo $B$ :

$a)\ \frac{1-Chz}{z^3} \qquad b)\ \frac{1-e^{2z}}{z^4} \qquad c)\ \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

$d)\ \frac{z^2+2}{z-1} \qquad e)\ \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3 \qquad f)\ Thz$

$g)\ \frac{e^z}{z^2+\pi^2} \qquad h)\ \frac{z}{\cos z} \qquad i)\ \frac{z^{1/4}}{z+1};\ (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi)$

**4.** Hallar el residuo en $z = 0$ de:

$a)\ \frac{1}{z+z^2} \qquad b)\ z\cos\frac{1}{z} \qquad c)\ \frac{z-\sin z}{z}$

$d)\ \frac{\cot z}{z^4} \qquad e)\ \frac{Shz}{z^4\left(1-z^2\right)}$

**5.** Hallar los residuos de las siguientes funciones en sus puntos sigulares:

$a)\ \frac{e^z}{z^3(z-1)} \qquad b)\ \cos\frac{1}{z} + z^3 \qquad c)\ z^2\sin\frac{1}{z} \qquad d)\ \frac{e^{\pi z}}{z-i}$

**6.** Calcular, usando residuos, las integrales de las funciones siguientes sobre el círculo $|z| = 3$, positivamente orientado:

$a)\ \frac{e^{-z}}{z^2} \qquad b)\ z^2\exp\left(\frac{1}{z}\right) \qquad c)\ \frac{z+1}{z^2-2z}$

**7.** Calcular la integral de las siguientes funciones a lo largo de $|z| = 2,$ positivamente orientado:

$a)\ \frac{z^5}{1-z^3} \qquad b)\ \frac{1}{1+z^2} \qquad c)\ \frac{1}{z}$

$d)\ \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)} \qquad e)\ \frac{z^3(1-3z)}{(1+z)\left(1+2z^4\right)} \qquad f)\ \frac{z\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{1+z^3}$

**8.** Calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}dz \qquad b)\ \int_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin^3 z \cos z}dz$$

$$c)\ \int_{|z|=1} z^3 \sin\frac{1}{z}\,dz \qquad d)\ \int_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz$$

**9.** Calcular $\int_\gamma \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$ siendo $\gamma$ el círculo:

$$a)\ |z+2| = 2 \qquad b)\ |z-2| = 2 \qquad c)\ |z| = 4$$

**10.** Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z^3(z+4)}$ siendo $\gamma$ el círculo:

$$a)\ |z| = 2 \qquad b)\ |z+2| = 3$$

**11.** Sea $\gamma$ el círculo $|z| = 2$ positivamente orientado. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo $f$ :

$$a)\ \tan z \qquad b)\ \frac{1}{Shz} \qquad c)\ \frac{Ch\pi z}{z(z^2+1)}$$

**12.** Calcular

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} \qquad b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} \qquad c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \qquad e)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} \qquad f)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$g)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} \qquad h)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \qquad i)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$$

**13.** Calcular

$$a)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\sin x} \qquad b)\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+4\sin x}$$

$$c)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-4\cos 2x}dx \qquad d)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x};\ (|a| < 1)$$

$$e)\ \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{1-2a\cos x+a^2};(|a| < 1) \qquad f)\ \int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2};\ (a > 1)$$

**14.** **(FEBRERO 2012)** Sea $\gamma(t) = \alpha e^{it},\ t \in [0,2\pi],$ la circunferencia de radio $\alpha > 0$ centrada en el origen. Discute en función de los valores de $\alpha > 0$ el valor de las integrales a lo largo de $\gamma$ de las funciones

$$\text{(4.a) } f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)(z-2+\mathbf{i})} \qquad \text{(4.b) } f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+1)}$$

**15.** **(JUNIO 2012)** Sea $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia unidad. Discutir en función de los valores de $a > 0$ el resultado de la integral

$$\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+a^2)} dz$$

**16.** **(SEPTIEMBRE 2012)** Discute en función del radio $\beta > 0$ los distintos valores de la integral

$$\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z^2+1)(4z^2-10z+4)} dz$$

siendo $\gamma(t) = \mathbf{i} + \beta e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia de centro $\mathbf{i}$ y radio $\beta$.

**17.** **(FEBRERO 2013)** Dada la función

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(z+\mathbf{i})}$$

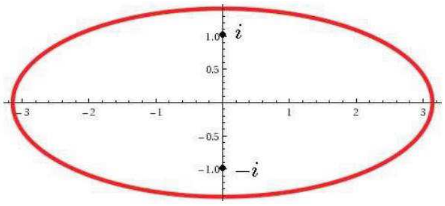
indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

**17.b** Se verifica la identidad

$$\int_\gamma f(w)dw = 2\pi\mathbf{i}$$

donde $\gamma$ es la elipse de ecuación (Figura siguiente)

$$\gamma(t) = \pi\cos(t) + \mathbf{i}\sqrt{2}\sin(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$




**18.** **(FEBRERO 2013)** Sea el conjunto

$$D_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} :\ |z| < \alpha,\ \operatorname{Im}(z) > 0\right\}$$

con $\alpha > 0$. Discutir en función del parámetro $\alpha > 0$ el valor de la integral

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(w^2)}{w(w-\mathbf{i})(w^2-2)} dw$$

donde $\partial D_\alpha^+$ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente.

**19.** **(JUNIO 2013)** Sea el conjunto

$$D_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C} :\ |z| < \alpha,\ \frac{1}{2} + \operatorname{Im}(z) > 0\right\}$$

con $\alpha > 0$. Discutir en función del parámetro $\alpha > 0$ el valor de la integral

$$\int_{\partial D_\alpha^+} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)} dz$$

donde $\partial D_\alpha^+$ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente.

**20. (SEPTIEMBRE 2013)** Sea la región circular

$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < \alpha \right\}$$

con $\alpha > 0$. Discutir en función del parámetro $\alpha > 0$ el valor de la integral

$$\int_{\partial D_\alpha^+} f(z)\, dz$$

donde $\partial D_\alpha^+$ denota la frontera del recinto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ orientada positivamente y $f$ es la función dada por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z^2)}{z(z-1)^2(z^2+1)}, \text{ si } |z| < 2 \\ \mathrm{Im}(z) + 2\mathbf{i}\,\mathrm{Re}(z), \text{ si } |z| \geq 2 \end{cases}$$

## SOLUCIONES:

(1a) $z = 0$ p.s. evitable; (1b) $z = 0$ p.s. esencial; (1c) $z = 0$ polo simple; (1d) $z = 0$ polo de 4º orden, $z = -1$ polo simple.

(2a) (2b) (2c) (2d) (2e)

(3a) $n = 1,\ B = -\frac{1}{2}$; (3b) $n = 3,\ B = -\frac{4}{3}$; (3c) $n = 2,\ B = 2e^2$; (3d) $n = 1,\ B = 3$; (3e) $n = 3,\ B = -\frac{3}{16}$; (3f) $n = 1,\ B = 1$; (3g) ; (3i) $n = 1,\ B = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(4a) 1; (4b) $-\frac{1}{2}$; (4c) 0; (4d) $-\frac{1}{45}$; (4e) $\frac{7}{6}$.

(5a) $\mathrm{Res} f(0) = -\frac{5}{2}$; $\mathrm{Res} f(1) = e$; (5b) $\mathrm{Res} f(0) = 0$; (5c) $\mathrm{Res} f(0) = -\frac{1}{6}$; (5d) $\mathrm{Res} f(i) = -1$; (6a) $-2\pi i$; (6b) $\frac{\pi i}{3}$; (6c) $2\pi i$; (7a) $-2\pi i$; (7b) 0; (7c) $2\pi i$; (7d) $9\pi i$; (7e) $-3\pi i$; (7f) $2\pi i$; (8a) $(1-\frac{2}{e})\pi i$; (8b) $2\pi i$; (8c) 0; (8d) $2\pi i \frac{e^2}{3}$; (9a) 0; (9b) $\pi i$; (9c) $6\pi i$; (10a) $\frac{\pi i}{32}$; (10b) 0; (11a) $-4\pi i$; (11b) $-\pi i$; (11c) $4\pi i$; (12a) $\frac{3\pi}{8}$; (12b) $\frac{2\pi}{3}$; (12c) $\frac{\pi}{2}$; (12d) $\frac{\pi}{2}$; (12e) $\frac{\pi}{4}$; (12f) $\frac{\pi}{6}$; (12g) $\frac{\pi}{200}$; (12h) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (12i) $\frac{\pi}{6}$; (13a) $\frac{2\pi}{3}$; (13b) $\pi\sqrt{2}$; (13c) $\frac{3\pi}{8}$; (13d) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$; (13e) $\frac{a^2\pi}{1-a^2}$; (13f) $\frac{a\pi}{\left(\sqrt{a^2-1}\right)^3}$.