Ejercicios Tema 8: **SERIES DE POTENCIAS COMPLEJAS**

(incluye ejercicios exámenes curso pasado)

1. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$

$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi i}{n} z^n \qquad i)\ \sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n$

2. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor y hallar el radio de convergencia de la serie obtenida:

a. $f(z) = \sin(2z+1)$ según potencias de $z+1$.

b. $f(z) = \cos z$ según potencias de $z + \frac{\pi}{4}$.

c. $f(z) = \frac{1}{3z+1}$ según potencias de $z+2$.

d. $f(z) = \frac{z}{z^2+i}$ según potencias de z.

e. $f(z) = \sin^2 \frac{z}{2}$ según potencias de z.

3. Hallar los ceros de las siguientes funciones y determinar sus órdenes:

$a)\ z^4 + 4z^2 \qquad b)\ \frac{\sin z}{z} \qquad c)\ z^2 \sin z \qquad d)\ 1 + Chz$

4. Determinar la región de convergencia de las siguientes series:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(iz)^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$

$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n} \qquad d)\ \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

5. Desarrollar en serie de Laurent en un entorno de $z = 0$:

$a)\ \frac{\sin z}{z^2} \qquad b)\ \frac{e^z}{z^3} \qquad c)\ z^4 \cos\frac{1}{z} \qquad d)\ \frac{1-e^{-z}}{z^3}$

6. Desarrollar en serie de Laurent en un entorno de $z = 0$ la función $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$.

7. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Laurent en la región considerada:

$a)\ \frac{1}{z^2+z}$ en $0 < |z| < 1 \qquad b)\ \frac{1}{z^2+z}$ en $1 < |z| < \infty$

$c)\ \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$ en $1 < |z| < 2 \qquad d)\ \frac{1}{(z^2-4)^2}$ en $4 < |z+2| < \infty$

8. Representar $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ por:

a. Su serie de McLaurin, describiendo la región de validez de tal representación.

b. Su serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

9. (FEBRERO 2012) Dada la función

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z^2+2z+5)}$$

a. Encuentra y clasifica sus singularidades.

b. Escribe la serie de Laurent de g alrededor de $z_0 = 0$. ¿Cuál es el disco de convergencia? ¿Y el residuo de g en $z_0 = 0$?

10. (JUNIO 2012) Calcula la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-\mathbf{i})}$$

alrededor de los puntos $z_0 = 0,\ \mathbf{i},\ 1+\mathbf{i}.$ Indica que clase de singularidad se tiene en cada punto.

11. (SEPTIEMBRE 2012) Sea la función

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z+\mathbf{i})}$$

indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

a. Existe una sucesión de números complejos (a_n) de forma que

$$f(z) = -\mathbf{i} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1$$

12. (FEBRERO 2013) Dada la función

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(z+\mathbf{i})}$$

indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

12.a Existe una sucesión de números complejos (a_n) de forma que

$$f(z) = \frac{(1-\mathbf{i})\sin(1)}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n (z-1)^n, \qquad |z-1| < 1$$

13. (JUNIO 2013) Dada la función

$$f(x+y\mathbf{i}) = y\sin(x) + \frac{y^2}{2}\mathbf{i}$$

y el número complejo $z_0 = 2\pi + i$, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

13.a La función f es derivable en z_0.

13.b Existe una sucesión de números complejos (a_n) de forma que

$$f(z) = \frac{\mathbf{i}}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad |z-z_0| < 1$$

14. **(JUNIO 2013)** Resolver los siguientes apartados:

14.a. Calcular el conjunto de los logaritmos del número complejo $1+2i$, es decir resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$e^z = 1 + 2\mathbf{i}$$

14.b. Sea la función

$$g(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Calcular su desarrollo alrededor del punto $z = 0$ ¿Cual es el radio de convergencia de dicha serie? ¿Tiene alguna singularidad aislada? ¿De qué tipo?

15. **(SEPTIEMBRE 2013)** Dada la función

$$f(x + y\mathbf{i}) = y\sin(x) + \frac{y^2}{2}\mathbf{i}$$

y el número complejo $z_0 = 2\pi + i$, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta:

15.a La función f es derivable en z_0.

15.b Existe una sucesión de números complejos (a_n) de forma que

$$f(z) = \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1$$

16. **(SEPTIEMBRE 2013)** Sea la función

$$g(z) = \frac{z}{(z^2+\mathbf{i})(z+1)}$$

Calcular su desarrollo en serie de potencias alrededor del punto $z = 0$ ¿Cual es el radio de convergencia de dicha serie? ¿Tiene alguna singularidad? En caso afirmativo, ¿de qué tipo?. ¿Qué vale el residuo?

SOLUCIONES:

(1a) e; (1b) 2; (1c) ∞; (1d) 3; (1e) 1; (1f) 1; (1g) ∞; (1h) 1; (1i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2a) $f(z) = -\sin 1 + 2(z+1)\cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2\sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3\cos 1 - \ldots$ y $R = \infty$.

(2b) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(z+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots\right]$ y $R = \infty$.

(2c) $f(z) = -\frac{1}{5}\left[1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \ldots\right]$ y $R = \frac{5}{3}$.

(2d) $f(z) = -iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \ldots$ y $R = 1$.

(2e) $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots\right)$ y $R = \infty$.

(3a) $z_1 = 0$ de 2º orden; $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$ ambos simples.

(3b) $z_n = \pi n$ $(n = \pm1, \pm2, \ldots)$ todos simples.

(3c) $z = 0$ de 3^{er} orden; $z_n = \pi n$ $(n = \pm1, \pm2, \ldots)$ todos simples.

(3d) $z_n = (2n+1)\pi i$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ todos de 2º orden.

(4a) $|z| > e$; (4b) $2 < |z| < 4$; (4c) $1 < |z| < 2$; (4d) $0 < |z| < 1$.

(5a) $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots$

(5b) $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots$
(5c) $z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \ldots$
(5d) $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} - \frac{z}{4!} + \ldots$
(6) En $|z| < 1 : f(z) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 - \ldots$
En $1 < |z| < 2 : f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$
En $|z| > 2 : f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \ldots$
(7a) $\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$; (7b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$; (7c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$;
(7d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$
(8a) $1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ en $|z| < 1$; (8b) $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$.