Ejercicios Tema 7: **INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO**

(incluye ejercicios examenes curso pasado)

Dados los contornos γ y las funciones f de los ejercicios 1 a 5, usar representaciones paramétricas para γ a fín de calcular $\int_\gamma f(z)dz$:

1. $f(z) = \frac{z+2}{z}$, siendo γ :

- **a.** El semicírculo $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$. (Solución: $-4+2\pi i$).
- **b.** El semicírculo $z = 2e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$. (Solución: $4+2\pi i$).
- **c.** El círculo $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. (Solución: $4\pi i$).

2. $f(z) = z-1$, siendo γ :

- **a.** El semicírculo $z = 1+e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$. (Solución: 0).
- **b.** El segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real. (Solución: 0).

3. $f(z) = \pi\exp(\pi\bar{z})$, siendo γ el contorno del cuadrado con vértices en los puntos $0, 1, 1+i, i$, orientado en sentido positivo. (Solución: $4(e^{\pi}-1)$).

4. γ es el arco desde $z_1 = -1-i$ hasta $z_2 = 1+i$ a lo largo de $y = x^3$, siendo
$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < 0 \\ 4y & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$ (Solución: $2+3i$).

5. $f(z) = 1$ y γ un contorno arbitrario desde el punto z_1 al punto z_2. (Solución: $z_2 - z_1$).

6. Calcular $\int_\gamma \bar{z}dz$ siendo γ la ecuación dada por $z = \sqrt{4-y^2} + iy$ con $-2 \leq y \leq 2$. (Solución: $4\pi i$).

7. Probar que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una camino regular a trozos, L representa la longitud de γ y $M = \max|f|$ en $\gamma([a,b])$, entonces $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML$. Usar este resultado para resolver:

- **a.** Sea γ el círculo $|z| = 2$ que va desde $z_1 = 2$ a $z_2 = 2i$. Sin calcular la integral, probar que
$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}\right| \leq \frac{\pi}{3}$$
- **b.** Probar que si γ es el contorno del triángulo con vértices $0, 3i, -4$, con orientación positiva, entonces
$$\left|\int_\gamma (e^z - \bar{z})dz\right| \leq 60$$

8. Calcular las siguientes integrales, siendo el camino cualquier contorno arbitrario entre los límites de integración:
$$a)\ \int_i^{i/2} e^{\pi z}dz;\ b)\ \int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz;\ c)\ \int_1^3 (z-2)^3 dz$$
(Solución: (a) $\frac{1+i}{\pi}$; (b) $e+1/e$; (c) 0).

9. Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para probar que $\int_\gamma f(z)dz = 0$, siendo γ el círculo $|z| = 1$, con cualquier orientación, y cuando:

$a)\ f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ $\qquad b)\ f(z) = ze^{-z}$ $\qquad c)\ f(z) = (z^2+2z+2)^{-1}$

$d)\ f(z) = \frac{1}{Chz}$ $\qquad e)\ f(z) = \tan z$ $\qquad f)\ f(z) = \log(z+2)$

10. Sea B el contorno del dominio entre $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados están en las rectas

$x = \pm 1,\ y = \pm 1.$ Suponiendo B orientado de forma que los puntos del dominio queden a la izquierda de $B,$ justificar por qué $\int_B f(z)dz = 0,$ siendo:

$$a)\ f(z) = \frac{1}{3z^2+1};\ b)\ f(z) = \frac{z+2}{\sin\frac{z}{2}};\ c)\ f(z) = \frac{z}{1-e^z}$$

11. Sea γ el contorno del cuadrado de lados $x = \pm 2,\ y = \pm 2$ recorrido en sentido positivo. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ siendo:

$$a)\ f(z) = \frac{e^{-z}}{z-\frac{\pi i}{2}};\qquad b)\ f(z) = \frac{\cos z}{z\left(z^2+8\right)};\qquad c)\ f(z) = \frac{z}{2z+1}$$

$$d)\ f(z) = \frac{\tan\frac{z}{2}}{(z-x_0)^2}\qquad (-2 < x_0 < 2);\qquad e)\ f(z) = \frac{Chz}{z^4}$$

(Solución: (a) 2π; (b) $\frac{\pi i}{4}$; (c) $-\frac{\pi i}{2}$; (d) $\pi i \sec^2\frac{x_0}{2}$; (e) 0).

12. Hallar $\int_\gamma f(z)dz$ siendo γ el círculo $|z-i| = 2$, en sentido positivo, y:

$$a)\ f(z) = \frac{1}{z^2+4};\ b)\ f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2};\ (\text{Solución: (a) } \frac{\pi}{2};\ \text{(b) } \frac{\pi}{16})$$

13. Sea γ el círculo $|z| = 3$, en sentido positivo. Probar que si $g(w) = \int_\gamma \frac{2z^2-z-2}{z-w}dz$ $(|w| \neq 3)$, entonces $g(2) = 8\pi i.$ ¿Cual es el valor de $g(w)$ si $|w| > 3$?.

14. Sea γ el círculo unidad $z = e^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi).$ Probar, en primer lugar, que para cualquier constante real $a,$ $\int_\gamma \frac{e^{az}}{z}dz = 2\pi i.$ A continuación expresar esta integral en términos de θ para probar que

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta = \pi$$

15. **(JUNIO 2012)** Sea $u : C \to R$ definida por $u(x+\mathbf{i}y) = xy.$ Se pide:

a. Determinar la función $v : C \to R$ de forma que

$$f(x+\mathbf{i}y) = u(x+\mathbf{i}y) + \mathbf{i}v(x+\mathbf{i}y)$$

sea holomorfa (derivable) en todo $\mathbb{C}$, con $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

b. Calcular el valor de la integral

$$\int_\sigma \frac{f(z)}{z-\frac{\mathbf{i}}{2}}dz$$

donde $\sigma(t) = e^{it},\ 0 < t < 2\pi,$ es la circunferencia unidad.

16. **(SEPTIEMBRE 2012)** Sea la función

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z+\mathbf{i})}$$

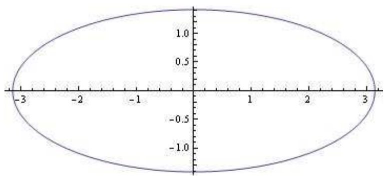
indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente la respuesta.

b. Se verifica la identidad

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi(e-e^{-1})\mathbf{i}$$

donde γ es la curva elíptica de ecuación

$$\gamma(t) = \pi\cos(t) + \mathbf{i}\sqrt{2}\,\sin(t),\qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$



17. **(SEPTIEMBRE 2012)** Sea la función

$$f(z) = |x+y| + \mathbf{i}(y-x)$$

a.

b. Calcula la integral de f a lo largo de la circunferencia unidad,

$$\int_{\sigma} f(z)dz$$

con $\sigma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.