Ejercicios Tema 6: **FUNCIONES ANALÍTICAS - hoja 2**

(incluye ejercicios de exámenes de los cursos anteriores)

1. **(FEBRERO 2012)** Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Se define la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de forma que $f(x + \mathbf{i}y) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$:

a. Comprobar que si f es holomorfa, entonces u es armónica, es decir, verifica la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0.$

b. Si $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3,$ hallar $v(x,y)$ de manera que f sea holomorfa, con $f(2 - \mathbf{i}) = -8i.$

2. **(JUNIO 2012)** Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x + \mathbf{i}y) = xy.$ Determinar la función $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de forma que

$$f(x + \mathbf{i}y) = u(x + \mathbf{i}y) + \mathbf{i}v(x + \mathbf{i}y)$$

sea holomorfa (derivable) en todo C, con $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

3. **(SEPTIEMBRE 2012)** Sea la función

$$f(z) = |x + y| + \mathbf{i}(y - x)$$

Determinar el conjunto de puntos del plano $\mathbb{C}$ en los que f es derivable**.**

4. **(FEBRERO 2013)** Resolver los siguientes apartados:

(4.a) Calcular el conjunto de los logaritmos del número complejo $-1 - i,$ es decir resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$e^z = -1 - \mathbf{i}$$

(4.b) ¿Para qué puntos del plano complejo es derivable la función $f(z)$ siguiente?

$$f(x + \mathbf{i}y) = y\sin(x) + \mathbf{i}y^2$$

¿Tiene alguna singularidad aislada?

5. **(JUNIO y SEPTIEMBRE 2013)** Dada la función

$$f(x + y\mathbf{i}) = y\sin(x) + \frac{y^2}{2}\mathbf{i}$$

y el número complejo $z_0 = 2\pi + i,$ indica si la función f es derivable en z_0.