Ejercicios Tema 4: **INTEGRAL DE SUPERFICIE**

(incluye ejercicios exámenes cursos anteriores)

1. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = (x,y,z)$ a través de la superficie total del cilindro $x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h.$ **(Solución =** $3\pi R^2 h$**)**
2. Por el teorema de Stokes, calcular la circulación del vector $\vec{\mathbf{F}} = (x^2y^3, 1, z)$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2 = R^2,\ z = 0,$ tomando la superficie esférica $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$. **(Solución =** $-\frac{\pi R^6}{6}$**)**
3. Calcular $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}} dS$, siendo $\vec{\mathbf{F}} = (x,y,z)$ y S una superficie cerrada arbitraria que determina un sólido $V.$ **(Solución =** $3Volumen(S)$**)**
4. Hallar el centro de gravedad de la superficie $x^2+y^2+z^2 = a^2$ contenida en el cono $z\tan\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. **(Solución =** $\left(0, 0, \frac{a}{2}(1+\cos\alpha)\right)$**)**
5. Hallar el flujo del rotacional de $\vec{\mathbf{F}} = (y,z,x)$ a través de la superficie $z = 2(1-x^2-y^2)$ interceptada por el plano $z = 0.$ **(Solución =** $-\pi$**)**
6. Hallar el centro de gravedad de la porción de superficie esférica homogénea $x^2+y^2+z^2 = a^2$, situada sobre el primer cuadrante del plano $= 0XY.$ **(Solución =** $x = y = z = \frac{a}{3}$**)**
7. Usar el teorema de Gauss para calcular la integral de superficie
$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS,$$
siendo S la superficie exterior total del cono $x^2+y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1.$ **(Solución =** $\frac{\pi}{2}$**)**
8. Dada la superficie cilíndrica $z = y^2$ delimitada por los planos $x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = a,$ comprobar que se cumple el teorema de Stokes, siendo $\vec{\mathbf{F}} = (\cos y + y\cos x, \sin x - x\sin y, -xyz).$ **(Solución =** $-\frac{2a^6}{5}$**)**

9. **(FEBRERO 2012)** Sea la superficie S definida por
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0\right\}$$
y sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y, yz^2, x^2z).$ Calcular la integral del rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la curva obtenida al intersectar la superficie S con el plano $z = 1.$ Justificar el procedimiento utilizado.

10. **(JUNIO 2012)** Sea S la porción del paraboloide $z = x^2+y^2$, situado en el primer octante y limitada por el plano $z = 1.$ Sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial dado por
$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$$
    a. Calcular $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$, siendo $\vec{\mathbf{n}}$ la normal interior al paraboloide.
    b. Calcular directamente $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{dr}$, siendo C la curva frontera de S.
    c. Comprobar el resultado anterior usando el teorema de Stokes.

11. (SEPTIEMBRE 2012) Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left((y-1)^2 + \sin^2(\pi x^2+1),\ z+\cos(y^2),\ y+\log(1+x^2)\right)$$

calcula el flujo saliente de su rotacional a través de la superficie

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2-z = 0,\ 0 < z < \pi\right\}$$

es decir la integral

$$\iint_{\mathcal{P}} rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dS$$

Justifica el procedimiento utilizado.

12. (FEBRERO 2013) Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}_r} - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}_\theta} + (r\sin(\theta)+\cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}_r}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

12.a Escribe el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ en coordenadas cartesianas.

12.b Determina el valor de la integral del campo vectorial $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ sobre el semielipsoide S (Figura siguiente) descrito por las ecuaciones

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1,\ y < 0\right\}$$

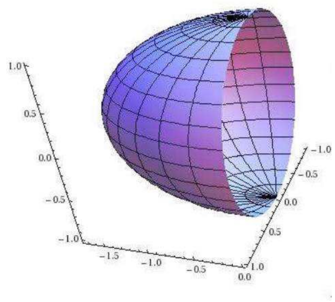


Figura ej. 12.b

13. (FEBRERO 2013) Sea la superficie A descrita mediante la parametrización

$$\Psi(\theta,\varphi) = ((2+\cos(\varphi))\cos(\theta), (2+\cos(\varphi))\sin(\theta), (2+\cos(\theta))\sin(\varphi))$$

con $0 < \theta < 2\pi,\ 0 < \varphi < 2\pi.$ Calcular la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{A}^+} (x+z)\vec{\mathbf{k}} \cdot dS$$

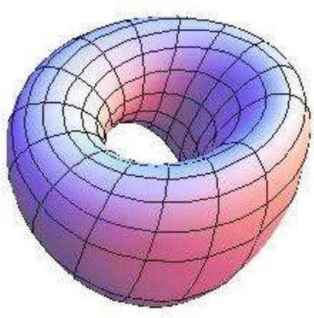


Figura ej. 13

14. **(JUNIO 2013)** Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

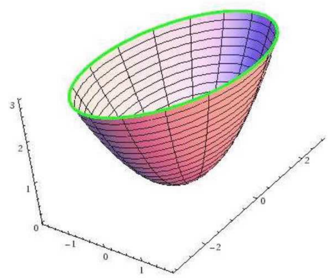
$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}_r} - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}_\theta} + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

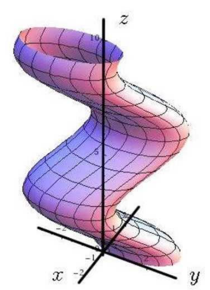
donde $\left\{\vec{\mathbf{e}_r}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

14.a Escribe el campo vectorial $div\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ en coordenadas cartesianas.

14.b Determina el valor de la integral del campo vectorial $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ a lo largo de la curva borde de la superficie S **(**Figura siguiente**)**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{3} = z,\ 0 < z < 3\right\}$$





Figuras ej. 14.b y ej. 15

15. **(JUNIO 2013)** Dada la superficie cilíndrica (Figura 15 anterior)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{(x-\cos(z))^2}{4} + (y-\cos(z))^2 = 1,\ 0 < z < 10\right\}$$

calcular el flujo de calor a través de la misma que genera el campo de temperaturas

$$T(x,y,z) = z\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a uno, es decir, calcular la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$

Justificar el procedimiento utilizado.

Ayuda: *Para describir una región cuya geometría se asemeja a un cilindro de sección elíptica con centro y semiejes variables con la altura pueden usarse coordenadas cilíndricas de la forma* (r,θ,z)*, que se relacionan con las cartesianas mediante las* *igualdades*

$$x = p(z) + a(z) r \cos(\theta); \qquad y = q(z) + b(z) r \sin(\theta); \qquad z = z$$

siendo $a(z)$, $b(z)$ *los semiejes de las secciones elípticas y* $(p(z), q(z))$ *las coordenadas del centro. El rango máximo de los valores que pueden tomar estas coordenadas es* $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. *El determinante jacobiano es en este caso de la forma* $J = a(z)b(z)r$.

16. **(SEPTIEMBRE 2013)** Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = (r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + z^2\sin(\theta))\vec{\mathbf{e}_r} - (r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) - z^2\cos(\theta))\vec{\mathbf{e}_\theta} + r\cos(z)\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}_r}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas:

16.a Escribe la expresión del campo rotacional $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ en coordenadas cartesianas.

16.b Determina el valor de la integral del $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ sobre la superficie S **(**Figura siguiente**)**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{2+\cos(\pi z)} = z,\ 0 < z < 4\right\}$$

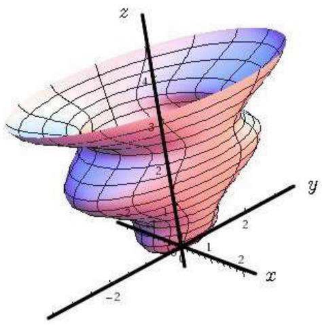


Figura ej. 16.b

17. **(SEPTIEMBRE 2013)** Calcular la integral del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + \sin^2(\pi x^2 + 1), z + \cos(y^2), y + \log(1 + x^2))$$

a lo largo de la curva obtenida al intersectar el paraboloide de sección elíptica

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = z\right\}$$

con el plano $z = \pi$ (Figura siguiente). Justificar el procedimiento utilizado.

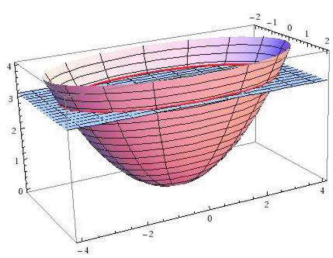


Figura ej. 17: Intersección de

18. **(SEPTIEMBRE 2013)** Dada la superficie (Figura siguiente)

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(2+x)^2} = 1\right\}$$

y el campo de temperaturas

$$T(x,y,z) = z\left(x^2 + (y-1)^2\right)$$

determinar:

18.a La temperatura de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitada por A mediante el cálculo de la integral de volumen

$$\iiint\limits_{\Omega} T(x,y,z)\; dxdydz$$

18.b El flujo de calor a través de la superficie A, suponiendo por simplicidad que la conductividad térmica es constante e igual a 1, es decir, se trata de calcular la integral de superficie

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} \nabla T \cdot dS$$

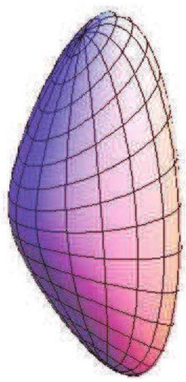


Figura ej. 18.b: $\mathcal{A}$