Ejercicios Tema 2: CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

(incluye ejercicios de exámenes hasta el curso 2012/2013)

1. Sea f un campo escalar y $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{G}}$ campos vectoriales. Probar que se verifican las siguientes relaciones (donde $< \vec{u}, \vec{v} >$ representa el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$):
   - **a.** $div(f \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}) = f \cdot div(\overrightarrow{\mathbf{F}}) + < \overrightarrow{\nabla f}, \overrightarrow{\mathbf{F}} >$
   - **b.** $div\left(\overrightarrow{\mathbf{F}} \times \overrightarrow{\mathbf{G}}\right) = < \overrightarrow{\mathbf{G}}, rot\left(\overrightarrow{\mathbf{F}}\right) > - < \overrightarrow{\mathbf{F}}, rot\left(\overrightarrow{\mathbf{G}}\right) >$
   - **c.** $rot(f \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}) = f \cdot rot\left(\overrightarrow{\mathbf{F}}\right) + \overrightarrow{\nabla f} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}$
2. Dado el campo vectorial $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (x\sin(y), -x)$, determina su expresión en coordenadas polares, es decir, encuentra F_r y F_θ tal que
$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(r,\theta) = F_r\overrightarrow{e_r} + F_\theta\overrightarrow{e_\theta}$$
3. Dado el campo vectorial $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (y - x, \sin(x^2 + y^2))$:
   - **a.** Encuentra su expresión en coordenadas polares.
   - **b.** Determina su gradiente y su divergencia en coordenadas cartesianas y polares.
4. Calcula la expresión en coordenadas cilíndricas del siguiente campo vectorial dado en cartesianas:
$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy, x^2 + y^2 + z, \cos(z))$$
5. Dado el campo escalar$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$:
   - **a.** Encuentra su expresión en coordenadas polares.
   - **b.** Calcula su gradiente y su laplaciano en coordenadas polares.
6. Determina la expresión en coordenadas cartesianas del siguiente campo dado en cilíndricas:
$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = (r+z)\overrightarrow{e_r} + r^2\cos(r)\overrightarrow{e_\theta} + r^3\cos(\theta)\overrightarrow{\mathbf{k}}$$
7. Dado un campo escalar $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, comprueba que el campo vectorial $\overrightarrow{\mathbf{F}} = u \cdot \overrightarrow{\nabla u}$ es irrotacional, es decir, que $rot(u \cdot \overrightarrow{\nabla u}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.
8. Un campo vectorial $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ se dice que es **incompresible** si su divergencia es idénticamente nula, es decir $div(\overrightarrow{\mathbf{F}}) = 0$. ¿Existe algún campo bidimensional $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ incompresible y de forma que $F_1(x,y) = xy$? Razona la respuesta.
9. Si $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ verificando $\Delta u = 0$ (donde $\Delta u \equiv \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz};$ esta clase de campos se denominan **armónicos**), comprueba que el campo vectorial gradiente asociado $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\nabla u}$ es irrotacional e incompresible.
10. Calcula la expresión en coordenadas cilíndricas de la divergencia del campo vectorial
$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = x^2y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin(x+z^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + rot\left(\overrightarrow{\mathbf{G}}\right)$$
siendo
$$\overrightarrow{\mathbf{G}}(x,y,z) = \sin(y+z^2)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x^2y - \pi z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(3x - 2yze^{x^2-1}\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}$$
11. Sea el campo vectorial
$$\overrightarrow{\mathbf{G}}(x,y,z) = x^2y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \nabla\phi(x,y,z)$$
con

$$\nabla\phi(x,y,z) = \cos(x + y\log(z+1)) - y^3 e^{xy} + \frac{x - \pi y}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}$$

Calcula la expresión en coordenadas cilíndricas del campo $rot\left(\vec{\mathbf{G}}\right)$.

12. Dado el campo escalar

$$f(x,y,z) = \log(1 + x^2 + y^2) + xz$$

calcula la expresión de su gradiente en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

13. Comprueba que si $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{G}}$ son dos campos irrotacionales, entonces $\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{G}}$ es incompresible.

14. **(FEBRERO 2012)** Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (e^x \sin(y) - y, e^x \cos(y) - x - 2)$$

, calcular su divergencia en coordenadas polares.

15. **(JUNIO 2012)** Dado el campo vectorial

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = xy\vec{\mathbf{i}} + (y + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}} + \nabla\Phi(x,y,z)$$

donde

$$\Phi(x,y,z) = \log(2 + x^2\cos(y - z)) + \sin\left(e^{x-y+z^2}\right) + \pi x\sqrt{y^2 + 4z^2}$$

calcular la expresión del rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ en coordenadas cilíndricas.

16. **(SEPT 2012)** Dado el campo vectorial escrito en polares

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta) = \cos(\theta)\vec{\mathbf{e}}_r + r\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}}_\theta$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta\right\}$ es la base de vectores móviles de R^2 asociada a dichas coordenadas:

- **a.** Escribe el campo vectorial en coordenadas cartesianas.
- **b.** ¿Es el campo $\vec{\mathbf{F}}$ conservativo? ¿Por qué?

17. **(FEBRERO 2013)** Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}}_r - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}}_\theta + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas, escribe el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ en coordenadas cartesianas.

18. **(JUNIO 2013)** Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\vec{\mathbf{e}}_r - r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{\mathbf{e}}_\theta + (r\sin(\theta) + \cos(z^2))\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas, escribe el campo escalar $div\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ en coordenadas cartesianas.

19. **(SEPTIEMBRE 2013)** Dado el campo vectorial escrito en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\mathbf{F}}(r,\theta,z) = (r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + z^2\sin(\theta))\vec{\mathbf{e}}_r - (r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) - z^2\cos(\theta))\vec{\mathbf{e}}_\theta + r\cos(z)\vec{\mathbf{k}}$$

donde $\left\{\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{k}}\right\}$ es la base de vectores móviles de $\mathbb{R}^3$ asociada a dichas coordenadas, escribe el campo vectorial $rot\left(\vec{\mathbf{F}}\right)$ en coordenadas cartesianas.