Ejercicios Tema 1: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

1. Calcular las siguientes integrales dobles:

a. $\iint_D xydxdy$, siendo $D = [0,1] \times [1,4]$.

b. $\iint_D ye^x dxdy$, siendo $D = [-1,1] \times [0,2]$.

c. $\iint_D y\cos x dxdy$, siendo $D = [0,\pi] \times [1,2]$.

d. $\iint_D y\arctan x dxdy$, siendo $D = [0,1] \times [0,1]$.

e. $\iint_D xdxdy$, siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

f. $\iint_D (x^2+y)dxdy$, siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

g. $\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\, dxdy$, siendo D el interior del triángulo de vértices $(0,0),\ (1,-1)$ y $(1,1)$.

h. $\iint_D xydxdy$, siendo D el interior del triángulo de vértices $(0,0),\ (1,1)$ y $(2,0)$.

i. $\iint_D \sqrt{4-y^2}\, dxdy$, siendo D el recinto limitado por las curvas $y^2 = 2x$ e $y^2 = 2x-8$.

j. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, siendo D el recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

k. $\iint_D e^{x/y} dxdy$, siendo D el recinto limitado por la curva $y^2 = x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$.

2. Calcular las siguientes integrales dobles mediante un cambio a coordenadas polares:

a. $\iint_D \exp(x^2+y^2)dxdy$, siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

b. $\iint_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\, dxdy$, siendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

c. $\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy$, siendo D el recinto comprendido entre las circunferencias $x^2+y^2 = 1$ y $x^2+y^2 = 4$.

d. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, siendo D la parte del círculo unidad que está en el primer cuadrante.

e. $\iint_D \exp(x^2+y^2)dxdy$, siendo D la parte del círculo unidad que está en el tercer y cuarto cuadrante.

3. Calcular, mediante integración doble, el área de los siguientes conjuntos :

a. El círculo de radio R.

b. El área encerrada por una elipse de semiejes a y b.

c. El área del triángulo de vértices $(0,0),\ (1,1)$ y $(2,0)$.

d. La región comprendida entre la recta $x+y = 5$ y la curva $xy = 6$.

4. Calcular las siguientes integrales triples:

a. $\iiint_V y\exp(x+z)dxdydz$ siendo $V = [0,2] \times [-1,1] \times [1,2]$.

b. $\iiint_V xyzdxdydz$ siendo $V = [1,2] \times [0,1] \times [0,1]$.

c. $\iiint_V xy\cos z dxdydz$ siendo $V = [0,1] \times [1,2] \times [0,\pi]$.

d. $\iiint_V zdxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$.

e. $\iiint_V y^2 dxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+z^2 \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\right\}$.

f. $\iiint_V (x+y+z^3)dxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$.

5. Calcular el volumen de los siguientes conjuntos mediante integración triple:

a. El volumen de una esfera de radio R.

b. El volumen de un cilindro de radio R y altura h.

c. El volumen de un cono de radio R y altura h.

6. Calcular las siguientes integrales triples mediante un adecuado cambio de variables:

a. $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y \leq 0\right\}$.

b. $\iiint_V \exp\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$.

c. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$.

d. $\iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$.

e. $\iiint_V ydxdydz$ siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ -1 \leq z \leq 1\right\}$.