Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Febrero. Curso 2013/2014
(10/02/2014)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1: Calcular

$$\int_{C_\alpha} \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{dr}$$

donde

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \left(x^2 + y^2,\ 3xy + \log(y^2+1)\right)$$

y C_α es la frontera de la región compacta

$$D = \left\{(x,y);\ 4x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$

recorrida en sentido positivo.

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular una integral de línea a lo largo de un camino cerrado. Puesto que se verifica que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y$$

la integral depende del camino de integración, y al ser éste cerrado, podemos resolverla mediante el teorema de Green:

$$\oint\{(x^2+y^2)dx + (3xy + \log(y^2+1))dy\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \iint_D (3y - 2y)dxdy = \iint_D ydxdy$$

Como el recinto de integración viene dado por la ecuación

$$4x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + (y-1)^2 = 1$$

resulta que se trata de una elipse centrada en $(0,1)$ y de semiejes $a = \frac{1}{2};\ b = 1$, por lo que haremos el cambio de variable

$$x = \frac{1}{2} r\cos\theta$$

$$y = 1 + r\sin\theta$$

siendo el jacobiano

$$J = \ldots = \frac{1}{2}r$$

Por tanto

$$\iint ydxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r\sin\theta)\frac{1}{2}rdr = \ldots = \frac{\pi}{2}$$

– –

PROBLEMA 2. Hallar el flujo del campo

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (yz^2, 3e^x z^2, z)$$

sobre la cara externa del cilindro $x^2+y^2 = R^2$ **comprendido entre los planos** $z = -3$ **y** $z = 3$**. Nota: El volumen de un cilindro de radio** R **es** $6\pi R^2$**.**

SOLUCIÓN:

Al ser un recinto abierto el cilindro $S_1 : x^2+y^2 = R^2$, y puesto que queremos aplicar el teorema de Gauss, lo cerraremos por 2 superficies elementales, como son el plano $S_2 : z = 3$ y el plano $S_{.3} : z = -3$. De esta forma tendremos que

$$\Phi_T = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3}$$

o lo que es lo mismo

$$\Phi_{S_1} = \Phi_T - \Phi_{S_2} - \Phi_{S_3}$$

de donde Φ_T lo calcularemos por Gauss y Φ_{S_2} y Φ_{S_3} lo haremos de forma directa:

$$\Phi_T = \iint_{S_T} \vec{\mathbf{F}} dS = \iiint_V div\left(\vec{\mathbf{F}}\right) dxdydz = \iiint_v (0+0+1) dxdydz = Vol(V) = 6\pi R^2$$

$$\Phi_{S_2} = \iint_{S_2} \vec{\mathbf{F}} dS = \iint_{S_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \iint_{D_1} 3dxdy = 3Area(D_1) = 3\pi R^2$$

puesto que $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$ (así $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = z = 3$) y $dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\, dxdy = dxdy$.

De forma análoga

$$\Phi_{S_3} = \iint_{S_3} \vec{\mathbf{F}} dS = \iint_{S_3} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS = \iint_{D_1} 3dxdy = 3Area(D_1) = 3\pi R^2$$

(lo único que cambia sobre S_2 es que ahora el vector normal es $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,-1)$, pero al ser ahora $z = -3$, se obtiene la misma integral doble).

Por lo tanto

$$\Phi_{S_1} = \Phi_T - \Phi_{S_2} - \Phi_{S_3} = 6\pi R^2 - 3\pi R^2 - 3\pi R^2 = 0$$

– –

PROBLEMA 3. Determinar la constante K **para que**

$$u(x,y) = x\sin(x)\cosh(y) - Ky\cos(x)\sinh(y)$$

sea armónica. Determinar su armónica conjugada.

SOLUCIÓN:

Para que $u(x,y)$ sea armónica ha de verificarse que $u_{xx}+u_{yy} = 0$. Entonces como

$$u_x = \sin x\cosh y + x\cos x\cosh y + Ky\sin x\sinh y$$

$$u_{xx} = 2\cos x\cosh y - x\sin x\cosh y + Ky\cos x\sinh y$$

$$u_y = x\sin x\sinh y - K\cos x\sinh y - Ky\cos x\cosh y$$

$$u_{yy} = x\sin x\cosh y - 2K\cos x\cosh y - Ky\cos x\sinh y$$

tendremos que

$$u_{xx}+u_{yy} = 0 \Leftrightarrow 2\cos x\cosh y - 2K\cos x\cosh y = 0 \Leftrightarrow K = 1$$

Para hallar la armómica conjugada, usaremos las ecuaciones de Cauchy - Riemann

$$u_x = v_y; \qquad u_y = -v_x$$

De la primera, tendremos

$$v_y = u_x = \sin x \cosh y + x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y$$

por lo que

$$v(x,y) = \int v_y dy = \int (\sin x \cosh y + x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y) dy =$$

$$= x \cos x \sinh y + y \sin x \cosh y + g(x)$$

(donde las dos primeras integrales son inmediatas y la tercera se realiza por partes). Para hallar $g(x)$ usaremos la segunda de las ec. de C-R: De $u_y = -v_x$, se tiene

$$x \sin x \sinh y - \cos x \sinh y - y \cos x \cosh y = -[\cos x \sinh y - x \sin x \sinh y + y \cos x \cosh y + g'(x)]$$

de donde

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = cte$$

Por tanto

$$v(x,y) = x \cos x \sinh y + y \sin x \cosh y + cte$$

– –

PROBLEMA 4. Determinar el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz$$

en los siguientes casos:

(a) γ **es la circunferencia de centro** 0 **y radio** $\frac{1}{4}$.

(b) γ **es la circunferencia de centro** 0 **y radio** 1.

(c) γ **es el rectángulo de vértices** $-i,\ -2-i,\ -2+i,\ i$.

(d) γ **es el rectángulo de vértices** $2+i,\ -2+i,\ -2-i, 2-i$.

SOLUCIÓN:

La función tiene por puntos singulares $\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$, siendo $z_1 = 1$ una singularidad evitable (ya que también anula al numerador), mientras que $z_2 = -\frac{1}{2}$ es un polo simple.

(a) Como ninguno de los puntos singulares es interior a la curva, por el teorema de Cauchy-Goursat se tiene que

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz = 0$$

(b) Como el punto $z_1 = 1$ está en el recorrido de la integral, ésta no está definida (al existir un punto en el recorrido donde la función no está definida).

(c) En la trayectoria del rectángulo, el único punto singular incluido es $z_2 = -\frac{1}{2}$, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1} dz = 2\pi i Res(f, -\frac{1}{2}) = -i\pi \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ya que

$$Res(f,-\frac{1}{2}) = \frac{P\left(-\frac{1}{2}\right)}{Q'\left(-\frac{1}{2}\right)} = \ldots = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{-3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(d) En este caso, ambos puntos singulares aislados están en el interior del rectángulo, por lo que

$$\int_\gamma \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{2z^2 - z - 1}dz = 2\pi i\left(Res(f,1) + Res(f,-\frac{1}{2})\right) = 2\pi i\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = -\pi i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

ya que, al ser $z_1 = 1$ una singularidad evitable,

$$Res(f,1) = 0$$

– –

PROBLEMA 5. Determinar la serie de Laurent de cada una de las funciones en los anillos que se indican. Indicar en cada una de ellas su parte regular y su parte singular:

(a) $f(z) = e^z + e^{1/z^2}$ en $|z| > 0$.

(b) $g(z) = \frac{1}{z(z+R)}$ en $0 < |z| < R$.

SOLUCIÓN:

(a) Sabemos que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

Por tanto, también será

$$e^{1/z^2} = e^{z^{-2}} = 1 + z^{-2} + \frac{\left(z^{-2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z^{-2}\right)^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z^{-2}\right)^n}{n!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$$

De esta forma

$$f(z) = e^z + e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z^{-2}\right)^n}{n!} =$$

$$= \left(2 + +z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \ldots\right)$$

siendo el primer paréntesis la parte regular y el segundo la parte singular (principal).

(b) En este caso vamos a descomponer en fracciones simples, puesto que se trata de expresar el cociente de polinomios en términos de z (en el anillo que nos dan). Se verifica

$$\frac{1}{z(z+R)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+R} = \ldots = \frac{1/R}{z} + \frac{-1/R}{z+R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+R}\right)$$

El primer sumando del paréntesis, ya está expresado en términos de z (y tiene sentido siempre que $z \neq 0$) mientras que el segundo podemos ponerlo como

$$\frac{1}{z+R} = \frac{1}{R}\frac{1}{1+z/R} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{z}{R}\right)^3 + \ldots\right)$$

(nos basamos en que $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$, siendo válido este desarrollo siempre que $|z| < 1$), y este desarrollo será válido siempre que $\left|\frac{z}{R}\right| < 1,$ es decir, siempre que $|z| < R$.

Por lo tanto

$$g(z) = \frac{1}{z(z+R)} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+R}\right) = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{z}{R}\right)^3 + \ldots\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{R}\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \left(\frac{z}{R}\right)^3 + \ldots\right)$$

siendo en este caso el primer paréntesis la parte principal (singular) y el segundo la parte regular. Además este desarrollo es válido en la región $0 < |z| < R$.