Asignatura: MATEMÁTICAS II
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. 2º Curso
Examen Final Febrero. Curso 2011/2012
(17/02/2012)

CUESTIONES TEÓRICAS.

1. **Dado el campo vectorial** $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (e^x \sin(y) - y, e^x \cos(y) - x - 2)$**, se pide:**
   - 1.a **Calcular su divergencia en coordenadas polares.**
   - 1.b **Calcular la integral de** $\vec{\mathbf{F}}$ **a lo largo de la espiral de ecuación**

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)(\cos(t), \sin(t)), \text{ con } 0 \le t \le 2\pi$$

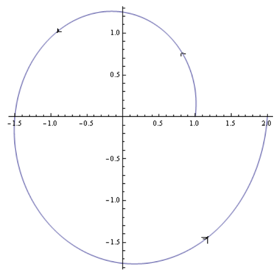

Figura 1: Curva γ

2. **Sean** $u, v : R^2 \to R$ **funciones de clase** C^1**. Se define la función** $f : C \to C$ **de forma que** $f(x + \mathbf{i}y) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$:
   - 2.a **Comprobar que si** f **es holomorfa, entonces** u **es armónica, es decir, verifica la ecuación** $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
   - 2.b **Si** $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + 3$, **hallar** $v(x,y)$ **de manera que** f **sea holomorfa, con** $f(2 - \mathbf{i}) = -8\mathbf{i}$**.**

SOLUCIÓN:

(1.a) Se tiene que $div\left(\vec{\mathbf{F}}\right) = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$, por lo que en coordenadas polares también será 0.

(1.b) Se trata de calcular $\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$, cosa que podemos hacer de forma directa usando la parametrización dada para la curva γ. Sin embargo, antes de hacerlo de esta forma, veamos si dicha integral de línea es independiente del camino de integración: Si tomamos $P(x,y) = e^x \sin(y) - y$; $Q(x,y) = e^x \cos(y) - x - 2$; como se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos(y) - 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, resulta que efectivamente es independiente del camino. Por tanto, en lugar de hacerlo de forma directa con las ecuaciones de γ tomaremos cualquier otro camino que una los puntos origen y extremo de nuestra curva, y que son $(1,0)$ y $(2,0)$, por ejemplo, la recta que une ambos puntos (es el eje X, y su parametrización sería $\delta(t) = (t,0)$ con $1 \le t \le 2$): Así

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int_\delta \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \int \{(e^x \sin(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - x - 2)dy\} = \ldots = \int_1^2 0dt = 0$$

NOTA: Este último apartado también podría haberse resuelto usando la función potencial, ya que la integral es independiente del camino. Si se hace de esta forma, resultará que la función potencial Φ viene dada (hacer las operaciones) por

$$\Phi(x,y) = e^x \sin(y) - xy - 2y + cte$$

por lo que

$$\int_\gamma \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \Phi(2,0) - \Phi(1,0) = 0$$

(2.a) Si f es holomorfa, significa que se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. De esta manera tendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Por tanto es evidente que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, por lo que u es función armónica.

(2.b) De nuevo por las ecuaciones de C-R tenemos que $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y - 1$. Así

$$v(x,y) = \int (2x + 2y - 1)dy = 2xy + y^2 - y + g(x)$$

Para hallar $g(x)$ usaremos la segunda de las ecuaciones de C-R: De $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ se llega a $2y + g'(x) = -(-2y + 2x)$, por lo que $g'(x) = -2x$ y $g(x) = -x^2 + cte$. Así se tiene que

$$v(x,y) = 2xy + y^2 - y - x^2 + cte$$

siendo por tanto

$$f(x + \mathbf{i}y) = (x^2 - y^2 + 2xy - x + 3) + \mathbf{i}(2xy + y^2 - y - x^2 + cte)$$

Solo tenemos que hallar la cte, para lo que usaremos que $f(2 - \mathbf{i}) = -8\mathbf{i}$: Como

$$-8\mathbf{i} = f(2 - \mathbf{i}) = \ldots = 0 + \mathbf{i}(-6 + cte)$$

resulta ser $cte = -2$.

PROBLEMA 1. Calcula la integral del campo vectorial

$$\overrightarrow{\mathbf{G}}(x,y) = ((1 + x)y^2, \pi x - \log(1 + y^2)\cos(y^4 + 3y))$$

a lo largo de la frontera del conjunto (Figura 2)

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 4, y + x > 0\right\}$$

orientada positivamente. Justifica el procedimiento que uses.

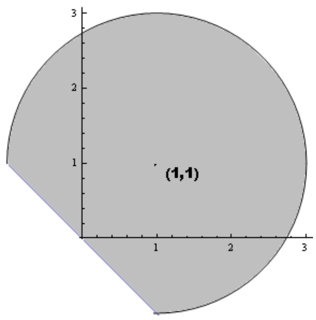

Figura 2: Conjunto D

SOLUCIÓN: Se trata de calcular la integral de línea

$$\oint_\gamma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$$

siendo γ la curva frontera de D. Esta integral de línea es dependiente del camino de integración, ya que si llamamos $P(x,y) = (1+x)y^2$ y $Q(x,y) = \pi x - \log(1+y^2)\cos(y^4+3y)$, se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Por tanto, esta integral tendremos que calcularla directamente (no lo haremos ya que el campo vectorial tiene funciones cuyas integrales son complicadas) o por el teorema de Green en el plano, como haremos a continuación: Entonces

$$\oint_\gamma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy$$

Primeramente vamos a efectuar un cambio de variables que nos traslade la figura D en una

similar D' pero centrada en el origen. Esto se consigue sin más que hacer $x' = x-1;\ y' = y-1$: Observemos que mediante este cambio, la circunferencia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ se transforma en $(x')^2 + (y')^2 = 4$, mientras que la recta $y + x = 0$ se convierte en la recta $x + y = -2$; y como el jacobiano de esta transformación vale 1 se tiene que

$$\iint_D (\pi - 2(1+x)y)dxdy = \iint_{D'} (\pi - 2(2+x')(y'+1))dx'dy'$$

. Si hacemos ahora un cambio a coordenadas polares $x' = r\cos(\theta),\ \ y' = r\sin(\theta)$ (Notemos que los dos cambios que efectuamos hasta el momento equivale directamente a aplicar desde el principio el cambio $x = 1 + r\cos(\theta),\ \ y = 1 + r\sin(\theta)$), la circunferencia tiene por ecuación $r = 2$, mientras que la recta será $r = \frac{-2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}$. Notemos que en D' se verifica que si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ entonces $0 < r < 2$, y si $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ entonces $0 < r < \frac{-2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}$. Por tanto

$$\iint_{D'} (\pi - 2(2+x')(y'+1))dx'dy' = \iint_{D'} (\pi - 2(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta))rdrd\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^2 (\pi - 2(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta))rdr +$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{-2}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} (\pi - 2(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta))rdr$$

La primera de estas integrales es sencilla de calcular:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^2 (\pi - 2(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta))rdr = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi - \frac{16}{3}\cos\theta - \frac{32}{3}\sin\theta - 4\sin 2\theta - 8\right)d\theta = 2\pi^2 - 16\pi$$

mientras que la segunda es mucho más complicada (por ser complicada la ecuación de una recta en coordenadas polares). Por tal motivo, en la parte de D' que corresponde a esta segunda integral (es decir, en la parte de la región D' que queda en el 4º cuadrante; en dicha región si $-2 < x' < 0$ entonces $-2 - x' < y' < 0$) resolveremos la integral en coordenadas cartesianas x', y', y su resultado se lo sumaremos al resultado obtenido en la última integral: Como

$$\iint_{\text{parte } D' \text{ en 4º cuadrante}} (\pi - 2(2+x')(y'+1))dx'dy' = \int_{-2}^{0} dx' \int_{-2-x'}^{0} (\pi - 2(2+x')(y'+1))dy' =$$

$$= \int_{-2}^{0} (12x + 6x'^2 + x'^3 + (-x'-2)(2x' - \pi + 4) + 8)dx' =$$

$$= 2\pi + \frac{56}{3}$$

Por tanto

$$\oint_\gamma \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = 2\pi^2 - 16\pi + 2\pi + \frac{56}{3}$$

PROBLEMA 2. Sea la superficie S definida por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\right\}$$

y sea $\vec{\mathbf{F}}$ el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y, yz^2, x^2z)$. Calcular la integral del rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la curva obtenida al intersectar la superficie S con el plano $z = 1$. Justificar el procedimiento utilizado.

SOLUCIÓN: Se trata de calcular la integral de linea dada por

$$\oint_\gamma \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \oint_\gamma \{-2yzdx - 2xzdy + dz\}$$

Esta integral se puede calcular directamente, o aplicando el teorema de Stokes (también se podría calcular usando el teorema de la divergencia, aunque en este caso, y al no ser S una superficie cerrada, habríamos de cerrarla por superficies elementales):

- Por el teorema de Stokes: Dicho teorema nos dice que

$$\oint_\gamma \{-2yzdx - 2xzdy + dz\} = \iint_{S'} \operatorname{rot}(-2yz, -2xz, 1) \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_S 0\, dS = 0$$

puesto que el vector normal a la superficie S' que tiene a γ por borde es $(0,0,1)$ (hemos tomado S' como la intersección de la semiesfera con el plano $z = 1$, que será la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ situada en el plano $z = 1$; así se tiene que $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$, por lo que $\operatorname{rot}(-2yz, -2xz, 1) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \ldots = (2x, -2y, 0) \cdot (0,0,1) = 0$).

- Directamente: Como una parametrización de dicha circunferencia viene dada por $\gamma(t) = \left(\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{3}\sin(t), 1\right)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, tendremos

$$\oint_\gamma \{-2yzdx - 2xzdy + dz\} = \int_0^{2\pi} \Big(-2\sqrt{3}\sin(t) \cdot 1 \cdot \left(-\sqrt{3}\sin(t)\right)dt -$$

$$-2\sqrt{3}\sin(t) \cdot 1^2 \cdot \left(\sqrt{3}\cos(t)\right)dt - \left(\sqrt{3}\cos(t)\right)^2 1 \cdot 0dt\Big) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (6\sin^2 t - 6\cos^2 t)dt = -6\int_0^{2\pi} \cos(2t)dt = -3[\sin(2t)]_0^{2\pi} = 0$$

PROBLEMA 3. Dada la función

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 2z + 5)}$$

3.a Encuentra y clasifica sus singularidades.

3.b Escribe la serie de Laurent de g alrededor de $z_0 = 0$. ¿Cuál es el disco de convergencia? ¿Y el residuo de g en $z_0 = 0$?

SOLUCIÓN:

(3.a) Las singularidades de g son los ceros del denominador (por lo tanto serán polos, ya que el numerador no se anula), que son $z_1 = 0$ (polo doble) y $z_{2,3} = -1 \pm 2\mathbf{i}$ (polos simples).

(3.b) Descompondremos g en fracciones simples como sigue

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 2z + 5)} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{A}{z + 1 - 2\mathbf{i}} + \frac{B}{z + 1 + 2\mathbf{i}}\right)$$

Operando se llega a que $A = \frac{1}{4\mathbf{i}}$ y $B = \frac{-1}{4\mathbf{i}}$, por lo que

$$g(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{z+1-2\mathbf{i}} - \frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{z+1+2\mathbf{i}} \right)$$

Como queremos expresar cada fracción en potencias de z, sólo tendremos que expresar en dichos términos cada una de las dos fracciones elementales anteriores, para lo que usaremos desarrollos conocidos (en este caso, usaremos el desarrollo de $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, que es convergente si $|z| < 1$):

$$\frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{z+1-2\mathbf{i}} = \frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{1-2\mathbf{i}}\frac{1}{1+\frac{z}{1-2\mathrm{i}}} = \frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{1-2\mathbf{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1-2\mathbf{i}}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z}{1-2\mathbf{i}}\right| < 1$, es decir si $|z| < |1-2\mathbf{i}| = \sqrt{5}$, mientras que

$$\frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{z+1+2\mathbf{i}} = \frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{1+2\mathbf{i}}\frac{1}{1+\frac{z}{1+2\mathrm{i}}} = \frac{\frac{1}{4\mathrm{i}}}{1+2\mathbf{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1+2\mathbf{i}}\right)^n$$

que será convergente si $\left|\frac{z}{1+2\mathbf{i}}\right| < 1$, es decir si $|z| < |1+2\mathbf{i}| = \sqrt{5}$. Así

$$g(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{\frac{1}{4\mathbf{i}}}{1-2\mathbf{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1-2\mathbf{i}}\right)^n - \frac{\frac{1}{4\mathbf{i}}}{1+2\mathbf{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1+2\mathbf{i}}\right)^n \right)$$

que será convergente si $0 < |z| < \sqrt{5}$.

Para calcular el residuo de g en $z_0 = 0$ hemos de calcular el coeficiente del término $\frac{1}{z}$ en el desarrollo anterior. Si realizamos las operaciones, resulta ser (solo nos quedaremos con los coeficientes de los términos de 1er grado en cada uno de los sumatorios)

$$Res(g,0) = \frac{\frac{1}{4\mathbf{i}}}{(1+2\mathbf{i})^2} - \frac{\frac{1}{4\mathbf{i}}}{(1-2\mathbf{i})^2} = -\frac{2}{25}$$

PROBLEMA 4. Sea $\gamma(t) = \alpha e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, la circunferencia de radio $\alpha > 0$ centrada en el origen. Discute en función de los valores de $\alpha > 0$ el valor de las integrales a lo largo de γ de las funciones

$$\text{(4.a) } f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)(z-2+\mathbf{i})} \qquad \text{(4.b) } f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z(z^2+1)}$$

SOLUCIÓN:

(4.a) La función tiene singularidades aisladas en los puntos $z_{1,2} = \pm\mathbf{i}$ y $z_3 = 2-\mathbf{i}$, siendo todas polos simples (son ceros simples del denominador y el numerador no se anula en ellos). Como γ es la circunferencia de radio $\alpha > 0$ centrada en el origen, resultará que si $\alpha < 1$ todas las singularidades están fuera de la región, mientras que si $1 < \alpha < \sqrt{5}$ sólo estarán incluidas $z_{1,2} = \pm\mathbf{i}$ y si $\alpha > \sqrt{5}$ estarán incluidas todas las singularidades. Aplicando entonces el teorema de los resíduos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ 2\pi\mathbf{i}(Res(f,\mathbf{i}) + Res(f,-\mathbf{i})) & \text{si } 1 < \alpha < \sqrt{5} \\ 2\pi\mathbf{i}(Res(f,\mathbf{i}) + Res(f,-\mathbf{i}) + Res(f,2-\mathbf{i})) & \text{si } \alpha > \sqrt{5} \end{cases}$$

donde, al ser

$$Res(f,\mathbf{i}) = \frac{p(\mathbf{i})}{q'(\mathbf{i})} = \frac{\mathbf{i}+1}{-4-4\mathbf{i}};\ Res(f,-\mathbf{i}) = \frac{p(-\mathbf{i})}{q'(-\mathbf{i})} = \frac{-\mathbf{i}+1}{4\mathbf{i}};\ Res(f,2-\mathbf{i}) = \frac{p(2-\mathbf{i})}{q'(2-\mathbf{i})} = \frac{3-\mathbf{i}}{4-4\mathbf{i}}$$

se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ \left(\frac{1}{2} - i\right)\pi & \text{si } 1 < \alpha < \sqrt{5} \\ 0 & \text{si } \alpha > \sqrt{5} \end{cases}$$

(4.b) La función tiene singularidades aisladas en los puntos $z_{1,2} = \pm\mathbf{i}$, siendo polos simples (son ceros simples del denominador y el numerador no se anula en ellos; por tal motivo el punto $z_0 = 0$ no es un polo, sino que es una singularidad evitable ya que anula el numerador). Como γ es la circunferencia de radio $\alpha > 0$ centrada en el origen, resultará que si $\alpha < 1$ todas las singularidades están fuera de la región, mientras que si $\alpha > 1$ estarán incluidas todas las singularidades. Aplicando entonces el teorema de los resíduos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ 2\pi\mathbf{i}(Res(f,\mathbf{i}) + Res(f,-\mathbf{i})) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

donde, al ser

$$Res(f,\mathbf{i}) = \frac{p(\mathbf{i})}{q'(\mathbf{i})} = \frac{\sin(1)}{2} \text{ y } Res(f,-\mathbf{i}) = \frac{p(-\mathbf{i})}{q'(-\mathbf{i})} = \frac{\sin(1)}{2}$$

se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ 2\pi\mathbf{i}\sin(1) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$