Profesor**: Roque Molina Legaz**

Tema 10: ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES: GENERALIDADES, CLASIFICACIÓN, ECUACIONES DE 1er ORDEN

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción: Origen de las EDP

Como extensión de lo visto para el caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (**edo**) en Matemáticas I, la génesis de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (**EDP**) incluye los siguientes tipos de problemas:

- **Problemas de tipo geométrico:** Se generan EDP al establecer propiedades de superficies relacionadas con el plano tangente, la recta normal o con magnitudes asociadas. Por ejemplo,
  - *Ecuación del plano tangente a la superficie* $z = z(x,y)$ *en el punto* (x_0,y_0)

$$(x-x_0)\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} = z - z(x_0,y_0)$$

  - *Ecuación de la recta normal a la superficie* $z = z(x,y)$ *en el punto* (x_0,y_0)

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{z-z(x_0,y_0)}{-1}$$

- **Problemas de tipo físico:** En diversos campos de la física y de la ingeniería existen modelos clásicos basados fundamentalmente en EDP de 2º orden. En general, éstos modelos suelen establecerse bajo hipótesis restrictivas simplificadoras. Ejemplos clásicos son:
  - *Ecuación unidimensional de onda:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(Esta ecuación describe el movimiento vibratorio, en función de la posición del punto x y del tiempo t, de una cuerda elástica sujeta por sus extremos en dos puntos del eje X bajo la acción de una fuerza F ($a^2 = \frac{F}{m}$)).

  - *Ecuación unidimensional de la transmisión del calor:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(Esta ecuación describe la temperatura $u(x,t)$ de una varilla delgada aislada en cualquier posición x y en cualquier tiempo t, siendo a una constante que depende del material de la varilla).

  - *Ecuaciones del telegrafista:*

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{RC}\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{1}{RC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

(Las soluciones de estos modelos, que coinciden matemáticamente con el de transmisión del calor, proporcionan en cada momento el valor del potencial $e(x,t)$ y de la intensidad de corriente $i(x,t)$ en un punto cualquiera de un largo conductor (línea de transmisión) al suponer despreciables la pérdidas por capacitancia y derivación a tierra).

- *Ecuación de Laplace:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(Fundamental en muchas aplicaciones de la ingeniería, la verifican las funciones armónicas. Entre otros fenómenos, describe la transmisión del calor en régimen estacionario y el potencial de un campo eléctrico en una región que no contine cargas).

- *Ecuación de la propagación luminosa:*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x,y,z)$$

(Rige la propagación de rayos luminosos en un medio no homogéneo de índice de refracción $n(x,y,z)$).

- *Otras aplicaciones:* Eliminación de constantes arbitrarias; Eliminación de funciones arbitrarias; etc.

Primeras definiciones.

Desde un punto de vista puramente matemático tiene sentido plantearse el problema de encontrar una función $u(x_1,\ldots,x_n)$ de n variables reales independientes cuando nos dan una ecuación en la que figure, al menos, una derivada parcial de cualquier orden de dicha función u. Por ejemplo, podemos plantearnos el problema de hallar una función de dos variables $u(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$$

Notemos que este caso es trivial, y es claro que toda función de la forma

$$u(x,y) = x^2 + xy + f(y)$$

siendo $f(y)$ una función arbitraria, satisface dicha ecuación.

Entonces:

Definition *A las relaciones expresadas por una igualdad en la cual figuran una o varias derivadas parciales de cualquier orden de una función desconocida con más de una variable independiente, las llamaremos* ***ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*** *o, más brevemente,* ***ecuaciones en derivadas parciales (EDP)****. En estas ecuaciones puede aparecer también la misma función desconocida u, así como otras funciones conocidas de las variables independientes. En definitiva, una EDP es una ecuación de la forma*

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

Example *Son EDP las siguientes:*

a) $3x \cdot z\frac{\partial z}{\partial x} - (x+y)\frac{\partial z}{\partial y} = yz^2$

b) $u_{xy} - u \cdot z \cdot u_z + (y - 3u)u_{zz} = u - x \cdot z$

c) $(3x+y)z_{xx}^2 - x \cdot z_y + z \cdot z_x = x+y$

d) $z_{xx} + z_{yy} = 0$

(Notemos que en (a), (c) y (d) la función desconocida es $z = z(x,y)$*, mientras que en (b) es* $u = u(x,y,z)$*)*

Definition *Se llama* ***orden*** *de una EDP al mayor de los órdenes de las derivadas de la función incógnita que aparece en dicha EDP.*

En el ejemplo anterior, (a) es de 1er orden, mientras que las demás son de 2º orden.

Definition *La EDP* (1) *es* ***lineal*** *si F es lineal en u y en sus derivadas parciales y si cada uno de los coeficientes de u,* $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots$ *es únicamente función de las variables independientes* $x_1, \ldots, x_n$*. En caso contrario se dirá que la EDP es* ***no lineal****.*

En los ejemplos anteriores solo (d) es lineal.

Definition *Una EDP no lineal, se dice* ***casilineal*** *si es lineal en las derivadas de orden mayor.*

Example *Para una EDP de 1er orden con 2 variables,*

a) Una expresión de la forma $P(x,y)u_x + Q(x,y)u_y + R(x,y)u = f(x,y)$ *es lineal.*

b) Una expresión de la forma $P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$ *es casilineal.*

Así pues, la forma general de una EDP lineal de 1er orden con una función $u(x_1,\ldots,x_n)$ es la siguiente

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c \cdot u = d$$

con $a_i = a_i(x_1,\ldots,x_n)$, $c = c(x_1,\ldots,x_n)$ y $d = d(x_1,\ldots,x_n)$, mientras que para una EDP lineal de 2º orden en n variables se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c \cdot u = d$$

con $a_{ij} = a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$, $b_i = b_i(x_1,\ldots,x_n)$, $c = c(x_1,\ldots,x_n)$ y $d = d(x_1,\ldots,x_n)$.

Las EDP suelen tener un número finito de soluciones. Veámoslo con un ejemplo:

Example *Dada la ecuación*

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos y - \frac{\partial z}{\partial y} + \cos^2 y + x \sin y = 0$$

la función

$$z(x,y) = (x + \sin y)^2 - x \cos y - 1$$

es una solución particular de la ecuación, como se comprueba trivialmente. Ahora bien, toda expresión de la forma

$$z(x,y) = f(x + \sin y) - x \cos y$$

también satisface la ecuación dada, cualquiera que sea la función f (siempre que sea derivable hasta el orden de la ecuación).

Remark *Así pues, mientras que en las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n (edo) la solución general contiene n constantes arbitrarias, en las EDP la solución general contendrá funciones arbitrarias:*

a) Si $u = u(x)$, la edo de 2º orden $u'' = 2$ tiene por solución general $u(x) = x^2 + ax + b$, siendo a y b constantes arbitrarias.

b) Si $u = u(x,y)$, la EDP de 2º orden $u'' = 2$ tiene por solución general $u(x,y) = x^2 + \Phi(y) \cdot x + \Psi(y)$, siendo $\Phi(y)$ y $\Psi(y)$ funciones arbitrarias.

Por tanto, para poder determinar la única función solución a un problema físico dado, habremos de imponer ciertas condiciones auxiliares. Estas condiciones auxiliares se agrupan en 2 categorías:

- **Condiciones de frontera:** Son las que deben satisfacer la función incógnita sobre la frontera de la región, a la que a partir de ahora representaremos por $\partial\Omega$ (siendo $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), en donde se plantea la EDP. Se han dado nombres especiales a tres tipos de condiciones frontera:
  - Condiciones de Dirichlet: $u \diagup_{\partial\Omega} = g$
  - Condición de Newman (o de flujo): $D_n u = g$, donde $D_n u$ representa la derivada de u respecto del vector n (y que coincide con $\nabla u \bullet n$).
  - Condición mixta (de Robin o de radiación): $\alpha \cdot u \diagup_{\partial\Omega} + \beta \cdot D_n u = g$, siendo g, α, β funciones definidas sobre $\partial\Omega$.
- **Condiciones iniciales:** Son las que deben satisfacerse a lo largo de Ω en el instante inicial. Una condición inicial típica conlleva algunas combinaciones de u y sus derivadas temporales.

Definition *Un problema de EDP se dice que está **correctamente planteado** si:*

a) Existe solución al problema.

b) La solución es única.

c) La solución depende continuamente de los datos.

*Si alguna de estas condiciones no se cumple, se dice que el problema está **incorrectamente planteado**.*

Remark *Las condiciones auxiliares que junto con la EDP comprenden un problema correctamente planteado no deben de ser muchas, o el problema no tendrá solución. Asímismo, no deben ser muy escasas, pues la solución no será única. Por último deben ser del tipo correcto, o la solución no dependerá continuamente de los datos.*

Ecuaciones casilineales de 1er orden.

Restringiéndonos al caso de 2 variables independientes x e y e indicando por z a la función ($z = z(x,y)$), sabemos que una ecuación casilineal de 1er orden es de la forma

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{2}$$

Definition *A toda solución particular $z = z(x,y)$ o $F(x,y,z) = 0$ de (2), se le llama **superficie integral** de (2).*

A partir de (2) consideraremos la ecuación

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

siendo u una función $u = u(x,y,z)$. A esta última ecuación se le llama **Forma de Jacobi** de (2).

Remark *Notemos que se verifica:*

a) Si $F(x,y,z) = 0$ es una solución particular de (2), también lo son todas las superficies del haz $F(x,y,z) = c$ (siendo c una constante arbitraria). Por la misma razón, si $F(x,y,z) = c$ es un haz integral de (2), la función $v = F(x,y,z)$ es solución de (3).

b) Si $F(x,y,z) = 0$ es una superficie integral de (2), entonces la función $v = F(x,y,z)$ es solución de (3).

c) Si $v = F(x,y,z)$ es solución de (3), entonces la función implícita z dada por $F(x,y,z) = 0$ es solución de (2).

d) Si $v = F(x,y,z)$ es solución de (3), las funciones implícitas dadas por $F(x,y,z) = c$ para cada valor de c, son soluciones particulares de (2).

Sistema característico. Solución general de la EDP casilineal de 1er orden.

Se demuestra que un método para hallar la solución general de la EDP casilineal de 1er orden

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{2}$$

donde supondremos que P, Q y R son $\mathcal{C}^{(1)}$ en $D \subset \mathbb{R}^3$ y que $|P| + |Q| \neq 0$ en todo punto de D, consiste en obtener dos integrales independientes $u_1(x,y,z) = c_1$, $u_2(x,y,z) = c_2$ del denominado **sistema característico** de (2), y que viene dado por

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{4}$$

(notemos que el sistema característico asociado a una EDP casilineal de 1er orden no son sino edo de 1er orden). Entonces, la solución general buscada viene dada por

$$F(u_1, u_2) = 0$$

siendo F una función arbitraria.

Remark *Todo lo anterior se puede generalizar a EDP casilineales con funciones de más de dos variables independientes. Así, si tenemos la ecuación*

$$P(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial z} = S(x,y,z,u)$$

el sistema característico será

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{S}$$

del cual, si es posible, obtendremos tres integrales independientes $u_1(x,y,z,u) = c_1$, $u_2(x,y,z,u) = c_2$, $u_3(x,y,z,u) = c_3$. Entonces la solución general de la ecuación dada será

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0$$

siendo F una función arbitraria.

Algunas formas de obtener integrales del sistema característico.

Notemos que una de las ecuaciones de (4) es, por ejemplo,

$$Q(x,y,z)dx - P(x,y,z)dy = 0$$

por lo que si P y Q dependiesen solamente de x e y, para integrar esta última expresión podríamos aplicar métodos conocidos de resolución de edo estudiados en Matemáticas I (podríamos, por ejemplo, ver si se trata de una edo en variables separadas, homogénea, exacta, etc).

Pero por regla general, tanto $P,\ Q$ como R dependerán de las 3 variables $x,\ y,\ z$. Entonces, el objetivo será transformar el sistema característico en otro que sí nos de lugar a edo fácilmente integrable.

A veces esto se conseguirá mediante equivalencias elementales

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{k_1 dx}{k_1 P} = \frac{k_2 dy}{k_2 Q} = \frac{k_3 dz}{k_3 R} = \frac{k_1 dx + k_2 dy}{k_1 P + k_2 Q} = \ldots = \frac{k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz}{k_1 P + k_2 Q + k_3 R}$$

eligiendo las k_i (que no sólo pueden ser constantes, sino también funciones) de forma que una, al menos, de las nuevas igualdades sea una edo fácilmente integrable.

Example *La EDP*

$$(y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + 2z^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^2 + 2y^2)$$

tiene por sistema característico

$$\frac{dx}{(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{(x^2 + 2z^2)} = \frac{dz}{3(x^2 + 2y^2)}$$

Si multiplicamos por 2 todos los términos de la 1ª fracción y la sumamos (numerador con numerador y denominador con denominador) con la 2ª obtendremos

$$\frac{2dx + dy}{x^2 + 2y^2}$$

fracción que es equivalente a cualquiera de las anteriores, así que si la igualamos con la 3ra fracción tendremos

$$\frac{2dx + dy}{x^2 + 2y^2} = \frac{dz}{3(x^2 + 2y^2)}$$

de donde

$$2dx + dy = \frac{1}{3}dz$$

cuya integración es inmediata

$$\frac{1}{3}z - 2x - y = c$$

que es un haz de superficies integrales de la EDP original.

Example *Si el sistema característico fuese*

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}$$

multiplicando por x la 1ª fracción (todos sus términos), por y los de la 2ª y por z los de la 3ª y sumando numeradores y denominadores, tendríamos

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

Para que esta expresión tenga sentido exigiremos que el numerador sea 0, por lo que tendremos la edo exacta

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

Remark *La forma de encontrar una integral vista en el ejemplo anterior va a ser aconsejable siempre que podamos elegir $k_1,\ k_2$ y k_3 no todos nulos, y tal que sea* *identicamente nulo el denominador de la fracción* $\frac{k_1 dx+k_2 dy+k_3 dz}{k_1 P+k_2 Q+k_3 R}$ *y siendo además el numerador una edo exacta.*

Example *Integrar la EDP*

$$x(z^2-2y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+y(2x^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial y}=z(y^2-x^2)$$

Solución: El sistema característico es

$$\frac{dx}{x(z^2-2y^2)}=\frac{dy}{y(2x^2-z^2)}=\frac{dz}{z(y^2-x^2)}$$

Vamos a hallar $k_1,\ k_2$ *y* k_3 *no todos nulos, y tal que*

$$k_1 x(z^2-2y^2)+k_2 y(2x^2-z^2)+k_3 z(y^2-x^2)=0$$

(y así también habrá de ser $k_1 dx+k_2 dy+k_3 dz=0$*). Notemos que la anterior expresión puede ordenarse de dos formas*

$$x^2(2k_2 y-k_3 z)+y^2(-2k_1 x+k_3 z)+z^2(-k_2 y+k_1 x)=0$$

o

$$xy(-2k_1 y+2k_2 x)+xz(k_1 z-k_3 x)+yz(-k_2 z+k_3 y)=0$$

De la primera de las expresiones, e igualando a cero cada uno de los paréntesis, obtenemos

$$k_1=\frac{k_3 z}{2x};\ k_2=\frac{k_3 z}{2y}$$

por lo que si tomamos $k_3=\frac{2}{z}$, *tendremos* $k_1=\frac{1}{x},\ k_2=\frac{1}{y}$ *y* $k_3=\frac{2}{z}$. *Así, de la ecuación*

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy+\frac{2}{z}dz=0$$

resulta ser

$$\log x+\log y+\log z^2=cte$$

o lo que es lo mismo

$$xyz^2=c$$

De igual forma, trabajando con la segunda de las expresiones anteriores, resulta un sistema que tiene por solución

$$k_1=\frac{k_3 x}{z};\ k_2=\frac{k_3 y}{z}$$

por lo que si tomamos $k_3=z$, *tendremos* $k_1=x,\ k_2=y,\ k_3=z$. *Así, de la ecuación*

$$xdx+ydy+zdz=0$$

resulta ser

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=cte$$

o lo que es lo mismo

$$x^2+y^2+z^2=c$$

Tomando ambas soluciones particulares, la solución general de la EDP casilineal vendrá dada por

$$F(xyz^2,x^2+y^2+z^2)=0$$

Veamos otros ejemplos:

Example *Hallar la solución general de la EDP casilienal*

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

Solución: Sólamente necesitamos hallar dos integrales independientes del sistema característico

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

De la segunda igualdad, se obtiene

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = 0 \Leftrightarrow \log z - \log y = cte \Leftrightarrow \frac{z}{y} = c_1$$

Como podemos observar, esta 1ra integral ha sido sencilla de obtener. Sin embargo, para obtener la 2ª necesitaremos trabajar con la primera fracción del sistema característico, con el inconveniente que en esta fracción aparece la variable z. Vamos entonces a transformar el sistema característico: si multiplicamos todo el sistema por 2x

$$\frac{2xdx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

y si multiplicamos (num. y denom.) de la 2ª fracción por 2y, los de la 3ª por 2z, sumamos numeradores y denominadores e igualamos la fracción resultante a cualquiera de las dos últimas, por ejemplo a la 3ª,

$$\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z}$$

Esta nueva ecuación es integrable (los numeradores de ambos miembros son las diferenciales de los respectivos denominadores), resultando ser

$$\log(x^2 + y^2 + z^2) - \log z = cte \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = c_2$$

y por tanto la solución general de la EDP dada es

$$F\left(\frac{z}{y}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0$$

Remark *En este último ejemplo hay otra forma de encontrar una 2ª integral particular para el sistema característico sin necesidad de usar multiplicadores, pero usando la 1ª integral obtenida $\frac{z}{y} = c_1$. Si despejamos z y sustituimos en la 1ª ecuación del sistema, tendremos*

$$\frac{dx}{x^2 - (c_1^2 + 1)y^2} = \frac{dy}{2xy} \Leftrightarrow 2xydx + ((c_1^2 + 1)y^2 - x^2)dy = 0$$

que se trata de una edo de 1er grado homogénea. Si resolvemos esta edo, resultará ser

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$$

Example *Integrar*

$$6yz\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -6y$$

Solución: En este caso el sistema característico es

$$\frac{dx}{6yz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-6y}$$

que tiene dos integrales inmediatas:

De la 1^a y 3^a fracción,

$$\frac{dx}{6yz} = \frac{dz}{-6y} \Leftrightarrow dx + zdz = 0 \Leftrightarrow x + \frac{z^2}{2} = c_1$$

mientras que de la 2^a y 3^a,

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz}{-6y} \Leftrightarrow 6ydy + dz = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + z = c_2$$

siendo por tanto la solución general la dada por

$$F\left(x + \frac{z^2}{2}, 3y^2 + z\right) = 0$$

Caso particular: La EDP lineal de 1er orden.

Para el caso de dos variables independientes, la EDP lineal de 1er orden completa tiene una expresión general de la forma

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = zR_1(x,y) + R_2(x,y)$$

donde vamos a suponer que todas las funciones P, Q, R_1 y R_2 son continuas y con derivadas continuas en un abierto. Para esta ecuación, el sistema característico viene dado por

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R_1 z + R_2}$$

que vamos a transformar en otro usando multiplicadores. Sin embargo, y para este sistema característico en particular, la 1^a ecuación es independiente de z, por lo que se puede encontrar una primera integral, que tendrá la forma $u_1(x,y) = c_1$. Si en esta integral particular fuese posible despejar alguna de las dos variables, supongamos por ejemplo que es posible despejar y, tendremos $y = v(x,c_1)$, por lo que podremos sustituir esta expresión en P, R_1 y R_2, de manera que la igualdad

$$\frac{dx}{P} = \frac{dz}{R_1 z + R_2}$$

adoptará la forma

$$\frac{dz}{dx} = \frac{zv_1(x,c_1) + v_2(x,c_1)}{v_3(x,c_1)}$$

ó lo que es lo mismo

$$z' + a(x,c_1)z = b(x,c_1)$$

que es una edo lineal de 1er orden que sabemos integrar. La integral es

$$z = e^{\int a(x,c_1)dx}\left[\int e^{\int a(x,c_1)dx} b(x,c_1)dx + c_2\right]$$

solución que puede ser escrita en la forma

$$z \bullet \varphi(x,c_1) + \psi(x,c_1) = c_2$$

y sustituyendo c_1 por su expresión ($c_1 = u_1(x,y)$), tendremos la 2da integral

$$z \bullet \alpha(x,y) + \beta(x,y) = c_2$$

Remark *En este desarrollo que acabamos de realizar, desde un punto de vista práctico, hemos partido de dos supuestos: que la 1^a ecuación del sistema característico es* *fácilmente integrable, y que podemos despejar x o y en la integral obtenida. En el caso que no se diese el primer supuesto, siempre podemos usar el procedimiento de los multiplicadores para llegar, si es que es posible, a ecuaciones fácilmente integrables.*

El problema de Cauchy para EDP casilineal.

Nos referiremos a una EDP casilineal con 2 variables independientes

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{2}$$

El llamado **Problema de Cauchy** es un problema de condiciones iniciales. Se trata de hallar una superficie integral de (2) que pase por una curva γ que puede venir dada por sus ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$.

Vamos a partir de las siguientes condiciones:

- En relación a la ecuación (2) : $P,\ Q$ y R son de clase $\mathcal{C}^{(1)}$ en $D \subset \mathbb{R}^3$. Además, P y Q no se anulan simultáneamente en ningún punto de D.
- En relación a la curva γ :
  - La curva γ está contenida en D.
  - La proyección de γ sobre el plano $0XY$ no tiene puntos dobles.
  - Las funciones $f,\ g$ y h son de clase $\mathcal{C}^{(1)}$ en un intervalo (t_1, t_2) de parámetro t.
  - $f'(t)$ y $g'(t)$ no se anulan simultáneamente en el mismo valor $t \in (t_1, t_2)$.
  - El determinante

$$\begin{vmatrix} f'(t) & g'(t) \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) \end{vmatrix} \neq 0,\ \forall t \in (t_1, t_2)$$

(En la segunda fila de este determinante, P y Q se expresan en función de t por medio de las ecuaciones paramétricas de γ.

Entonces:

Theorem *En las anteriores condiciones, se verifican:*

a) Existe una superficie integral de (2) que pasa por γ.

b) Dicha superficie es única.

Remark *Desde un punto de vista práctico, resolver el problema de Cauchy consiste en eliminar las variables $x,\ y, z,$ del sistema*

$$\begin{cases} u_1(x,y,z) = c_1 \\ u_2(x,y,z) = c_2 \\ \phi_1(x,y,z) = 0 \\ \phi_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

siendo $u_1,\ u_2$ las dos soluciones independientes del sistema característico de (2) y $\phi_1 = \phi_2 = 0$ son las ecuaciones de γ (que se han obtenido por la eliminación del parámetro t).

Example *Hallar la superficie integral de la ecuación*

$$x(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz^2$$

que pasa por la curva (en este caso es una recta) $3x - y = 0,\ z = 3$:

1º) Existe y es única la solución: Veamos que se cumplen las hipótesis del teorema anterior:

- $P = x(x+y)$, $Q = y^2$, $R = yz^2$ *son de clase* $\mathcal{C}^{(1)}$ *en todo* $\mathbb{R}^3$.
- *P y Q se anulan simultáneamente sólo si* $x = y = 0$. *Así eliminamos de* $\mathbb{R}^3$ *los puntos* $(0,0,z)$.
- *La curva* $3x - y = 0$, $z = 3$ *se puede expresar en paramétricas por medio de* $\gamma(t) = (t, 3t, 3)$, *que está definida en nuestro dominio siempre que* $t \neq 0$. *Así* $(t_1, t_2) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- *Una recta de esta forma, al proyectarla sobre el plano* $0XY$, *no tiene puntos múltiples.*
- $x = t$, $y = 3t$, $z = 3$, *son de clase* $\mathcal{C}^{(1)}$ *en nuestro intervalo* (t_1, t_2).
- $x' = 1$, $y' = 3$, *que nunca se anulan.*
- *El determinante*

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4t^2 & 9t^2 \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall t \neq 0$$

Por todo lo anterior, el último teorema nos garantiza la existencia y unicidad de nuestro problema de Cauchy.

2º) Ahora vamos a encontrar dicha solución: El sistema característico viene dado por

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{yz^2}$$

De la última igualdad se obtiene inmediatamente

$$\frac{1}{z} + \log y = c_1$$

La primera igualdad puede escribirse en la forma

$$x(x+y)dy - y^2dx = 0$$

por lo que se trata de una edo de 1er orden homogénea, cuya solución viene dada por

$$\frac{y}{x} + \log y = c_2$$

(recordemos que para resolver esta edo hay que dividir todo por x^2 *y hacemos* $\frac{y}{x} = u$*; entonces resulta una edo de 1er orden en variables separadas, por lo que resolviendo la misma y deshaciendo el cambio se llega a la solución dada).*

Para hallar entonces la superficie integral que pasa por la recta dada hemos de eliminar x, y, z *de las ecuaciones*

$$\begin{cases} \frac{1}{z} + \log y = c_1 \\ \frac{y}{x} + \log y = c_2 \\ 3x - y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

resultando entonces que $c_2 - c_1 = \frac{8}{3}$, *por lo que sustituyendo en el sistema se llega a*

$$z = \frac{3x}{3y - 8x}$$

Ecuación general de 1er orden. Método de Lagrange-Charpit.

Sabemos que una EDP que solo contiene las variables x e y es de la forma

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \tag{5}$$

donde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. En caso que esta ecuación fuese lineal respecto a p y q ya conocemos como resolverla. Así pues, supongamos que F es una función cualquiera, continua, que tiene derivadas parciales primeras respecto de cada una de las variables $x,\ y,\ z,\ p,\ q$.

A fin de hallar una integral completa, es decir una solución de (5) de la forma $f(x,y,z,c_1,c_2) = 0$ en la que figuren dos constantes arbitrarias c_1 y c_2, intentaremos determinar otra relación $F_1(x,y,p,q) = c_1$, de modo que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y,z,p,q) = 0 \\ F_1(x,y,z,p,q) = c_1 \end{array} \right. \tag{6}$$

nos permita determinar $p = p(x,y,z)$ y $q = q(x,y,z)$, tales que al sustituirlos en $dz = pdx + qdy$ nos de una expresión integrable.

Para que esto sea cierto, es condición necesaria y suficiente que las funciones p y q definidas implícitamente por el sistema (6), siendo $\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p,q)} \neq 0$, cumplan

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p$$

Derivando en esta expresión y operando, se llega a que la determinación de F_1 con las anteriores condiciones equivale a la obtención de una integral del sistema

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{7}$$

Una vez obtenida una solución de (7) sustituiremos en (6) y despejando del sistema p y q obtendremos

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p(x,y,z,c_1) \\ q = q(x,y,z,c_1) \end{array} \right.$$

que sustituidos en $dz = pdx + qdy$ nos dará una ecuación integrable. Una vez que se integre esta ecuación, obtendremos una integral completa de (5), que será de la forma $f(x,y,z,c_1,c_2) = 0$.

Example *Aplicar el método anterior para integrar la ecuación*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

Solución: En este caso el sistema (7) *es*

$$\frac{dx}{q+x} = \frac{dy}{p+y} = \frac{dz}{p(q+x)+q(p+y)} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0}$$

siendo $p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}$. *De aquí se obtiene que* $dp = 0$ *y que* $dq = 0$, *por lo que* $p = c_1,\ q = c_2$, *y sustituyendo será*

$$dz = pdx + qdy = c_1dx + c_2dy$$

lo que implica que

$$z = c_1x + c_2y + k$$

y si sustituimos en la ecuación inicial para determinar k, *resultará que* $k = c_1c_2$, *por lo que una integral de la EDP dada será*

$$z = c_1x + c_2y + c_1c_2$$

Example *Integrar*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + x(2y+1)\frac{\partial z}{\partial x} + (y^2+y)\frac{\partial z}{\partial y} - z(2y+1) = 0$$

Solución: Por el método anterior, se tiene

$$\frac{dx}{q + x(2y+1)} = \frac{dy}{p + y^2 + y} = \frac{dz}{2pq + px(2y+1) + q(y^2+y)} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{2xp - 2z}$$

siendo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Como $dp = 0$, tendremos que $p = c_1$, por lo que sustituida en la ecuación y despejando q, resultará ser

$$q = \frac{z(2y+1) - x(2y+1)c_1}{c_1 + y^2 + y}$$

con lo que la expresión $dz = pdx + qdy$ se transforma en

$$dz = c_1dx + \frac{z(2y+1) - x(2y+1)c_1}{c_1 + y^2 + y}dy$$

que puede expresarse en la forma

$$\frac{dz - c_1dx}{z - c_1x} = \frac{2y+1}{c_1 + y^2 + y}dy$$

por lo que tendremos

$$\log(z - c_1x) = \log(c_2(c_1 + y^2 + y))$$

o lo que es lo mismo

$$z = c_1x + c_2(c_1 + y^2 + y)$$

Exercise *Hallar la integral completa de la EDP dada por*

$$p^2 - q^2 + 4px + 4qy - 4z = 0$$

Por el procedimiento seguido para la obtención de una integral de (5) vemos que existen múltiples sistemas de integrales. La solución que se obtiene no nos proporciona todas las superficies que verifican (5).

Definition *La función z obtenida al integrar la ecuación $dz = p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy$ que satisface la ecuación (5) y que depende de dos constantes arbitrarias c_1 y c_2, se llama **integral completa**.*

Definition *Se llama **integral general** de la ecuación*

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \tag{5}$$

aquella que se obtiene expresando una de las constantes de la integral completa como función arbitraria de la otra, y eliminando esta última entre la integral completa y la que de ésta se deduce al tomar su derivada parcial respecto de la constante.

Definition *Solución particular de la EDP*

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \tag{5}$$

es aquella que no puede considerarse como caso particular de la integral completa *ni de la integral general. Se obtiene imponiendo a la solución completa la condición $\frac{\partial f}{\partial c_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial c_2} = 0$. De esta forma se determinan $c_1 = c_1(x,y,z)$, $c_2 = c_2(x,y,z)$, que al sustituirlas en $f(x,y,z,c_1,c_2) = 0$ nos dan una nueva superficie integral que no es un caso particular de la integral completa ni de la integral general.*

Example *Hallar una integral completa de la ecuación*

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

Solución: Esta EDP pued ponerse como

$$p^2x - pz + q^2 = 0$$

por lo que su sistema característico asociado es

$$\frac{dx}{2px - z} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2p^2 - zp + 2q^2} = \frac{dp}{-p^2 + p^2} = \frac{dq}{pq}$$

Sabemos entonces que $dp = 0$, por lo que $p = c_1$, que es una primera integral del sistema característico. Entre esta integral y la ecuación dada deberemos despejar p y q. Por tanto

$$q = \sqrt{c_1(z - c_1x)}$$

Debemos integrar ahora la ecuación en dif. totales

$$dz = c_1dx + \sqrt{c_1}\sqrt{z - c_1}\,dy$$

que puede expresarse como

$$\frac{dz - c_1dx}{\sqrt{z - c_1x}} = \sqrt{c_1}\,dy$$

por lo que su integración es inmediata, resultando

$$2\sqrt{z - c_1x} = \sqrt{c_1}\,y + c_2$$

o lo que es lo mismo

$$z = c_1x + \frac{1}{4}(\sqrt{c_1}\,y + c_2)^2$$

que es una integral completa de la ecuación dada, puesto que tiene dos parámetros c_1 y c_2.

Para hallar la integral general a partir de la integral completa sólo hay que establecer previamente que $c_2 = y(c_1)$.