Profesor**: Roque Molina Legaz**

Tema 9: EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS. APLICACIONES

PROGRAMA DETALLADO:

9.1 Introducción.
9.2 Puntos singulares aislados de una función.
9.3 Residuos: Definición y cálculo.
9.4 El teorema de los residuos.
9.5 Aplicación al cálculo de ciertas integrales reales.

Introducción.

Recordemos que el teorema de Cauchy-Goursat nos afirmaba que si una función es analítica en todos los puntos de un contorno cerrado simple γ y en todos los puntos de su interior, el valor de la integral de la función a lo largo de ese contorno es cero. Sin embargo, si la función no es analítica en un número finito de puntos interiores a γ, existirá, como veremos en este tema, un número específico, llamado **residuo**, con que cada uno de esos puntos contribuirá al valor de la integral.

Así, en este tema vamos a desarrollar un resultado de los más importantes en el Análisis Complejo, y con diferentes aplicaciones en ciertas áreas de Matemática Aplicada: el teorema de los residuos.

Puntos singulares aislados de una función.

Comenzaremos el tema recordando una definición ya establecida en el tema de funciones analíticas:

Definition *Se dice que un punto z_0 es un **punto singular aislado** de la función $f(z)$ si existe una bola centrada en z_0, $B(z_0, r)$, tal que f es analítica en dicha bola salvo en el punto $z = z_0$.*

Example *Varios ejemplos.*

Según sea el comportamiento de la función $f(z)$ cuando $z \to z_0$, pueden distinguirse tres tipos de puntos singulares aislados: punto singular evitable, polo y punto singular esencial.

Definition *Sea z_0 un punto singular aislado de f. Entonces:*

*a) Si f se puede convertir en analítica en toda la bola $B(z_0, r)$, asignándole a f un valor adecuado en z_0, se dice que z_0 es un **punto singular evitable** de f.*

*b) El punto z_0 es un **polo de orden** n de f si f se puede expresar en la forma $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, con $n \geq 1$, y g una función analítica en un entorno de z_0 y tal que $g(z_0) \neq 0$. Cuando $n = 1$ se dice que z_0 es un **polo simple**.*

c) A una singularidad aislada z_0 de una función analítica que no sea *evitable ni polo se le llama* ***singularidad esencial****.*

Remark *Una forma equivalente de dar la definición anterior sería: si existe y es finito* $\lim_{z\to z_0} f(z)$*, la singularidad* z_0 *es evitable; si* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *es infinito, la singularidad es un polo; y si* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *no existe, la singularidad es esencial.*

Una consecuencia inmediata es que los ceros y los polos de orden n se encuentran estrechamente vinculados, ya que se verifica el siguiente resultado:

Proposition *Sea f analítica en* $B(z_0, r)$*. Entonces, f tiene un cero de orden n en* z_0 *sí y sólo sí la función* $\frac{1}{f}$ *tiene un polo de orden n en* z_0*.*

Los tipos de puntos singulares aislados están estrechamente ligados con el carácter del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en $B^*(z_0, r)$:

Theorem *Sea* z_0 *un punto singular aislado de una función analítica f. Sabemos que en* $B^*(z_0, r)$ *existe el desarrollo de Laurent* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$*. Entonces:*

a) Si es $b_n = 0\ \forall n \geq 1$*, la función* $f(z)$ *tiene en* z_0 *una singularidad evitable, y la serie de Laurent coincide con la serie de Taylor. Y recíprocamente.*

b) Si solamente hay un número finito de $b_n \neq 0$*, entonces f posee un polo en* z_0*. Si es* $b_n \neq 0$ *y* $b_{n+1} = b_{n+2} = .. = 0$*, el polo es de orden n. Y recíprocamente.*

c) Si hay un número infinito de $b_n \neq 0$*, entonces f posee una singularidad esencial en* z_0*. Y recíprocamente.*

Remark *Es posible estudiar el comportamiento de una función* $f(z)$ *en el punto del infinito: Para ello, solo se ha de estudiar el comportamiento de la función* $f(1/z)$ *en el punto* $z = 0$ *(Así, f será continua, derivable o diferenciable en* $z = \infty$*, si* $f(1/z)$ *lo es en* $z = 0$*; si* $f(z)$ *fuese analítica en* $R < |z| < \infty$*, haciendo* $z = 0$ *en* $f(1/z)$ *se observa que* $z = \infty$ *es un punto singular aislado, que podrá ser singularidad evitable, polo o singularidad esencial).*

Residuos: Definición y cálculo.

Ya tenemos establecido que si z_0 es un punto singular aislado de f, existirá un $r > 0$ tal que f será analítica en $B^*(z_0, r)$. Así, $\forall z \in B^*(z_0, r)$, f admitirá un desarrollo de Laurent de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. En particular, el coeficiente para $n = -1$ es c_{-1}, cuya expresión viene dada por

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz$$

siendo γ cualquier circunferencia de centro z_0 contenida en $B^*(z_0, r)$ y recorrida en sentido positivo. Precisamente, a este coeficiente c_{-1} se le llamará **residuo de *f* en** z_0 y se designará por $Resf(z_0)$, por $Res(f, z_0)$, o simplemente por B cuando z_0 y f estén claramente indicados.

Puesto que en definitiva, $Resf(z_0)$ no es sino el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$ en el desarrollo de Laurent de f en z_0, será interesante que, a fin de evitar calcular desarrollos de Laurent (ya que en muchos casos no se podrá recurrir a desarrollos conocidos y no tendremos más remedio que aplicar el teorema de Laurent), veamos como pueden calcularse tales residuos según sea el carácter del punto singular aislado. Así pues, se verifican los siguientes resultados:

Proposition *Sea z_0 un punto singular aislado de una función f. Entonces:*

a) Si z_0 es una singularidad evitable, $Resf(z_0) = 0$.

b) Si z_0 es un polo simple,

$$Resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

c) Si z_0 es un polo de orden n,

$$Resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

d) Si z_0 es una singularidad esencial, $Resf(z_0)$ se ha de calcular de forma directa, es decir, obteniendo el coeficiente c_{-1} del desarrollo de Laurent de f en z_0.

Como consecuencia de los apartados *a*) y *b*) de la proposición anterior, se verifican los siguientes resultados, que son interesantes de conocer por su gran aplicabilidad:

Corollary *Se verifican:*

a) Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, con p y q analíticas en z_0, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y el residuo de f en dicho punto viene dado por

$$Resf(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

b) Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, con p y q analíticas en z_0, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = q'(z_0) = \ldots = q^{(n-1)}(z_0) = 0$, pero $q^{(n)}(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden n en z_0. En particular, si $n = 2$, f posee un polo de segundo orden en dicho punto y su residuo viene dado por

$$Resf(z_0) = 2\frac{p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)q'''(z_0)}{q''(z_0)^2}$$

Example *Varios ejemplos.*

El teorema de los residuos.

Sabemos que si una función f tiene sólo un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simple dado γ, éstos han de ser aislados. El teorema de los residuos será un resultado preciso del hecho de que si además f es analítica sobre γ, donde ésta está recorrida en sentido positivo, el valor de la integral de f a lo largo de γ es $2\pi i$ veces la suma de los residuos en esos puntos singulares:

Theorem ***(Teorema de los residuos)*** *Sea γ una curva cerrada simple y regular a trozos, y f una función analítica sobre γ y en su interior, salvo en un número finito de singularidades $z_1, z_2, \ldots, z_n$ interiores a γ. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Resf(z_k)$$

Example *Calcular* $\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$ *siendo* γ *el círculo* $z = 2$ *positivamente orientado.*

Remark *Para el caso particular en que la función f del enunciado anterior sea además analítica en todo el plano exterior a* γ*, resultará a veces más eficiente, sobre todo desde el punto de vista práctico, calcular* $\int_\gamma f(z)dz$ *hallando un solo residuo de una cierta función relacionada. Concretamente, podremos sustituir la expresión que nos da el teorema de los residuos por*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res\left(\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Aplicación al cálculo de ciertas integrales reales.

Finalizaremos este tema estudiando una aplicación que tiene el teorema de los residuos. En concreto veremos la aplicación al cálculo de ciertas integrales reales:

El teorema de los residuos nos proporcionará un método sencillo para calcular algunos tipos de integrales reales sin necesidad de conocer una primitiva de la función integrando.

- Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$, donde R es una función racional de $\cos x$ y $\sin x$: Estas integrales pueden resolverse introduciendo la variable compleja $z = e^{ix}$, de manera que el intervalo $[0, 2\pi]$ se transformará en la circunferencia $|z| = 1$ recorrida en sentido positivo. Teniendo en cuenta la sustitución anterior, obtendremos

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$

  y resolveremos esta última integral por medio del teorema de los residuos.

- Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, con $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, donde P y Q son polinomios de grado n y m respectivamente. Si $Q_m(x) \neq 0$ y $m \geq n+2$, entonces se verificará

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum Resf(z)$$

  en todos los polos del semiplano superior.

- Integrales de la forma $\int_0^{+\infty} x^{a-1}f(x)dx,\ 0 < a < 1$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades z_k $(k = 1,2,\ldots,m),$ no tiene polos en el semieje real positivo y $\lim_{z\to\infty} z^a f(z) = \lim_{z\to 0} z^a f(z) = 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}f(x)dx = -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\sin a\pi}\sum_{k=1}^{m} ResF(z_k),$$

  siendo $F(z) = z^{a-1}f(z)$.

- Integrales de la forma $\int_0^{+\infty} f(x)\log x dx$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades z_k, $(k = 1,2,\ldots,m),$ no tiene polos en el semieje real positivo y

$\lim_{z\to\infty} f(z)(\log z)^2 = \lim_{z\to 0} f(z)(\log z)^2 = 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x)\log x dx = \frac{1}{2} Re\left\{\sum_{k=1}^{m} ResF(z_k)\right\},$$

siendo $F(z) = f(z)(\log z)^2$.

- Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} f(x)dx$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades, no tiene polos en el eje real y se cumple $\lim_{R\to\infty} \max\{|f(z)|;\ |z| = R\} = 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} ResF(z_k),$$

siendo z_k $(k = 1,2,\ldots,m)$ los polos de f en el semiplano superior y $F(z) = e^{ipz} f(z)$.

- Integrales de la forma $\int_0^{+\infty} f(x)\cos axdx$, $\int_0^{+\infty} f(x)\sin axdx$: Si f es analítica salvo en un número finito de singularidades, no tiene polos en el eje real y se cumple

$$\lim_{R\to\infty} \max\{|f(z)|;\ |z| = R\} = 0,$$

entonces:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos axdx = Re\left\{\pi i \sum_{k=1}^{m} ResF(z_k)\right\},$$

siempre que f sea par, mientras que si es impar,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin axdx = Im\left\{\pi \sum_{k=1}^{m} ResF(z_k)\right\},$$

siendo z_k $(k = 1,2,\ldots,m)$ los polos de f y $F(z) = e^{ipz} f(z)$.