Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 8: SERIES DE POTENCIAS COMPLEJAS

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción.

El objetivo fundamental de este tema es el estudio de las series de potencias complejas, estableciendo sus afinidades y diferencias con las correspondientes series de potencias reales, ya estudiadas en el primer tema de esta asignatura.

Todos los conceptos y propiedades de las sucesiones en espacios métricos, estudiados en Cálculo, son aplicables a $\mathbb{C}$ con la distancia euclídea. Además, la relación natural existente entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ reducirá el estudio de las sucesiones y series de números complejos al de pares de sucesiones y series de números reales (por ejemplo, la sucesión $(z_n) = (x_n + iy_n)$ o la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ serán convergentes si y sólo si respectivamente lo son las sucesiones (x_n), (y_n) o las series $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$). Por todo esto, podremos desarrollar el primer punto de este tema de una forma rápida, recordando brevemente tanto las definiciones como las primeras propiedades de las sucesiones y series numéricas en el campo complejo.

De igual manera podremos actuar con las sucesiones y series funcionales en el campo complejo, puesto que su teoría se desarrollará de forma paralela a la de las funciones reales. Los distintos tipos de convergencia (*convergencia puntual*, *uniforme* y *absoluta*) y los criterios que se aplicarán en su estudio se trasladarán del campo real al complejo sin dificultad alguna.

Sucesiones y series numéricas en $\mathbb{C}$.

Definition *La sucesión de números complejos (z_n)* ***tiene por límite*** *el complejo z, y se representa por $\lim z_n = z$, si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ si $n > n_0$.*

Es inmediato ver que el límite, si existe, es único. De forma análoga a $\mathbb{R}$, se establece la definición de límite infinito. También es inmediato probar el siguiente resultado:

Proposition *Supongamos que $z_n = x_n + iy_n$ y que $z = x + iy$. Entonces, $\lim z_n = z$ sí y sólo sí $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$.*

Definition *Una serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ se dice* ***convergente*** *si la sucesión de sus sumas parciales (S_n) es convergente, siendo $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, ...*

En este caso, se pone $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim S_n$*, y se dice que el valor de este límite es la* ***suma*** *de la serie.*

Utilizando la proposición anterior, se tiene:

Proposition *Supongamos que* $z_n = x_n + iy_n$ *y que* $S = x + iy$*. Entonces,* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$ *sí y sólo sí* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y$*.*

Definition *Si S es la suma de* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$*, se llama* ***resto*** $n-$*simo* ***de la serie*** *a la diferencia* $\rho_n = S - S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} z_i$*, y se verifica trivialmente que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *es convergente sí y sólo sí* $\lim \rho_n = 0$*.*

Esta caracterización de la convergencia de una serie se usará cuando se estudien las series de potencias.

Definition *Una serie compleja* $\sum z_n$ *se dice* ***absolutamente convergente*** *si es convergente la serie* $\sum |z_n|$*.*

Desde luego, si una serie es absolutamente convergente, dicha serie es convergente.

Sucesiones y series de funciones complejas.

Definition *Una sucesión de funciones complejas* (f_n)*, con* $f_n : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, se dice que* ***converge puntualmente*** *en un punto* $z_0 \in S$*, si la sucesión numérica* $(f_n(z_0))$ *es convergente. Se llama* ***campo de convergencia*** *de la sucesión de funciones al conjunto de puntos de S donde la sucesión converge puntualmente, es decir, al conjunto* $A = \left\{z \in S;\ (f_n(z)) \text{ es convergente}\right\}$*.*

Definition *Se llama* ***límite puntual*** *de* (f_n) *a la función* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida por* $f(z) = \lim f_n(z)$ *para cada* $z \in A$*, es decir, si se verifica* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$*, y* $\forall z \in A$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|f(z_n) - f(z)| < \varepsilon$ *si* $n > n_0$*. Suele expresarse por* $\lim f_n = f$ *o* $f_n \to f$ *punt.*

Este n_0 de esta definición dependerá tanto de ε como del punto $z \in A$. Si fuese independiente del punto en cuestión (es decir, si n_0 solo depende de ε), se dirá que la convergencia es uniforme:

Definition *Sea A el campo de convergencia de* (f_n)*. Se dice que* (f_n) ***converge uniformemente*** *a f en* $D \subset A$*, y se expresa* $f_n \to f$ *unif. en A, si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N}, n_0 = n_0(\varepsilon), \text{ tal que} |f(z_n) - f(z)| < \varepsilon\ \forall n > n_0 \text{ y } \forall z \in A$$

Definition *Dada una serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *se dice que* ***converge puntualmente*** *en A (resp.* ***uniformemente*** *en D) a una función S, si lo hace la sucesión de sus sumas parciales. Asímismo, se dice que la serie* ***converge absolutamente*** *en* z_0*, si* $\sum |f_n|$ *es convergente en* z_0*.*

Un criterio útil para el estudio de la convergencia absoluta y uniforme de una serie de funciones es el llamado **criterio de la mayorante** o **criterio M de Weierstrass:**

Proposition *Sea* $(f_n(z))$ *una sucesión de funciones definidas en* $D \subset \mathbb{C}$ *y* (M_n) *una sucesión de números reales no negativos tales que* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *es convergente. Si para cada* $z \in D$ *es* $|f_n(z)| < M_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$*, entonces la serie funcional* $\sum f_n(z)$ *es absoluta y uniformemente convergente en D.*

Series de potencias complejas.

Al igual que ocurría en el campo real, las series funcionales constituirán un método de representación de funciones muy útil para la resolución de numerosos problemas en el campo complejo. De todas las series funcionales, las de mayor aplicación serán las series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

donde a_n son números complejos. A una serie de esta forma se le llamará **serie de potencias centrada en** z_0. Estas series convergen puntualmente al menos en z_0, siendo su suma en dicho punto a_0. En lo sucesivo, y por comodidad, consideraremos solo series de potencias centradas en el origen, es decir series del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Los resultados para las series de potencias complejas son análogos a los establecidos para las series de potencias reales:

Proposition *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias compleja que converge para $z = z_0$. Entonces:*

a) Para cada r con $0 < r < |z_0|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en una bola cerrada de centro z_0 y radio r a una función $S(z)$.

b) Lo mismo para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$.

c) S es derivable y se verifica $S' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$ $\forall z$ con $|z| < |z_0|$.

Sin embargo, si una serie diverge para $z = z_1$ también lo hace $\forall z$ con $|z| > |z_1|$.

Definition *Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, se llama **radio de convergencia** de la serie al número real R dado por:*

- *$R = 0$ si la serie sólo converge para $z = 0$.*
- *$R = \infty$ si la serie converge para todo complejo z.*
- *$R = sup\left\{|z|;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ es convergente}\right\}$ si la serie converge para unos valores dde z y diverge para otros.*

Proposition *Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente $\forall z$ con $|z| < R$ y diverge $\forall z$ con $|z| > R$.*

Definition *A la bola abierta $B(0,R)$ se le llama **círculo** o **disco de convergencia** de la serie.*

Remark *A partir de los resultados anteriores, sabemos que una serie de potencias converge absoluta y uniformemente dentro de su círculo de convergencia, y diverge fuera de él. En los puntos z tales que $|z| = R$, la serie puede converger o diverger, según los casos.*

¿Cómo podemos calcular el radio de convergencia R?. Los siguientes resultados nos lo indican:

Proposition *Dada una serie de potencias para la cual existe $lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 0$,* *entonces se verifica que* $R = \frac{1}{q}$ *(entendiendo que si* $q = 0$*, entonces* $R = \infty$*, y que si* $q = \infty$*, entonces* $R = 0$*). Asímismo, si existe* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q > 0$*, entonces* $R = \frac{1}{q}$.

Proposition *Una serie de potencias puede ser integrada término a término a lo largo de cualquier curva* γ *regular a trozos incluida en el interior de su círculo de convergencia. Además, define en el mismo una función indefinidamente derivable, siendo su función derivada* k *– sima la dada por*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

y teniendo esta serie el mismo radio de convergencia que la inicial.

Remark *En el campo complejo pueden aparecer otro tipo de series que no aparecían en el campo real:*

- *Series de la forma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$*: Si existe* $\rho = \lim\left|\frac{a_{-n-1}}{a_{-n}}\right|$*, esta serie converge para* $|z - z_0| > \rho$.
- *Series de la forma* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$*: Éstas se pueden descomponer en la forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

por lo que serán convergentes en el dominio en el que ambos sumandos sean convergentes. Así, si la primera es convergente para $|z - z_0| > \rho$ *y la segunda lo es para* $|z - z_0| < R$*, caben las siguientes posibilidades:*

- *Que* $\rho > R$*, en cuyo caso la serie inicial será divergente en todo* $\mathbb{C}$.
- *Que* $\rho < R$*, en cuyo caso la serie inicial será convergente en el anillo* $\rho < |z - z_0| < R$ *(siendo* $\rho \geq 0$ *y* $0 < R \leq \infty$*).*

Series de Taylor.

La primera, y más importante, de las consecuencias de las fórmulas integrales de Cauchy, establecidas en el tema anterior, es la posibilidad de representar una función analítica por medio de una serie de potencias (en concreto, por lo que se llamará su **serie de Taylor**). Puesto que las series de potencias son indefinidamente derivables, resultará que toda función analítica en un abierto poseerá derivadas de todos los órdenes en dicho abierto, con lo que la derivada de una función analítica será a su vez una función analítica. Esta consecuencia viene establecida en el siguiente teorema:

Theorem *(**Teorema de Taylor**) Sea* f *analítica en* $B(z_0, r_0)$*. Entonces,* $\forall z \in B(z_0, r_0)$ *se verifica*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

*Además, el radio de convergencia de esta serie (a la que se le llama **serie de Taylor** de* f *en* z_0*) es mayor o igual que* r_0*. Cuando* $z_0 = 0$*, la serie resultante se conoce como **serie de McLaurin**.*

Remark *Éste desarrollo es único, y , por las fórmulas integrales de Cauchy, los* *coeficientes de este desarrollo de Taylor vienen dados por*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

siendo γ_r una circunferencia de centro z_0 y radio $r < r_0$, recorrida en sentido positivo.

Example *Desarrollos de funciones elementales.*

Series de Laurent.

Si una función no es analítica en un punto z_0, no podremos aplicar el teorema de Taylor en dicho punto. No obstante, sí que va a ser posible hallar una representación en serie para $f(z)$, aunque este desarrollo contendrá tanto potencias positivas como negativas de $z-z_0$. A una serie de esta forma se le llamará **serie de Laurent** y el resultado fundamental que nos indica cuando es posible realizar este nuevo desarrollo es:

Theorem *(**Teorema de Laurent**) Sean γ_0 una circunferencia de centro z_0 y radio r_0, γ_1 una circunferencia de centro z_0 y radio r_1 ($r_0 < r_1$) y $f(z)$ una función analítica en los puntos de γ_0, de γ_1 y de la región comprendida entre ellas. Entonces, en cada punto z, con $r_0 < |z-z_0| < r_1$, de la corona entre ellas, f admite el siguiente desarrollo (que se conoce como **desarrollo de Laurent**)*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$$

y las circunferencias γ_0 y γ_1 están recorridas en sentido positivo.

Remark *De este teorema es interesante que destaquemos las siguientes consecuencias:*

- *Si f es analítica en todo punto de γ_1 y en su interior salvo en z_0, el radio r_0 se puede tomar arbitrariamente pequeño, y el desarrollo de Laurent será válido para $0 < |z-z_0| < r_1$.*
- *Si f es analítica en los puntos de γ_1 y en todo su interior, entonces $b_n = 0$, $\forall n = 1,2,\ldots$, y la serie de Laurent se reduce a una serie de Taylor centrada en z_0.*
- *Puesto que los dos integrandos $f(z)(z-z_0)^{-n-1}$ y $f(z)(z-z_0)^{n-1}$ de a_n y b_n son analíticos en la corona $r_0 < |z-z_0| < r_1$ y en su frontera, se puede usar como camino de integración, en lugar de las circunferencias γ_0 y γ_1, cualquier circunferencia γ de centro z_0 y radio r, con $r_0 < r < r_1$. De esta forma, el desarrollo de Laurent podrá escribirse*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

donde $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, con $n \in \mathbb{Z}$, y estando γ recorrida en sentido positivo. En la práctica, al hallar c_n se procurará evitar las *fórmulas anteriores y, siempre que sea posible, se recurrirá a desarrollos conocidos.*

- *La parte* $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ *se llama* ***parte principal*** *de la serie de Laurent y la parte* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ ***parte regular****.*

Ceros de las funciones analíticas.

Finalizaremos este tema con un apartado dedicado al estudio de los ceros de las funciones analíticas:

Definition *Recordaremos que* z_0 *es un* ***cero de orden*** n *de una función analítica* $f(z)$ *si se verifican*

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Cuando $n = 1$ *se dice que* z_0 *es un cero* ***simple****.*

Como resultados fundamentales, destacaremos:

Proposition *Un punto* z_0 *es un cero de orden n de una función analítica en dicho punto* f*, si y sólo si en un cierto entorno de* z_0 *se verifica* $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$*, donde* $g(z)$ *es analítica en* z_0 *y* $g(z_0) \neq 0$*.*

Proposition *(**Principio de los ceros aislados**) Sea* f *una función analítica no constante en un entorno de* z_0*, que es un cero de* f*. Entonces, existe un entorno de* z_0 *en el que no hay ceros de* f*; es decir, los ceros de una función analítica no nula son aislados.*