Profesor**: Roque Molina Legaz**

Tema 7: INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

PROGRAMA DETALLADO:

7.1 Introducción: Curvas en el plano complejo.
7.2 Integrales curvilíneas: Definición y propiedades.
7.3 Primitivas. Independencia del camino de integración.
7.4 Teorema de Cauchy-Goursat.
7.5 Fórmulas integrales de Cauchy. Aplicación al cálculo de ciertas integrales.
7.6 Teoremas de Liouville y D'Alembert.

Introducción: Curvas en el plano complejo.

La integración en el campo complejo va a ser el instrumento esencial para el estudio de las funciones analíticas. A partir de ella se probará lo que constituye el resultado fundamental de la teoría de funciones analíticas: que una función derivable en un abierto es indefinidamente derivable en él.

De esta forma, y antes de pasar a definir el concepto de integración en el campo complejo, y habida cuenta de que estas integrales siempre van a ser integrales curvilíneas (puesto que las vamos a definir en términos de los valores de una función compleja $f(z)$ a lo largo de un contorno o curva dada γ, que va desde un punto z_1 a un punto z_2 de $\mathbb{C}$), volveremos a retomar unas definiciones ya establecidas cuando se estableció el concepto de integral de línea, aunque ahora particularizadas para el campo complejo. Así, daremos las siguientes definiciones:

Definition *Se llama **arco de curva** en $\mathbb{C}$ a toda función γ continua de un intervalo compacto real , dada por*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

*En tal caso, diremos que $\gamma(a)$ es el **origen** y $\gamma(b)$ es el **extremo** de dicho arco. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que la curva es **cerrada**.*

*Un arco de curva γ se llama **simple** o **de Jordan** si γ es inyectiva, es decir, si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, $\forall t_1 \neq t_2$. Si γ es simple salvo por ser $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que γ es una **curva simple cerrada** o **curva de Jordan**.*

Definition *Una curva γ es **regular** si tiene derivada continua y no nula en todo punto de $[a,b]$; y se dice **regular a trozos** si $[a,b]$ puede subdividirse en un número finito de subintervalos en los cuales γ es regular.*

Definition *Se define la **longitud** de una curva regular a trozos por*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\, dt$$

(Notemos que esta integral sí que sabemos calcularla, puesto que $|\gamma'(t)|$ es un número dependiente de t, por lo que la anterior es una integral simple).

Integrales curvilíneas: Definición y propiedades.

A las integrales en $\mathbb{C}$ las denotaremos por $\int_\gamma f(z)dz$ o $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, aunque esta última notación suele utilizarse cuando el valor de la integral es independiente de la elección de la curva que une los puntos z_1 y z_2. Aunque estas integrales pueden ser definidas directamente como límites de sumas, es más aconsejable definirlas como integrales curvilíneas de funciones reales, es decir, como las integrales curvilíneas estudiadas en el tema 3. Se hará así, y no directamente, para evitar la repetición de las demostraciones de las propiedades generales ya realizadas en un tema anterior.

Definition *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino regular a trozos y $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ una función continua. Se define la **integral de f a lo largo de** γ, y se designa mediante $\int_\gamma f(z)dz$, como*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

De esta forma, si la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es continua sobre la curva γ, y ésta viene determinada por una aplicación regular a trozos, la anterior definición nos permitirá expresar la integral compleja en función de las cuatro integrales reales determinadas por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),v(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t))dt$$

Example *Calcular $\int_\gamma \bar{z} \cdot dz$, siendo γ la mitad derecha del círculo $|z| = 2$.*

Example *Calcular $\int_\gamma f(z) \cdot dz$, siendo $f(z) = y - x - i3x^2$ y γ el contorno de limitado por la intersección de las curvas $x = 0$, $y = 1$, $y = x$.*

A raíz de la última definición, todas las propiedades generales que cumplen las integrales de línea en el campo real pueden ser trasladadas al campo complejo. Entre éstas, recordamos:

Proposition *Sean γ_1 y γ_2 dos caminos regulares a trozos y f,g funciones continuas definidas en subconjuntos que contienen a las curvas. Entonces:*

*a) **(Linealidad)** Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, se verifica*

$$\int_{\gamma_1} (\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \int_{\gamma_1} f + \mu \int_{\gamma_1} g$$

*b) **(Cambio de parámetro)** Si γ_1 y γ_2 son caminos equivalentes, se verifica*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

*c) **(Unión de caminos)** Si el extremo final de γ_1 coincide con el origen de γ_2 y $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, se tiene*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

d) ***(Camino opuesto)*** *Si γ_1 es el camino opuesto de γ_2, entonces*

$$\int_{\gamma_1} f = -\int_{\gamma_2} f$$

Proposition *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino regular a trozos, L la longitud de γ y $M = max|f(z)|$ en $\gamma([a,b])$. Entonces*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq M \cdot L$$

Primitivas. Independencia del camino de integración.

Al igual que ocurría en el tema de la integral de línea, la independencia del camino de integración va a jugar un papel importante dentro de estas integrales.

Definition *Dada una función continua f en un dominio D, si existe una función analítica F en D tal que $F'(z) = f(z)$ en D, se dice que F es una* ***primitiva*** *de f en D.*

Se verifica el siguiente resultado:

Proposition *En las condiciones de la anterior definición, si F es una primitiva de una función continua f en un abierto D, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

De este resultado podremos concluir que si una función continua *f* tiene una primitiva *F* en un dominio *D*, el valor de su integral curvilínea desde un punto z_1 a un punto z_2 en *D* será independiente de la curva regular a trozos γ que se considere, supuesto que γ esté enteramente contenida en *D*. También es cierto el recíproco, es decir, se verifica:

Proposition *En las anteriores condiciones, si las integrales curvilíneas de una función continua f son independientes del camino en un dominio D, entonces f tiene una primitiva en todos los puntos de D.*

Habremos de notar que los resultados anteriores son equivalentes a que la integral a lo largo de una curva cerrada sea cero. Como consecuencia de todo lo anterior, se ha obtenido la versión compleja del teorema de la independencia del camino de integración establecido en el tema 3:

Theorem *En las anteriores condiciones, si f es una función compleja definida en un abierto D de $\mathbb{C}$, son equivalentes:*

a) f posee función primitiva en D.

b) f no depende del camino de integración.

c) La integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado es nula.

Example *Varios ejemplos.*

Teorema de Cauchy-Goursat.

Este teorema va a ser el resultado fundamental de la teoría de integración compleja. En el apartado anterior hemos visto que si una función *f* continua admite primitiva en *D*, su integral a lo largo de cualquier contorno cerrado γ contenido en *D* vale cero. El teorema de Cauchy-Goursat dará otras condiciones sobre *f* que garantizan que el valor de su integral a lo largo de un contorno cerrado y simple es cero:

Theorem ***(Teorema de Cauchy-Goursat)*** *Si f es analítica en todos los puntos de una curva de Jordan regular a trozos* γ *y en todos los puntos de su interior, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Example $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 0$*, siendo* γ *la circunferencia* $|z| = 1$.

Remark *El teorema de Cauchy-Goursat también puede enunciarse, de manera equivalente, en la forma: "Si f es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces* $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *para toda curva de Jordan regular a trozos* γ *contenida en D".*

Este teorema puede extenderse a la frontera de dominios múltiplemente conexos:

Theorem *Sea* γ *una curva simple cerrada y regular a trozos, y sean* γ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ *un número finito de curvas simples cerradas y regulares a trozos, interiores todas a* γ*, tales que las regiones interiores a cada* γ_i *no tengan puntos en común. Sea R la región cerrada consistente en todos los puntos del interior y sobre* γ*, excepto los puntos interiores a cada* γ_i*. Llamemos B a toda la frontera orientada de R, que consiste en* γ *y todas las* γ_i*, recorridas de tal forma que los puntos de R permanecen a la izquierda de B. Entonces, si f es analítica en R, se tiene*

$$\int_B f(z)dz = 0$$

Combinando los resultados de esta sección y de la anterior, se llega a:

Corollary *Si* $f : D \to \mathbb{C}$ *es analítica y D es simplemente conexo, entonces f posee una primitiva F en D y se tiene*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Fórmulas integrales de Cauchy. Aplicación al cálculo de ciertas integrales.

En esta sección estableceremos las **fórmulas integrales de Cauchy**. Estos resultados afirman que si *f* es analítica sobre los puntos de un contorno γ y en su interior, los valores que toma *f*, o sus derivadas sucesivas, en los puntos del interior, estarán completamente determinados por los valores de *f* sobre γ. En concreto, se verifican los siguientes resultados:

Theorem *Sea f analítica sobre una curva simple cerrada y regular a trozos* γ *y en todos los puntos de su interior. Entonces, si* z_0 *es cualquier punto interior a* γ*, se verifica*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

*donde γ está recorrida en sentido positivo. (A este resultado se le conoce como **fórmula integral de Cauchy**).*

Remark *Cuando la anterior igualdad se expresa en la forma*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

se obtiene una fórmula que permite calcular determinadas integrales a lo largo de contornos cerrados simples.

Theorem *En las mismas hipótesis anteriores, se tiene*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

*resultado al que se le conoce como **fórmula integral de Cauchy generalizada**.*

Además de permitirnos calcular ciertas integrales complejas, estas fórmulas serán importantes por las consecuencias que se deducen de ellas. Entre estas consecuencias, es de destacar la primera de ellas, que manifestará que si una función es analítica en un punto, automáticamente es indefinidamente derivable en un entorno de dicho punto. En concreto, se verifican las siguientes consecuencias:

Proposition *Se verifican los siguientes resultados:*

a) Si f es analítica en z_0, entonces también lo son f', f'', $\dots$, $f^{(n)}$, $\dots$

b) Si $f = u + iv$ es analítica en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces todas las derivadas parciales de u y v son continuas en (x_0, y_0).

c) Sea f continua en un dominio D simplemente conexo. Supongamos que para toda curva de Jordan regular a trozos γ en D se verifica $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Entonces f es analítica en D. ***(Teorema de Morera)***

Teoremas de Liouville y D'Alembert.

Theorem ***(Liouville)*** *Si f es entera y $|f|$ está acotada en $\mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Remark *Este teorema afirma que ninguna función entera, salvo las constantes, pueden ser acotadas en todo $\mathbb{C}$.*

De este último resultado se deduce:

Theorem ***(de D'Alembert o teorema fundamental del Álgebra)*** *Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz. Consecuentemente, si $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ $(n \geq 1,\ a_n \neq 0)$, la ecuación $p(z) = 0$ tiene exactamente n raíces, teniendo en cuenta las multiplicidades de cada una.*