Tema 6: FUNCIONES ANALÍTICAS

PROGRAMA DETALLADO:

6.1 Funciones complejas de una variable compleja.
6.2 Límites y continuidad.
6.3 Derivación compleja. Propiedades.
6.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Relación con la derivada de una función en un punto.
6.5 Funciones analíticas. Funciones armónicas.

Funciones complejas de una variable compleja.

En este tema vamos a considerar funciones de una variable compleja, para las cuales vamos a desarrollar una teoría de derivación. El objetivo fundamental de este tema será introducir las funciones analíticas, que jugarán un papel fundamental en el Análisis Complejo.

Definition *Se llama* ***función compleja de una variable compleja*** *a una aplicación $f : S \to \mathbb{C}$, con $S \subset \mathbb{C}$, y a la que expresaremos por $w = f(z)$. Si llamamos $u(z)$ y $v(z)$ a las partes real e imaginaria de $w = f(z)$, podremos escribir*

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

donde $u(z)$ y $v(z)$ serán dos funciones reales de una variable compleja, $u, v : S \to \mathbb{C}$, aunque también se pueden considerar como funciones reales de dos variables reales (al ser $z = x + iy \equiv (x, y)$),por lo que

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Remark *En general, expresaremos*

$$f = u + iv$$

A u se le denomina ***parte real*** *de f, y a v* ***parte imaginaria***. *Veremos que las propiedades de f podrán estudiarse a partir de las de sus componentes.*

Example *Un primer ejemplo de funciones de variable compleja lo tenemos con los* ***polinomios complejos***: *Un polinomio con coeficientes complejos es una función $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada para $z \in \mathbb{C}$ por*

$$p(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$$

donde cada $a_i \in \mathbb{C}$. Los polinomios son funciones que se construyen usando sumas y productos de números complejos y, desde el punto de vista del cálculo, son las funciones más simples.

Veamos como obtener la parte real e imaginaria de un polinomio de variable compleja: Por ejemplo, consideramos $p(z) = z^2 + 2z + i$, y suponiendo que $z = x + iy$ tenemos que

$$p(z) = p(x+iy) = (x+iy)^2 + 2(x+iy) + i = \ldots = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + 1)$$

por lo que

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x \qquad y \qquad v(x,y) = 2xy + 2y + 1$$

Exercise *Intentar hacer lo mismo con otras funciones más complicadas que la anterior como son* $p(z) = \frac{z}{z^2+i}$ *o* $q(z) = \frac{z^3+iz-1+i}{z}$.

Remark *Las propiedades de una función real de variable real se ponen de manifiesto mediante su gráfica, pero cuando* $w = f(z)$, *con* $z, w \in \mathbb{C}$, *no es posible dicha representación. Sin embargo, sí que podrá obtenerse alguna información sobre la función indicando pares de puntos correspondientes* $z(x,y)$ *y* $w(u,v)$, *y dibujando los planos z y w por separado. En este caso, a las funciones de una variable compleja se les llamará también* ***transformaciones*** *(esta denominación procede del sentido geométrico de la aplicación, ya que una función f transforma un punto* (x,y) *del plano de la variable z, en un punto* (u,v) *del plano de la variable w; y a las ecuaciones* $u = u(x,y), v = v(x,y)$, *se les suele llamar* ***ecuaciones de la transformación****).*

Límites y continuidad.

Dado que la topología del plano complejo es como la de $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea, la noción de límite de una variable compleja es similar a la misma noción para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Definition *Sea* $f : S \to \mathbb{C}$, *con* $S \subset \mathbb{C}$ *y conteniendo un entorno reducido de* z_0. *Se dice que* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número real* $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ *tal que si* $0 < |z - z_0| < \delta$, *entonces* $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Si bien esta definición nos dará una forma para comprobar si un valor complejo dado, w_0, es un límite, no pone en nuestras manos un método para determinar dicho límite. Sin embargo, sí que nos ayudará en la demostración de las siguientes propiedades:

Proposition *El límite de una función en un punto, si existe, es único.*

Proposition *Sea* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, *con* $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$. *Entonces,* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *si y sólo si* $\lim_{(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ *y* $\lim_{(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

Precisamente esta última propiedad nos establecerá una conexión entre los límites de funciones de una variable compleja y los de las funciones reales de dos variables reales (estudiados en la asignatura de Matemáticas I). Así, todas las operaciones conocidas para los límites de dos variables reales, se verificarán para estos nuevos límites.

Example *Por ejemplo, trivialmente se verifica que*

$$\lim_{z \to 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$$

ya que no existe indeterminación. Pero si queremos calcular

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z} + iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{0}{0}$$

obtenemos una indeterminación, que para resolverla usaremos la anterior propiedad junto con lo aprendido en Matemáticas I para resolver límites indeterminados de funciones con 2 variables reales (que básicamente consistía en realizar un cambio a coordenadas polares). Así, realizaremos lo siguiente

$$\frac{\bar{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{(x-iy)+i(x^2-y^2+2xyi)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = \frac{x-2xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} + i\frac{x^2-y^2-y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$$

La anterior proposición nos asegura que

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-2xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} + i\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2-y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$$

Si calculamos ambos por separado realizando un cambio a polares ($x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$) resulta que los dos límites anteriores valen 0, por lo que

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = 0+i0 = 0$$

Exercise *Probar que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}+iz^2}{|z|}$$

Exercise *Calcular los siguientes límites:*

$$a)\ \lim_{z\to 2i}(2x+iy^2) \quad b)\ \lim_{z\to -1}\frac{iz+3}{z+1} \quad c)\ \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{Sh(iz)}$$

$$d)\ \lim_{z\to e^{\pi i/3}}(z-e^{\pi i/3})\frac{z}{z^3+1} \quad e)\ \lim_{z\to\infty}\frac{2z+i}{z+1}$$

Definition *De forma análoga a lo ya conocido, diremos que una función $f : S \to \mathbb{C}$ con $S \subset \mathbb{C}$, definida en un entorno de z_0, es* ***continua*** *en z_0 si existen $f(z_0)$, $\lim_{z\to z_0} f(z)$ y ambos resultados coinciden.*

A raíz de esta definición, y en base a las anteriores propiedades, es inmediato establecer:

Proposition *Una función $f = u + iv$ es continua en z_0 si y sólo si u y v son continuas en z_0.*

Remark *Este resultado que nos permitirá demostrar el álgebra de funciones continuas y que la composición de funciones continuas es otra función continua.*

También se verifica:

Proposition *Si f es continua en una región cerrada y acotada $S \subset \mathbb{C}$, $|f(z)|$ alcanza un máximo y un mínimo sobre S, es decir, existen $z_0, z_1 \in S$ tales que $m = |f(z_0)| \le |f(z)| \le |f(z_1)| = M,\ \forall z \in S$.*

Derivación compleja. Propiedades.

En $\mathbb{C}$ se define la derivada de una función en un punto de forma análoga a como se hace en $\mathbb{C}$:

Definition *Sea $f : S \to \mathbb{C}$, con $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in S$. Se llama* ***derivada*** *de f en z_0, al valor del límite (en el supuesto que exista)*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Introducida esta definición, veremos que la estructura formal de la derivación y el cálculo algorítmico que conlleva es idéntica a $\mathbb{C}$ De esta forma, todas las propiedades conocidas para funciones reales, también se verifican para este tipo de funciones (es decir, si f es derivable en un punto, entonces ha de ser continua en dicho punto; las reglas de la derivación; las tablas de derivadas de funciones elementales y la derivada de la función compuesta e inversa). Inclusive podríamos enunciar una versión de la Regla de L'Hôpital análoga a la conocida para funciones reales para estas funciones complejas.

Example *Aplicar la Regla de L'Hôpital para calcular:*

$$a)\ \lim_{z \to i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1} \quad b)\ \lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{\operatorname{sen}^2 z} \quad c)\ \lim_{z \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^{\frac{1}{z^2}}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Relación con la derivada de una función en un punto.

Como hemos visto, desde el punto de vista formal, calcular la derivada de una función de variable compleja no presenta diferencias con el caso de calcular la derivada para una función de variable real (en lugar de derivar respecto de x derivamos respecto de z). Sin embargo, esto va a ser diferente si en lugar de derivar respecto de z, expresamos $f(z)$ en función de sus componentes $u(x,y), v(x,y)$ e intentamos derivar respecto de las variables x,y. En este caso, la definición compleja impondrá en las funciones derivables un comportamiento especial, lo que determinará, como veremos, una teoría completamente distinta de la correspondiente en $\mathbb{C}$ En primer lugar, una función compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, podrá no ser derivable en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$, a pesar de que sus funciones componentes u y v puedan ser diferenciables, incluso con continuidad, en (x_0,y_0). Pero, de la existencia de $f'(z_0)$ si se deducirá la diferenciabilidad de u y v en (x_0,y_0), pues obligará a que u y v cumplan en (x_0,y_0) las igualdades que se conocerán con el nombre de condiciones de Cauchy-Riemann. En concreto, se verificará el siguiente resultado:

Theorem *Sea $f : S \to \mathbb{C}$, con $S \subset \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$. Si f es derivable en z_0, entonces existen las derivadas parciales primeras de u y v en (x_0,y_0) y se verifican las siguientes ecuaciones, que se llaman* ***ecuaciones de Cauchy-Riemann****:*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

Además, se verifica que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la existencia de la derivada de una función y además nos permitirán obtener esta derivada a partir de las derivadas parciales de u y v. Sin embargo, a nosotros lo que más nos va a interesar es el recíproco, es decir, como puede garantizarse la existencia de $f'(z_0)$ a partir de la existencia de las derivadas parciales de u y v. Esto nos lo dirá el siguiente teorema. No obstante, el teorema anterior sí que suele utilizarse para localizar los puntos en los que f no admite derivada.

Theorem *Supongamos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ está definida en un entorno de $z_0 = x_0 + iy_0$, y que las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son diferenciables en el punto (x_0,y_0), interior a su dominio de definición. Entonces, si u y v verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0,y_0), f es derivable en z_0.*

Funciones analíticas. Funciones armónicas.

Definition *Una función f es* ***analítica*** *(u* ***holomorfa****)* ***en un punto*** *z_0 si es derivable en cada punto de un cierto entorno de z_0. Una función se dice* ***entera*** *si es analítica en todo $\mathbb{C}$.*

Definition *Para el caso particular en que f sea analítica en un cierto entorno reducido de z_0 pero no lo sea en el propio z_0, diremos que z_0 es un* ***punto singular*** *o que es una* ***singularidad*** *de f. El estudio de las singularidades de una función será una cuestión importante y al que dedicaremos una sección en un próximo tema.*

Remark *En virtud de los resultados anteriores, una función $f = u + iv$ es analítica en z_0 si u y v son diferenciables en $z_0 = (x_0,y_0)$ y si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en z_0.*

Definition *Una función $h : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es* ***armónica*** *si es de clase $\mathcal{C}^2$ en D y si verifica la* ***ecuación de Laplace***

$$\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Que una función de variable compleja sea analítica va a estar relacionado con que tanto su parte real como su parte imaginaria sean funciones armónicas. De hecho, se verifica

Proposition *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D, entonces u y v son armónicas en D.*

Definition *Si u y v son armónicas en D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D, se dice que v es la* ***armónica conjugada*** *de u.*

De esta forma, si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D, entonces v es la armónica conjugada de u; y recíprocamente, si v es la armónica conjugada de u, entonces $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ será analítica en D.