Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 5: LOS NÚMEROS COMPLEJOS

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción.

Históricamente, los números complejos se introducen para resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Esta ecuación no tiene solución real, es decir, no existe ningún número cuyo cuadrado sea -1. Tanto esta operación como otras que no tienen solución en $\mathbb{R}$ (como, por ejemplo, calcular raíces de índice par y radicando negativo o calcular logaritmos de números negativos o con base negativa), crean la necesidad de construir un cuerpo conmutativo, que contenga a $\mathbb{R}$ y tal que todas estas operaciones tengan sentido. Precisamente, a obtener dicho cuerpo (al que llamaremos **cuerpo de los números complejos** y que designaremos por $\mathbb{C}$) dedicaremos este capítulo, y que es el primero del bloque de Análisis Complejo.

El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición. Forma binómica. Operaciones en forma binómica.

Son muchas las formas en las que puede ampliarse $\mathbb{R}$. El método que seguiremos consistirá en partir del espacio $\mathbb{R}^n$ y definir adecuadamente una suma y un producto. En concreto, definiremos

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$

$$(x,y) \cdot (x',y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x')$$

Remark *a) Se prueba que* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *es un cuerpo, al que se designa por C y se le llama el cuerpo C de los números complejos.*

b) El neutro para la suma es el par $(0,0)$*, mientras que para el producto es* $(1,0)$.

c) Por la forma en la que se han definido estas operaciones, resultará posible la operación inversa para el producto (salvo la división por cero). Puede verificarse que el inverso del par $(x,y) \neq (0,0)$ *es* $(x',y') = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

d) Como veremos, en este nuevo cuerpo así construido tendrán solución (aunque no será única) todas las operaciones algebraicas, de forma que ya no será necesario realizar una nueva ampliación. Sin embargo, ocurrirá que C, a diferencia de R, no admitirá ninguna relación de orden compatible con su estructura de cuerpo.

e) Se puede probar que el conjunto $R \times \{0\}$ es un subcuerpo de C isomorfo a R, por lo que puede identificarse al número real x, con el número complejo $(x, 0)$.

Proposition *Se verifican:*

a) En $\mathbb{C}$ tiene solución la ecuación $z^2 = -1$. La solución es el número complejo $(0, 1)$, al cual se le llama ***unidad imaginaria****, y se representa por i.*

b) Cualquier complejo $z = (x, y)$ se puede escribir de forma única en la forma $z = x + iy$. A esta nueva forma de representar los números complejos se le llama ***forma binómica, algebraica o cartesiana****. A x se le llama* ***parte real*** *y a y* ***parte imaginaria****, y suelen representarse, respectivamente, por $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.*

Definition *Se denomina* ***conjugado*** *del número complejo $z = x + iy$ al número complejo $\bar{z} = x - iy$.*

Proposition *Si z y z' son dos números complejos cualesquiera, se verifican:*

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

c) z es imaginario puro $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

d) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

e) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$

Proposition ***(Resumen de operaciones en forma binómica)*** *Dados los números complejos $z = x + iy, z' = x' + iy'$, se verifican:*

a) ***Suma y resta****:* $z \pm z' = (x + iy) \pm (x' + iy') = (x \pm x') + i(y \pm y')$

b) ***Producto****:*
$z \cdot z' = (x + iy) \cdot (x' + iy') = (x \cdot x' - y \cdot y') + i(x \cdot y' + y \cdot x')$

c) ***Cociente****:* $\frac{z}{z'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{x+iy}{x'+iy'} \cdot \frac{x'-iy'}{x'-iy'} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{x^2+y^2} + i\,\frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{x^2+y^2}$

Cualquier otra operación (raíz cuadrada, exponencial, logaritmos, etc) es más aconsejable realizarla expresando el número complejo en otra forma (módulo-argumental), como veremos más adelante.

Representación geométrica.

La aplicación de $\mathbb{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$$
$$z \mapsto (x, y)$$

que a cada número complejo $z = x + iy$ le asocia un punto de coordenadas (x, y) es biyectiva. El punto (x, y) se llama **afijo** del complejo $z = x + iy$.

Los números reales tienen sus afijos en el eje de abcisas o **eje real**; los números imaginarios puros tienen sus afijos en el eje de ordenadas o **eje imaginario**.

Un número complejo y su opuesto tienen sus afijos simétricos respecto del origen; un número complejo y su conjugado tienen sus afijos simétricos respecto del eje real.

Módulo y argumento. Formas trigonométrica y módulo-argumental.

Definition *Se llama **módulo** del número complejo $z = x + iy$ al número real no negativo dado por*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De la definición resultan las siguientes propiedades:

Proposition *Se verifican, para z y z' números complejos:*

a) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

b) $|Re(z)| \leq |z|$ *y* $|Im(z)| \leq |z|$

c) $|z| \geq 0$*, y es* $|z| = 0$ *sí y sólo sí* $z = 0$

d) $|\alpha \cdot z| = |\alpha| \cdot |z|$*, siendo* $\alpha \in \mathbb{R}$

e) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

f) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Geométricamente, el módulo del número complejo es el módulo del vector con origen en $(0, 0)$ y extremo en el afijo del complejo.

Definition *Si representamos este vector, a la medida del ángulo θ que dicho vector forma con el semieje real positivo, se le llama **argumento** de z, y se denota por $arg(z)$. Así pues, $arg(z) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).*

*Al único valor de $arg(z)$ que pertenezca a $(-\pi, \pi]$, se la llama **argumento principal** de z, y se representará por $Arg(z)$.*

Si θ es el argumento principal de $z = x + iy$, y si $|z| = r$, se tendrá

$$x = r \cdot \cos\theta, \quad y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$$

de donde

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Por tanto, si sustituimos en $z = x + iy$, se tiene

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

expresión que se denomina **forma trigonométrica** del complejo z. Esta expresión suele escribirse, en forma abreviada, poniendo $z = r_\theta$, a la que se conoce como **forma polar** o **módulo-argumental**.

Esta nueva forma de expresar un número complejo tiene ventajas para realizar determinadas operaciones:

Proposition *Dados dos complejos $z = r_\theta$ y $z' = r'_{\theta'}$, no nulos, y si $n \in \mathbb{Z}$, se verifica:*

a) $r_\theta = r'_{\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ *y* $\theta - \theta' = 2k\pi$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$

b) $r_\theta \bullet r'_{\theta'} = (r \bullet r')_{\theta+\theta'}$

c) $(r_\theta)^{-1} = (r^{-1})_{-\theta}$

d) $\frac{r_\theta}{r'_{\theta'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\theta'}$

e) $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$

Remark *Para $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, del último apartado anterior se deduce $(1_\theta)^n = (1)_{n\theta}$, es decir*

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

*que se conoce como **fórmula de Moivre**.*

Raíz n –sima de un número complejo.

Definition *Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se llama **raíz** n – sima de z a todo complejo w tal que $w^n = z$. A esta raíz n – sima la representaremos por $\sqrt[n]{z}$.*

Veamos como puede obtenerse esta raíz:

Proposition *Todo $z = r_\theta \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, admite n raíces n – simas, que vienen dadas por*

$$\sqrt[n]{r_\theta} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

y donde $\sqrt[n]{r}$ indica la única raíz n – sima ral y positiva de $r > 0$.

Remark *Geométricamente, los afijos de las n raíces n – simas de z son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[n]{r}$.*

Exponencial de un número complejo. Forma exponencial.

Dado el número $z = x + iy$, se define la **exponencial** de z, como el número complejo dado por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$$

Esta forma de definir la función e^z hace que, por un lado, se verifique $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$ y que $e^z \neq 0$, siendo z y z' dos números complejos cualesquiera.

Remark *Para cualquier $z = r_\theta \in \mathbb{C}$ su forma trigonométrica nos permite expresarlo como*

$$z = r_\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

por lo que comparando esta expresión con la de la exponencial de z, resultará *que también podemos expresar z en la forma*

$$z = r_\theta = r \cdot e^{i\theta}$$

A esta última forma de expresar z se le llama ***forma exponencial*** *de z.*

Remark ***(Fórmulas de Euler)*** *Usando la expresión de la exponencial de z, resultará que si $x \in \mathbb{R}$, se verifica*

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

por lo que sumando y restando estas igualdades resultará

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

expresiones que se conocen como ***fórmulas de Euler****.*

Remark *Estas fórmulas nos permitirán ampliar al campo complejo las definiciones de las funciones trigonométricas, de forma que para cualquier $z \in \mathbb{C}$, definiremos*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De forma análoga, se definen $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{1}{\tan z}$, etc. Estas funciones así definidas tendrán las mismas propiedades que las correspondientes funciones reales. Así, se pueden comprobar sin dificultad que se verifican igualdades como

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \; \operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen} z \cos z, \; \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \; etc$$

Remark *También será posible extender al campo complejo las* ***funciones hiperbólicas,*** *de manera que tendrán sentido expresiones como $Sh z$, $Ch z$, etc., siendo sus definiciones las dadas por*

$$Sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \; Ch z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \; Th z = \frac{Sh z}{Ch z}; \; etc$$

Puede probarse sin dificultad que estas funciones verifican las mismas propiedades que sus análogas reales.

Logaritmos y potencias complejas.

Definition *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es un* ***logaritmo*** *de z, si $e^w = z$. A w se le representará por $\log z$. Así, se verifica*

$$\log z = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid e^w = z \right\}$$

¿Cómo podemos calcular estos logaritmos?

Proposition *Si $z = r_\theta \neq 0$, se verifica*

$$\log z = \log r + i(\theta + 2k\pi), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Remark *Al valor particular de $\log z$ en el que $k = 0$, es decir a*

$$\log z = \log r + i\theta$$

se le llama ***logaritmo principal*** *de z, y suele representarse por $\operatorname{Log} z$.*

Las potencias complejas pueden definirse a partir de la exponencial y de los logaritmos:

Definition *Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, y $w \in \mathbb{C}$, se define*

$$z^w = e^{w \log z}$$

Remark *La mayoría de las veces suele tomarse*

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}$$

definición que permite que se verifiquen propiedades conocidas para las potencias reales (como por ejemplo, $z^{w_1} \cdot z^{w_2} = z^{w_1+w_2}$*).*

El plano complejo ampliado $\mathbb{C}^*$.

A veces es conveniente añadir al conjunto $\mathbb{C}$ un punto ideal, denotado por ∞, y llamado **punto del infinito**, y que consideraremos que verifica las siguientes relaciones:

- $\forall z \in \mathbb{C} \not\Leftarrow z + \infty = z - \infty = \infty$; $\frac{z}{\infty} = 0$
- Si $\mathbb{C}^*$ y $z \neq 0$: $z \cdot \infty = \infty$; $\frac{z}{0} = \infty$
- $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty$

Al conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ suele llamarse **plano complejo ampliado** y se denotará por $\mathbb{C}^*$.