Profesor**: Roque Molina Legaz**

Tema 4: INTEGRAL DE SUPERFICIE

Introducción.

De la misma forma que la integral de línea extiende el concepto de integral sobre un intervalo del eje real al caso de curvas en el espacio, la integral de superficie extenderá la definición de integral sobre un dominio plano al caso de superficies alabeadas.

Existe gran similitud en el estudio de las integrales sobre líneas y superficies, tanto en las definiciones como en las interpretaciones y aplicaciones. Al igual que en la integral de línea interviene el sentido del recorrido de la curva de integración, en las integrales de superficie es necesario distinguir las dos caras de las superficies llamadas biláteras u orientables. Como se verá, la distinción entre ambas caras de integración se hará a través de criterios basados en el sentido del vector normal a la superficie.

Superficies biláteras. Ejemplos y definiciones previas.

Definition *Se define una **superficie parametrizada** S como la imagen de una función* $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. *A la función* Φ *se le llama **parametrización** de S. Si* Φ *es diferenciable (lo que equivale a decir que sus componentes son funciones diferenciables), se dice que la superficie S es **diferenciable**.*

Remark *En general, y al igual que ocurre con las curvas, se tiende a confundir la superficie con su gráfica en el espacio. Sin embargo, ésta última se define como*

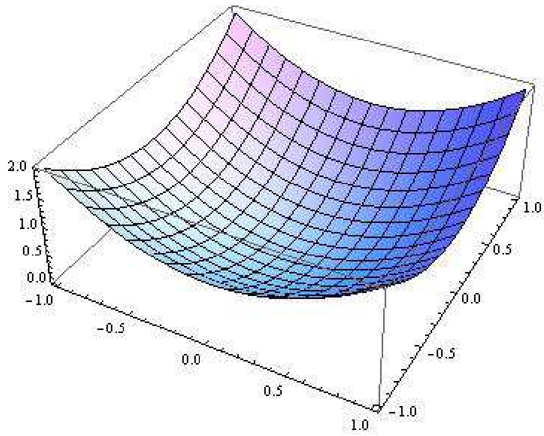
$$gráfica(\Phi) = \{\Phi(u,v) \mid (u,v) \in \Omega\}$$

que es el conjunto de $\mathbb{R}^3$ *que representa a* Φ.

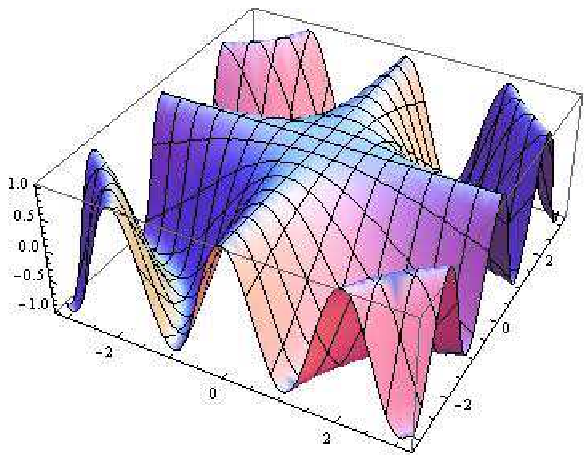
Example *Dada una función de dos variables* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *ésta define de forma natural una superficie de la forma* $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = u \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$$

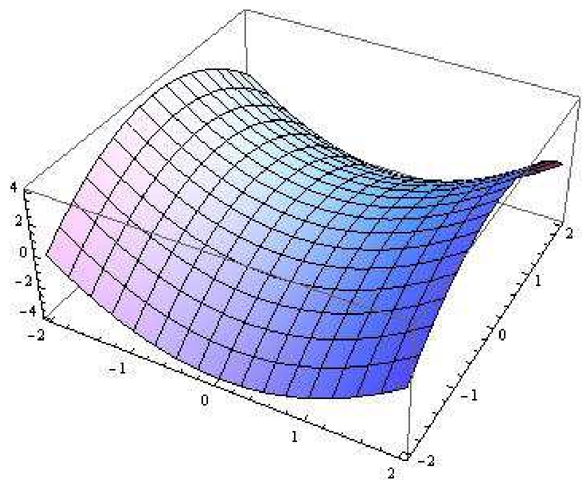
Así, por ejemplo, si consideramos $f(x,y) = x^2 + y^2$ *definida en* $D = [-1,1] \times [-1,1]$ *se obtiene una superficie cuya gráfica viene dada por*



De igual forma la gráfica de $f(x,y) = cos(x \cdot y)$ definida en $D = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ es



Caso aparte es la "silla de montar", que es la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ que, por ejemplo definida en $D = [-2,2] \times [-2,2]$, resulta ser



Example ***(Plano)*** *Obviamente, cualquier plano de $\mathbb{R}^3$ es una superficie. Sabemos que un plano viene dado por una ecuación del tipo $Ax + By + Cz + D = 0$. Si, por ejemplo,* suponemos que $A \neq 0$, podremos despejar x de la ecuación anterior y obtendremos que el plano viene dado por la siguiente parametrización $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x(u,v) = \frac{1}{A}(D - By - Cz) \\ y(u,v) = u \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

Example ***(Esfera y elipsoide)*** *El elipsoide de centro* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *viene dado por la ecuación implícita*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

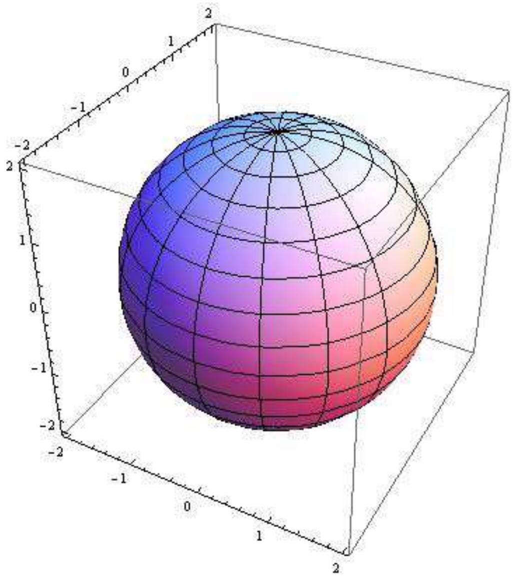
donde $a,\ b,\ c$ *son reales positivos. Cuando* $a = b = c = R$*, obtenemos una esfera de radio* R*, dada por las ecuaciones*

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

En este caso, para dar una parametrización de la misma puede ser aconsejable usar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = x_0 + R\cos\varphi\sin\theta \\ y(\varphi,\theta) = y_0 + R\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = z_0 + R\cos\theta \end{cases}$$

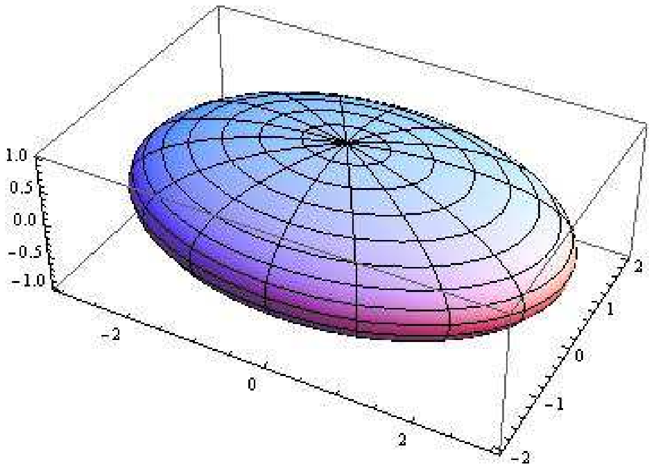
donde $\varphi \in [0, 2\pi]$ *y* $\theta \in [0, \pi]$. *Por ejemplo, si consideramos que la esfera está centrada en el origen y que su radio es* $R = 2$ *su representación gráfica será*



En el caso más general del elipsoide, la parametrización será de la forma

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = x_0 + a\cos\varphi\sin\theta \\ y(\varphi,\theta) = y_0 + b\sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = z_0 + c\cos\theta \end{cases}$$

de manera que si consideramos el elipsoide centrado en $(0,0,0)$ *y con semiejes* $a = 3,\ b = 2$ *y* $c = 1$ *tendremos*



En este caso también podríamos haber considerado para parametrizar la esfera la misma consideración que hemos realizado anteriormente para cualquier función de dos variables de los ejemplos anteriores, aunque en tal caso la esfera sería la unión de dos gráficas cuyas parametrizaciones serían

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = +\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{cases}$$

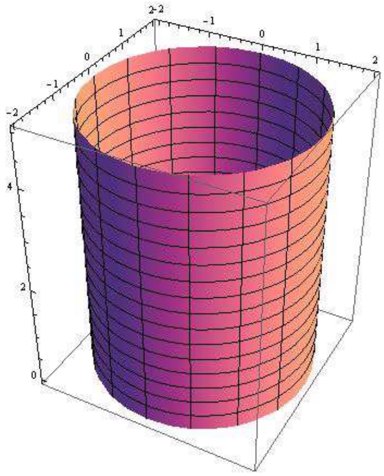
Example ***(Cilindros)*** *Un cilindro podemos pensarlo como una superficie que se genera al repetir una curva plana una cantidad infinita de veces, o lo que es lo mismo, la superficie que se genera al desplazar una curva plana a lo largo, por ejemplo, de un eje. Consideremos como ejemplo un cilindro de base circular, dado por la ecuación* $x^2 + y^2 = R^2$*, donde* $0 \leq z \leq h$*. Notemos que es la base del cono (en este caso la circunferencia* $x^2 + y^2 = R^2$*) la que se repite. Por ello, si la curva plana tiene por ecuaciones paramétricas* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *con* $t \in [a,b]$*, una posible parametrización para el cono de base* $\gamma(t)$ *sería la dada por*

$$\begin{cases} x(u,v) = x(u) \\ y(u,v) = y(u) \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

con $u \in [a,b]$ *y* $v \in [0,h]$*. Por ejemplo, si tomamos el cilindro de base* $x^2 + y^2 = 4$*, donde* $0 \leq h \leq 5$*, su parametrización sería*

$$\begin{cases} x(u,v) = 2\cos u \\ y(u,v) = 2\sin u \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

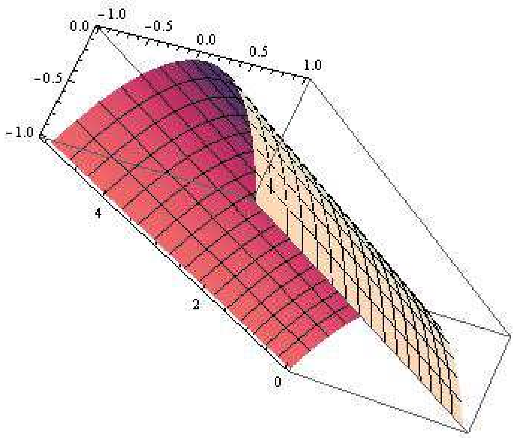
con $u \in [0, 2\pi]$ *y* $v \in [0,5]$*.*



Para el caso de un cilindro parabólico con base la parábola $y = -x^2$ se parametriza como

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = -u^2 \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

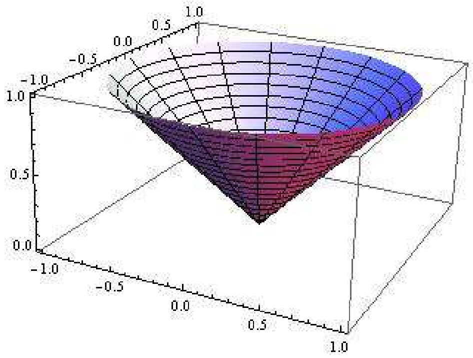
y si consideramos que $u \in [-1,1]$ y $v \in [0,5]$, tendremos



Example ***(Conos)*** *La ecuación normalizada de un cono viene dada por $x^2 + y^2 = z^2$. Para parametrizar dicha superficie es aconsejable tomar coordenadas cilíndricas. Para ello sabemos que para cada $z = z_0 \in \mathbb{R}$ se tiene una circunferencia $x^2 + y^2 = z_0^2$, que se escribe en coordenadas polares, teniendose por tanto la parametrización*

$$\begin{cases} x(u,v) = v\cos u \\ y(u,v) = v\sin u \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

con $u \in [0,2\pi]$ y $v \in \mathbb{R}$. Si lo representamos con $v \in [0,1]$ se tiene



Supongamos entonces que Φ es una superficie diferenciable en (u_0, v_0). Si le damos a u un valor fijo u_0, se obtiene una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto \Phi(u_0, t)$ cuya imagen es una curva

$$\Phi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

sobre la superficie, y cuyo vector tangente en el punto v_0 está dado por

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

De manera análoga, si fijamos $v = v_0$ tendremos la curva $t \mapsto \Phi(t, v_0)$ dada por

$$\Phi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

que tiene por vector tangente en u_0 el dado por

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

Como los vectores T_u y T_v son tangentes a dos curvas sobre la superficie en el punto $\Phi(u_0, v_0)$, deben determinar un **plano tangente** a la superficie en este punto; esto es, el vector $\vec{n} = T_u \times T_v$ es normal a la superficie. Así, se dice que la superficie es **suave en un punto** $\Phi(u_0, v_0)$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ en (u_0, v_0). La superficie S es **suave** si es suave en todos los puntos de S. Intuitivamente, que una superficie sea suave significa que no tiene "esquinas".

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) viene dado por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0$$

Veamos algunos ejemplos:

Example *Sea la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dada por su parametrización (coord. esféricas)*

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = \cos\varphi \sin\theta \\ y(\varphi, \theta) = \sin\varphi \sin\theta \\ z(\varphi, \theta) = \cos\theta \end{cases}$$

con $\varphi \in [0, 2\pi]$ $\theta \in [0, \pi]$. Entonces

$$T_\varphi = (-\sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi \sin\theta, 0)$$
$$T_\theta = (\cos\varphi \cos\theta, \sin\varphi \cos\theta, -\sin\theta)$$

y el vector normal será

$$\vec{n} = T_\varphi \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\cos\varphi \cdot (\sin\theta)^2, -\sin\varphi(\sin\theta)^2, -\sin\theta\cos\theta\right) =$$

$$= -\sin\theta \cdot (x(\varphi,\theta), y(\varphi,\theta), z(\varphi,\theta))$$

Example *Sea el cono dado por la parametrización*

$$\begin{cases} x(u,v) = u\cos v \\ y(u,v) = u\sin v \\ z(u,v) = u \end{cases}$$

con $u \in [0,1]$ *y* $v \in [0,2\pi]$. *Entonces*

$$T_u = (\cos v, \sin v, 1) \quad y \quad T_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

y el vector normal será

$$\vec{n} = T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (u\cos v, u\sin v, u) = u \cdot (\cos v, \sin v, 1)$$

por lo que el cono será suave excepto cuando $u = 0$, *o lo que es lo mismo en el el punto* $(0,0,0)$.

Al igual que en el caso de las integrales de línea interviene el sentido del recorrido de la curva de integración, en las integrales de superficie es necesario distinguir las dos caras de la superficie (siempre se trabajarán con **superficies biláteras** u **orientables**). La distinción entre ambas caras de integración se hará a través de criterios basados en el sentido del vector normal a la superficie. El criterio más usual, y que será el que nosotros emplearemos, consiste en tomar como **cara superior** o **positiva** aquella en la que el vector normal forma en cada uno de sus puntos un ángulo agudo con la dirección positiva del eje *OZ*, es decir, tal que $\cos\gamma > 0$, siendo $\cos\gamma$ el coseno director en dicho eje; análogamente, la **cara inferior** o **negativa** será aquella en la que el vector normal forma un ángulo obtuso con la dirección positiva del eje *OZ*, es decir, tal que $\cos\gamma < 0$. Ambas caras se encuentran separadas por el **contorno** o **frontera**, de forma que un punto móvil sobre la superficie, para pasar de una a otra cara, deberá interceptar al contorno.

Antes de proceder con integrales de superficie consideraremos primero el problema de calcular el área de una superficie, de forma análoga a como en el capítulo anterior se consideró el problema de hallar la longitud de un arco de curva:

Definition *Se define el* ***área de una superficie parametrizada*** *S mediante*

$$A(S) = \iint_\Omega \|T_u \times T_v\| \cdot dudv$$

donde $\|T_u \times T_v\|$ *es la norma de* $T_u \times T_v$. *Si S es la unión de superficies* S_i, *su área es la suma de las áreas de las* S_i.

Example *Vamos a calcular el área de la esfera de radio 1 dada en el penúltimo ejemplo* *anterior: Como sabemos que*

$$\vec{n} = T_\varphi \times T_\theta = \left(-\cos\varphi \cdot (\sin\theta)^2, -\sin\varphi(\sin\theta)^2, -\sin\theta\cos\theta\right)$$

será

$$A(S) = \iint_\Omega \|T_\varphi \times T_\theta\| \cdot d\varphi d\theta = \ldots = \iint_\Omega \sin\theta \cdot d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta = 4\pi$$

Remark *Para el caso particular en que la superficie S venga dada en la forma $z = f(x,y)$, ésta admitirá la parametrización dada por $x = u,\ y = v,\ z = f(u,v)$, por lo que si f es de clase $\mathbb{C}^{(1)}$, la fórmula para el cálculo del área de S se reduce a*

$$A(S) = \iint_\Omega \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

Establecidos estos preámbulos, podremos pasar a definir el concepto de integral de superficie, lo que haremos inicialmente para el caso de funciones escalares, y con posterioridad extenderemos dicha definición al caso de funciones vectoriales.

Integral de superficie.

Integrales de funciones escalares sobre superficies.

Definición y propiedades.

Consideremos una superficie S bilátera, dada por su ecuación paramétrica $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y sea $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar definido sobre S, que supondremos también acotado y continuo. Para definir la integral de F sobre S, procederemos como en temas anteriores: Realizaremos una partición arbitraria de S en n **áreas curvas parciales** (**escamas de superficie**), cada una de ellas con área $\triangle_k S,\ (k = 1, 2, \ldots, n)$. En cada una de ellas elegiremos un punto arbitrario intermedio $(\zeta_k, \eta_k, \delta_k)$. La suma integral (suma de Riemann) se define como la suma de productos de los valores que toma F en los puntos intermedios por las correspondientes áreas parciales:

$$F(\zeta_1, \eta_2, \delta_3) \cdot \triangle_1 S + \ldots + F(\zeta_n, \eta_n, \delta_n) \cdot \triangle_n S = \sum_{k=1}^n F(\zeta_k, \eta_k, \delta_k) \cdot \triangle_k S$$

Definition *Si existe el límite de la suma anterior cuando $n \to \infty$ y $\triangle_k S \to 0$ (es decir, cuando consideramos una sucesión de particiones de S cada vez más finas y con norma tendiendo a 0), siendo este límite independiente de la partición en áreas curvas parciales realizada y de la elección de los puntos intermedios, a su valor le llamaremos* ***integral de superficie*** *de $\Phi(x,y,z)$ sobre S, y se representará por $\iint_S F \cdot dS$, es decir*

$$\iint_S F \cdot dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle_k S \to 0}} \sum_{k=1}^n F(\zeta_k, \eta_k, \delta_k) \cdot \triangle_k S$$

Por supuesto, y como ya hemos visto cada vez que hemos introducido un nuevo concepto de integral, esta definición no nos servirá para abordar directamente el cálculo de la integral de superficie, aunque si nos permitirá establecer sus propiedades más importantes. Entre éstas, resaltaremos:

Proposition *En las condiciones anteriores, se verifican:*

a) Las funciones continuas en S son integrables.

b) Las funciones casicontinuas (funciones acotadas con, a lo sumo, un número finito de discontinuidades) son integrables.

c) ***Linealidad****:*

$$\iint_S (F+G)\cdot dS = \iint_S F\cdot dS + \iint_S G\cdot dS$$

y

$$\iint_S c\cdot F\cdot dS = c\iint_S F\cdot dS \quad (c\ cte)$$

d) ***Partición del dominio de integración****: Si* $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$*, siendo* S_i *superficies que no se intersectan excepto, quizá, a lo largo de las curvas que definen sus fronteras, entonces*

$$\iint_S F\cdot dS = \sum_{i=1}^{m}\iint_{S_i} F\cdot dS$$

Cálculo práctico de integrales de funciones escalares sobre superficies.

Una vez establecido el concepto de integral de superficie, para abordar su cálculo desde el punto de vista práctico. Para ello distinguiremos que la superficie S venga dada por una parametrización o por una expresión explícita (por ejemplo, de la forma $z = f(x,y)$). En cualquiera de estos casos habremos de sustituir dS en función de algo que sepamos calcular (por ejemplo, si S viene dada por sus ecuaciones paramétricas con parámetros u,v, tendremos que expresar dS en términos de du, dv; si S viene dada por $z = f(x,y)$, tendremos que expresar dS en términos de dx y dy). En definitiva, se prueba que tenemos los siguientes casos:

- Si S viene dada por $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, resulta ser

$$\iint_S F\cdot dS = \iint_\Omega F(\Phi(u,v))\cdot \|T_u \times T_v\|\cdot dudv$$

que ya es una integral doble sobre el recinto Ω.

- Si S viene dada en forma explícita, distiguiremos los siguientes casos, según proyectemos sobre según que plano coordenado:
  - Proyección sobre $0XY$: En este caso S viene dada por una ecuación de la forma $z = f(x,y)$. Entonces si representamos por D_1 a la proyección de S sobre el plano $0XY$, se obtiene

$$\iint_S F\cdot dS = \iint_{D_1} F(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dxdy$$

De forma análoga:

  - Proyección sobre $0XZ$: Si representamos por D_2 a esta proyección y si la ecuación de S viene dada en forma explícita por $y = y(x,z)$,

$$\iint_S F\cdot dS = \iint_{D_2} F(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\cdot dxdz$$

  - Proyección sobre $0YZ$: Si representamos por D_3 a la proyección y si la ecuación de S viene dada en forma explícita por $x = x(y,z)$,

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{D_3} F(x(y,z),y,z)\,\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\ \cdot dydz$$

Example *Calcular* $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ *siendo S la superficie* $z = 2 - (x^2 + y^2)$.

Remark *Estas fórmulas de cálculo se aplican directamente en el caso de que S presente regularidad según las direcciones de los ejes. En otros casos será preciso realizar una partición previa de la superficie S en porciones regulares, de acuerdo con la propiedad de partición del dominio de integración.*

Remark *En el caso de que la ecuación de S venga dada en forma implícita por* $G(x,y,z) = 0$, *resultarán las siguientes fórmulas de cálculo:*

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{D_1} F(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_z|} \cdot dxdy$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{D_2} F(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_y|} \cdot dxdz$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{D_3} F(x,y,z)\frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_x|} \cdot dydz$$

Example *Calcular* $\iint_S dS$ *extendida al casquete de radio* $\frac{R}{2}$ *de la esfera de radio R.*

Integrales de superficie de funciones vectoriales.

La definición de integral de superficie para funciones escalares puede extenderse al caso de funciones vectoriales en la forma siguiente: Dado un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ definido sobre *S*, se define la **integral de superficie de** $\vec{\mathbf{F}}$ **sobre** *S*, y se denotará por $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot dS$, como la integral de superficie de la componente normal (a la que representaremos por $\vec{\mathbf{n}}$) de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la superficie, es decir

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot dS = \iint_S\ < \vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{n}} > dS$$

donde $< \vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{n}} >$ representa el producto escalar de ambos vectores (que también solemos representar por $\vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{n}}$). A esta última, que no es sino la integral de superficie de una función escalar, se le conoce como **flujo del campo** $\vec{\mathbf{F}}$ **a través de la superficie** *S*. Por tanto

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot dS = \iint_\Omega\ < \vec{\mathbf{F}}(\Phi(u,v)), \vec{\mathbf{n}} > dudv = \iint_\Omega\ < \vec{\mathbf{F}}(\Phi(u,v)), T_u \times T_v > dudv$$

Example *Consideremos la esfera de radio 1 dada por su correspondiente parametrización (vista en un ejemplo anterior). Sea* $\vec{F} = (x,y,z)$. *Para calcular el flujo del campo* $\vec{F}$ *a través de dicha esfera hemos de calcular*

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_\Omega\ < \vec{F}(\Phi(\varphi,\theta)), T_\varphi \times T_\theta > d\varphi d\theta$$

Como sabemos que

$$T_\varphi \times T_\theta = -\sin\theta \cdot (x(\varphi,\theta), y(\varphi,\theta), z(\varphi,\theta))$$

y

$$\vec{F}(\Phi(\varphi,\theta)) = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$$

(sólo hemos de sustituir en $\vec{F}$ *las expresiones de* $\Phi(\varphi,\theta)$*), tendremos entonces*

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_\Omega < (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta), -\sin\theta \cdot (x(\varphi,\theta), y(\varphi,\theta), z(\varphi,\theta)) > d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_\Omega -\sin\theta \cdot d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (-\sin\theta) d\theta = -4\pi$$

Example *Calcular* $\iint_S \vec{F} \cdot dS$ *siendo* $\vec{F} = (x \cdot y, -x^2, x+z)$ *y S la parte del plano* $2x + 2y + z = 6$ *que queda en el primer octante.*

Teoremas fundamentales de la Teoría de Campos.

Las integrales de funciones vectoriales intervienen en el campo de la física matemática en lo que se conoce como **Teoría de Campos**, y en concreto en dos teoremas de gran importancia: el *teorema de Stokes* y el *teorema de la divergencia*. Las expresiones vectoriales de ambos teoremas proporcionan interpretaciones físicas relacionadas con trabajos de circulación y flujos vectoriales, que tomarán especial relevancia en los casos de vectores conservativos y solenoidales.

Teorema de Stokes.

El teorema de Stokes constituirá el resultado principal de la teoría de integrales de superficie. Se trata de una generalización del teorema de Green en el plano. Recordemos que este teorema relacionaba la integral sobre una región plana con la integral de línea sobre la frontera de la región; en el teorema de Stokes se relacionará una integral de superficie con la integral de línea a lo largo del borde de dicha superficie:

Theorem ***(Stokes)*** *Sea S una superficie orientable limitada por una curva cerrada y simple* γ*, con un vector normal unitario* $\vec{n}$*. Si* $\vec{F}$ *es un campo vectorial con derivadas parciales de primer orden continuas sobre S, entonces*

$$\oint_\gamma \vec{F} \bullet \vec{dr} = \iint_S \left(rot\vec{F}\right) \bullet \vec{n} \cdot dS$$

Remark *Esta igualdad expresa que la integral curvilínea de la componente tangencial a un vector* $\vec{F}$ *alrededor de una curva simple cerrada* γ*, que limita una porción de superficie S (también conocido como* ***trabajo de circulación****), coincide con el flujo de su rotacional a través de dicha superficie en la dirección normal a la cara de integración que se considere. En el caso en que el campo* $\vec{F}$ *sea conservativo (es decir, si* $rot\vec{F} = \vec{0}$*), se verifica que* $\oint_\gamma \vec{F} \bullet \vec{dr} = 0$*, como ya sabemos.*

Example *Calcular* $\iint_S \left(rot\vec{F}\right) \bullet \vec{n} \cdot dS$*, siendo* $\vec{F} = (3y, -x \cdot z, y \cdot z^2)$*, S la superficie del paraboloide* $2z = x^2 + y^2$ *limitado por* $z = 2$ *y* γ *el contorno de S.*

Example *Si* $\vec{F} = (y, -x, y \cdot z)$*, calcular* $\iint_S \left(rot\vec{F}\right) \bullet \vec{n} \cdot dS$*, siendo S la parte de la superficie* $z = 2x^2 + 2y^2$*, con* $z \leq \frac{1}{2}$*. Hacerlo directamente y mediante el teorema de Stokes.*

Remark *Este teorema puede generalizarse a superficies que no cumplan las restricciones impuestas, siempre que dicha superficie S pueda dividirse en superficies* S_1*,* S_2*,*

$\ldots, S_k$, de contornos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, que si cumplan las restricciones. Se aplica entonces el teorema a cada superficie y, sumando las integrales de cada miembro, se obtendrá el resultado final.

Example *Comprobar el teorema de Stokes para $\vec{F} = (2z, x, y^2)$ sobre la superficie S del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, siendo γ la base de S sobre el plano 0XY.*

Teorema de la divergencia.

El teorema de la divergencia, también conocido como **teorema de Gauss-Ostrogradsky** o como **teorema de Green en el espacio**, es otra forma de extensión del teorema de Green en el plano y relaciona una integral tomada sobre una superficie cerrada S, que limita un volumen V, con una integral triple extendida sobre V :

Theorem ***(Divergencia)*** *Sea S una superficie cerrada que encierra una región de volumen V, donde se toma como dirección positiva la de la normal exterior a la superficie. Dadas 3 funciones A_1, A_2, A_3 de clase $\mathcal{C}^{(1)}$ en dicha región, se verifica que si α, β y γ son los ángulos de la normal con cada uno de los ejes coordenados (es decir, si $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$), entonces*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S (A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta + A_3 \cos\gamma) \cdot dS$$

Remark *La igualdad anterior se puede expresar en forma vectorial como*

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{F} \cdot dxdydz = \iint_S \vec{F} \bullet \vec{n} \cdot dS$$

lo cual quiere decir que la integral de superficie de la componente normal de un vector $\vec{F}$ (es decir, el flujo) en una superficie cerrada coincide con la integral de la divergencia de dicho vector en el volumen que encierra la superficie.

Example *Sea V la región sólida limitada por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + z = 6$. Calcular $\iint_S \vec{F} \bullet \vec{n} \cdot dS$ siendo $\vec{F} = (x, y^2, z)$.*

Remark *Este teorema puede generalizarse a cualquier tipo de superficies cerradas en el espacio (para ello, sólo habremos de dividir estas superficies en otras que sean del tipo que aparecen en el enunciado anterior, y calcularemos el flujo a través de cada una de ellas).*

Remark *En caso de que la superficie S sea abierta, para aplicar este teorema, habremos de cerrar ésta mediante superficies elementales, de manera que calcularemos, mediante el teorema de Gauss, el flujo total a través de toda la superficie cerrada y posteriormente calcularemos el flujo a través de la superficie abierta como diferencia entre el flujo total y los flujos de las superficies elementales.*

Example *Calcular, mediante el teorema de Gauss, $\iint_{S_1} \vec{F} \bullet \vec{n} \cdot dS$ siendo $\vec{F} = (x \cdot y, 1, z + 1)$ y S_1 la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $z \geq 0$.*

Example *Sea $\vec{F} = (x \cdot z, 3x \cdot y, -2z)$. Calcular $\iint_S \vec{F} \bullet \vec{n} \cdot dS$, aplicando el teorema de Gauss, en los siguientes casos:*

a) S es el cilindro cerrado limitado por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ y $z = 3$.

b) S es la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \leq z \leq 3$.

Aplicaciones de la integral de superficie.

Las aplicaciones geométricas se limitan a la evaluación del área de porciones de superficie curvas, y las de carácter físico están relacionadas con el cálculo de masas, centros de masas y momentos de inercia de distribuciones de materia sobre superficies curvas:

- **Área de una porción de superficie:** Si la función integrando es la unidad, de acuerdo con la definición

$$A = \iint_S dS$$

- **Masa de una distribución superficial**:

- **Centros de masas de una distribución superficial:**

- **Momentos de inercia de una distribución superficial:**