Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 3. LA INTEGRAL DE LÍNEA. APLICACIONES.

Como ya hemos visto, el concepto de integral simple de Riemann se estableció para funciones reales definidas y acotadas en un intervalo compacto $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si se modifican las condiciones y se considera que, o bien el intervalo o bien la función no están acotados, se obtiene una primera generalización del concepto de integral: las integrales impropias, que fueron estudiadas en la asignatura de Cálculo I. Otra forma de modificar las condiciones es considerar funciones reales definidas y acotadas en un intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$, obteniéndose así la integral múltiple de Riemann, ya estudiada en un tema anterior.

Un nuevo concepto de integración se introduce al considerar una curva γ en lugar de un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. De esta forma, obtendremos lo que se conocerá por i**ntegral de línea** o **integral curvilínea** a lo largo de γ. El estudio de esta integral será desarrollado en este tema.

Curvas.

Definition *Se llama **curva parametrizada** en $\mathbb{R}^3$ a una aplicación*

$$\begin{aligned} \gamma \ &: \ I \to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

siendo I un subconjunto de $\mathbb{R}$. Así, como $\gamma(t)$ es un vector, podríamos expresar $\gamma(t) \equiv \overrightarrow{\gamma(t)}$, aunque por comodidad en la notación siempre escribiremos $\gamma(t)$.

*Si esta aplicación es continua (es decir, si sus componentes lo son) se dirá que la **curva** es **continua**, si es diferenciable, la **curva** es **diferenciable**, etc.*

*En el caso en que $I = [a,b]$ diremos que γ es un **arco de curva de origen** $\gamma(a)$ **y extremo** $\gamma(b)$; y si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dirá que la **curva** es **cerrada**.*

Si existen dos valores diferentes t_1, t_2 tales que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ se dice que t_1 es un punto múltiple.

Remark *Las mismas definiciones podemos dar para el caso de*

$$\begin{aligned} \gamma \ &: \ I \to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

*a la que denominaremos **curva plana**.*

Remark *Hemos de observar que la definición que hemos dado de curva es para una curva parametrizada, es decir, en coordenadas paramétricas. Esto suele ser "obligatorio" en el caso de curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, para el caso de curvas en el plano, no siempre será necesario utilizar una parametrización, ya que conocemos que cuando tenemos una expresión de la forma $y = f(x)$, con $x \in [a,b]$, sabemos que esta función de una variable también nos define una curva plana.*

Hemos de notar que si tenemos una expresión de esta forma, es inmediato expresar esta curva en coordenadas paramétricas, puesto que si hacemos

$$\left\{\begin{array}{c} x = t \\ y = f(t) \end{array}\right. \quad con\ x \in [a,b]$$

tendremos que la curva que viene dada en explícitas por $y = f(x)$ *tiene por parametrización*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(t,\ f(t)\right)$$

Definition *A una curva continua y sin puntos múltiples se le llama* ***curva simple o de Jordan****. Si la curva no es plana, se le llama* ***curva alabeada****.*

Example *Representamos varios ejemplos de curvas:*

a) La parametrización

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(cos(t),\ sin(t)\right)$$

corresponde a la circunferencia unidad (que en explícitas viene dada por $x^2 + y^2 = 1$*). Notemos que se trata de una curva cerrada puesto que* $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$*.*

b) La parametrización

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(cos(t),\ sin(t)\right)$$

corresponde a la semicircunferencia unidad (es decir, la parte superior $x^2 + y^2 = 1$*). Notemos que para esta curva también podemos dar otra parametrización diferente, puesto que al venir dada su ecuación por* $y = \sqrt{1 - x^2}$*, siendo* $-1 \le x \le 1$*, podemos considerar*

$$\gamma' : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma'(t) = \left(t,\ \sqrt{1 - t^2}\right)$$

c) La parametrización

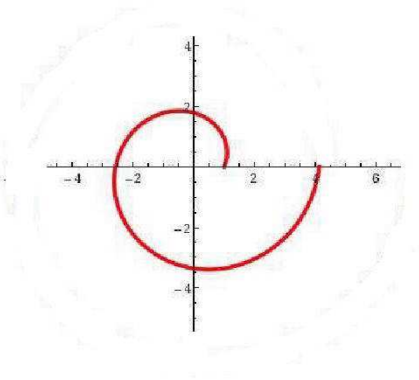
$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(a\,cos(t),\ b\,sin(t)\right)$$

corresponde a una elipse centrada en el origen y de semiejes a y b (que en cartesianas tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*).*

d) La parametrización

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(\left(1 + \tfrac{t}{2}\right) cos(t), \; sin(t) \right)$$

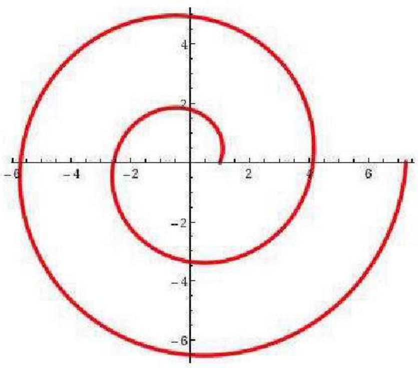
corresponde a la gráfica



mientras que

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(\left(1 + \tfrac{t}{2}\right) cos(t), \; sin(t) \right)$$

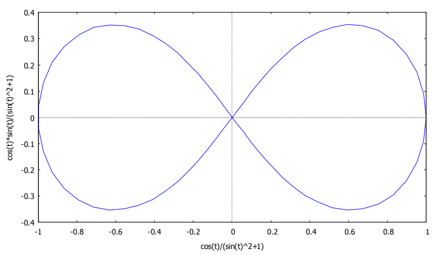
sería



e) Un ejemplo de curva que no es simple (por tener puntos múltiples) pero sí cerrada viene dada por

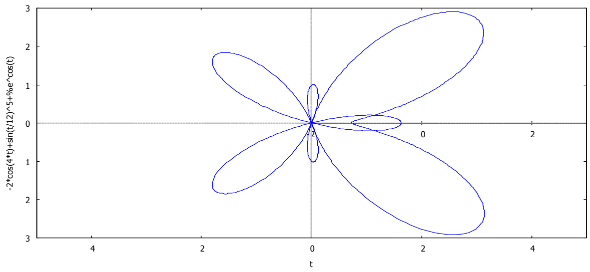
$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(\frac{cos(t)}{1+sin^2(t)}, \frac{cos(t)\, sin(t)}{1+sin^2(t)} \right)$$

cuya gráfica es



f) Otra curva con muchos puntos múltiples viene dada por

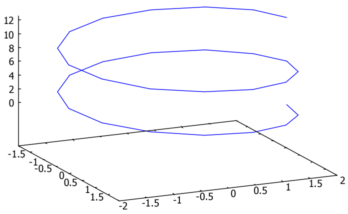
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = \left(t, e^{cos(t)} - 2cos(4t) + sin^5\left(\frac{t}{12}\right)\right)$$



g) La parametrización

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$\gamma(t) = \left(2cos(t), 2sin(t),\ t\right)$$

corresponde a la espiral (curva en $\mathbb{R}^3$)



(En los ejercicios de este tema así como en los exámenes de años anteriores, hay otros ejemplos de curvas).

Remark *Dada una curva cerrada plana, ésta puede recorrerse en dos sentidos. En el plano XY consideramos que* ***se recorre en sentido positivo*** *cuando va en sentido contrario a las agujas del reloj. En caso opuesto, se recorrerá en* ***sentido negativo****.*

En general, puede decirse que una curva es ***positiva*** *cuando en el recorrido la región encerrada queda a la izquierda de la curva, mientras que es* ***negativa*** *cuando la región encerrada queda a la derecha.*

Definition *Se llama* ***región simplemente conexa*** *a aquella región de $\mathbb{R}^2$ (lo mismo puede definirse en $\mathbb{R}^3$ aunque entonces diremos que es una bola conexa) en la cual puede reducirse a un punto cualquier curva cerrada simple. Se llama* ***región múltiplemente conexa*** *a aquella en la que no es posible lo anterior.*

Definition *Se llama* ***recta tangente a la curva*** $\gamma(t)$ *en el punto* t_0 *a la curva (recta) dada por*

$$\delta(t) = \overrightarrow{\gamma(t_0)} + \lambda\ \overrightarrow{\gamma'(t_0)}$$

o simplemente

$$\delta(t) = \gamma(t_0) + \lambda\ \gamma'(t_0)$$

ecuación que viene dada en forma vectorial, mientras que en forma paramétrica sus ecuaciones son

$$\begin{cases} x - x(t_0) = \lambda\, x'(t_0) \\ y - y(t_0) = \lambda\, y'(t_0) \\ z - z(t_0) = \lambda\, z'(t_0) \end{cases}$$

y en forma continua

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Definition *Si* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *es una curva de clase* $\mathcal{C}^{(1)}$, *la* **longitud** *de esta curva viene dada por el nº real*

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t_0)\|dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Remark *Notemos que cuando se trata de una curva plana dada por su forma habitual* $y = f(x)$, *la longitud de la misma en el intervalo* $I = [a,b]$ *viene dada por (haremos, como hemos indicado anteriormente, la parametrización* $x = t,\ y = f(t)$*)*

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

que es la fórmula ya conocida por nosotros (ver apuntes de Aplicaciones de la Integral Definida en Matemáticas I).

La integral de línea. Definición y propiedades.

Normalmente nos vamos a centrar en la definición, propiedades y cálculo de una integral de línea de un campo vectorial $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ en el plano (análogamente veremos que se hace en el espacio), ya que es este tipo de integral el que se suele utilizar habitualmente por sus aplicaciones (sobre todo físicas, relacionadas con el cálculo de trabajos). Sin embargo, también es posible calcular la integral de un campo escalar a lo largo de una curva, como vemos a continuación:

Definition ***(Integral de línea de un campo escalar)*** *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^{2\text{ o }3} \to \mathbb{R}$ *un campo escalar y* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{2\text{ o }3}$ *una curva parametrizada. La integral del campo escalar* f *a lo largo de* γ *se calcula como la integral simple dada por*

$$\int_\gamma f\, dl := \int_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ dt$$

Example *Calcular la integral del campo* $f(x,y,z) = xy + z^2$ *a lo largo de la curva* $\gamma(t) = (cos(t), sin(t), 2t)$, *con* $t \in [0, 2\pi]$:

Según la anterior definición, hemos de calcular

$$f(\gamma(t)) = f(cos(t), sin(t), 2t) = cos(t)\, sin(t) + (2t)^2$$

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-sin(t), cos(t), 2)\| = \sqrt{(-sin(t))^2 + (cos(t))^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

por lo que

$$\int_\gamma (xy + z^2)\, dl = \int_0^{2\pi} \left(cos(t)\, sin(t) + (2t)^2\right) \sqrt{5}\, dt = \ldots = \frac{32}{3}\pi^3\sqrt{5}$$

Remark *Las propiedades para este tipo de integral (por ejemplo, linealidad, unión de caminos, etc.), son las mismas que las que se verán a continuación para el caso de campos vectoriales.*

A continuación nos centraremos en el estudio de la **integral de línea de un campo vectorial** a lo largo de una curva plana o en 3D, aunque esta terminología no la vamos a emplear hasta más adelante. Como se observará a continuación, el esquema que se va a seguir es muy similar al que se utiliza en Matemáticas I a la hora de introducir la integral simple o múltiple de Riemann:

Sea γ una curva en el plano OXY que une los puntos $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$ y sean $P, Q : \gamma \to \mathbb{R}$ continuas. Si se divide γ en n partes eligiendo $n+1$ puntos sobre la misma,

$$(x_0, y_0) = (a_1, b_1),\ (x_1, y_1),\ ...,\ (x_n, y_n) = (a_2, b_2)$$

obtendremos una partición $\mathcal{P}$ de la curva γ en n **arcos parciales**. Denotemos por $\triangle\ l_k$ a la longitud del arco de curva entre los puntos $(x_{k-1}, y_{k-1}),\ (x_k, y_k)$.

Definition *Se llama* ***norma de la partición*** $\mathcal{P}$ *a*

$$\|\mathcal{P}\| = max\left\{\triangle\ l_k;\ k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

Definition *Dadas dos particiones* $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{Q}$ *de* γ, *se dice que* $\mathcal{P}$ *es* ***más fina*** *que* $\mathcal{Q}$ *si todos los puntos de* $\mathcal{Q}$ *están en* $\mathcal{P}$ *y además* $\|\mathcal{P}\| < \left\|\mathcal{Q}\right\|$.

De esta forma, si denotamos por

$$\triangle\ x_1 = x_1 - x_0, \triangle\ x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \triangle\ x_n = x_n - x_{n-1}$$

$$\triangle\ y_1 = y_1 - y_0, \triangle\ y_2 = y_2 - y_1, \ldots, \triangle\ y_n = y_n - y_{n-1}$$

y si tomamos n puntos sobre la curva

$$(\zeta_1, \eta_1), (\zeta_2, \eta_2), \ldots, (\zeta_n, \eta_n)$$

interiores cada uno de ellos a cada uno de los arcos parciales de la partición, podremos calcular la siguiente suma

$$\sum_{k=1}^{n}\{P(\zeta_k,\eta_k)\cdot\triangle x_k + Q(\zeta_k,\eta_k)\cdot\triangle y_k\}$$

a la que denominaremos **suma de Riemann asociada a la partición** $\mathcal{P}$.

Definition *Si se considera una sucesión de particiones cada vez más finas y con norma tendiendo a cero de* γ*, y si existe*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{P(\zeta_k,\eta_k)\cdot\triangle x_k + Q(\zeta_k,\eta_k)\cdot\triangle y_k\}$$

siendo éste independiente de los puntos (ζ_k,η_k) *y de los valores* $\triangle x_k$ *y* $\triangle y_k$*, a su valor se le denomina* ***integral de línea*** *(o* ***integral curvilínea****)* ***a lo largo de*** γ ***entre los puntos*** $A(a_1,b_1)$ *y* $B(a_2,b_2)$*, y se denota por*

$$\int_\gamma\{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

o por

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)}\{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

Remark *Notemos que el valor de esta integral depende, inicialmente, de* P*,* Q *y* γ*, así como de los límites de integración (origen y extremo de* γ*)* $A(a_1,b_1)$ *y* $B(a_2,b_2)$*.*

Remark *En el caso en que la curva* γ *sea cerrada, a la integral a lo largo de* γ *suele denotarse por*

$$\oint_\gamma\{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$$

De forma análoga, puede darse la definición para el caso de una curva en $\mathbb{R}^3$:

Definition *En las anteriores condiciones, si se considera una sucesión de particiones cada vez más finas y con norma tendiendo a cero de* γ*, se define*

$$\int_\gamma\{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\}$$

como

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{P(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)\cdot\triangle x_k + Q(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)\cdot\triangle y_k + R(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)\cdot\triangle z_k\}$$

siempre que este límite exista y sea independiente de los puntos $(\zeta_k,\eta_k,\delta_k)$ *elegidos sobre la curva y de los incrementos* $\triangle x_k$*,* $\triangle y_k$*,* $\triangle z_k$ *(y donde estamos suponiendo que las funciones* P,Q *y* R *son continuas en todo punto de* γ*).*

Remark ***(Notación vectorial de la integral de línea)****. La representación en forma vectorial para la integral de línea es aconsejable en aplicaciones físicas o geométricas, o simplemente por la brevedad de la notación:*

Podemos denotar

$$\int_\gamma\{Pdx + Qdy + Rdz\} = \int_\gamma(P,Q,R)\bullet(dx,dy,dz) = \int_\gamma\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{dr}$$

donde $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{dr} = (dx, dy, dz)$.

Example *Si a cada punto* $(x, y, z) \in \gamma$ *se le asocia una fuerza* $\vec{\boldsymbol{F}}(x, y, z)$ *que actúa sobre un objeto, ésta define un campo de fuerzas, y sabemos que la integral de línea*

$$\int_{\gamma} \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \vec{dr}$$

representa físicamente el trabajo efectuado al mover un objeto a lo largo de la curva γ.

Las propiedades de la integral de línea son similares a las de las integrales definidas. Entre estas propiedades destacaremos las siguientes (que enunciaremos en $\mathbb{R}^2$; de forma análoga son válidas en $\mathbb{R}^3$):

Proposition *En las anteriores condiciones, se verifican:*

a) $\int_{\gamma} \{Pdx + Qdy\} = \int_{\gamma} Pdx + \int_{\gamma} Qdy$.

(A la primera integral del segundo miembro se le denomina ***integral de línea de*** $P(x,y)$ ***a lo largo de*** γ ***respecto de*** x*; y a segunda,* ***integral de línea de*** $Q(x,y)$ ***a lo largo de*** γ ***con respecto de*** y*).*

b) Al invertir el sentido del recorrido del camino, la integral de línea cambia de signo, es decir

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} \{Pdx + Qdy\} = -\int_{(a_2,b_2)}^{(a_1,b_1)} \{Pdx + Qdy\}$$

c) Si (a_3, b_3) *un punto intermedio entre* (a_1, b_1) *y* (a_2, b_2) *se tiene*

$$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} \{Pdx + Qdy\} = \int_{(a_1,b_1)}^{(a_3,b_3)} \{Pdx + Qdy\} + \int_{(a_3,b_3)}^{(a_2,b_2)} \{Pdx + Qdy\}$$

Cálculo de la integral de línea.

A efectos prácticos, para el cálculo de este tipo de integrales podemos distinguir los siguientes casos:

- Si la curva γ viene dada en forma paramétrica, siendo sus ecuaciones

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$$

tendremos

$$\int_{\gamma} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{t_1}^{t_2} (P(\phi(t), \psi(t)) \cdot \phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t))dt$$

donde t_1 y t_2 son los valores de t correspondientes a los puntos $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$, origen y extremo de γ.

- Si la curva γ viene en la forma $y = f(x)$, la integral de línea se reduce a una integral simple, sin más que tener en cuenta que $dy = f'(x)dx$:

$$\int_{\gamma} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{a_1}^{a_2} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x))dx$$

- De forma análoga, si la curva viene en la forma $x = g(y)$, tendremos que $dx = g'(y)dy$, con lo que

$$\int_{\gamma} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{b_1}^{b_2} (P(g(y), y) \cdot g'(y) + Q(g(y), y))dy$$

Remark *Lo mismo puede realizarse para el caso de integrales curvilíneas en* $\mathbb{R}^3$*, aunque, en general, la curva* γ *suele venir expresada en coordenadas paramétricas.*

Example *Calcular* $\int_\gamma \{y^2dx + xdy\}$*, siendo* γ *la curva* $y = x^2$ *desde* $(2,4)$ *a* $(0,0)$.

Example *Calcular* $\int_{(1,1)}^{(4,2)} \{(x-y)dx + (x+y)dy\}$ *a lo largo de las curvas siguientes:*

a) $y^2 = x$.

b) $x(t) = 2t^2 + t + 1,\ y(t) = t^2 + 1$.

Example *Hallar el trabajo realizado por la fuerza* $\vec{F} = (2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2)$ *para desplazar una partícula desde* $(0,0,0)$ *a* $(1,1,1)$ *a través de la curva* $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$. *Hacer los mismo pero suponiendo que la partícula se desplaza en línea recta.*

Remark *Podemos observar que en este último ejemplo, para la misma integral, se ha obtenido el mismo resultado a pesar de que se han considerado dos caminos diferentes para ir desde* $(0,0,0)$ *a* $(1,1,1)$*. Sin embargo, en el ejemplo previo hemos visto que la misma integral de línea da dos resultados diferentes si se cambia el camino de integración. Por tanto es lícito preguntarse: ¿Cuando la integral de línea va a ser independiente del camino de integración? Para responder a esta cuestión es preciso estudiar el siguiente resultado.*

El teorema de Green en el plano.

En esta sección vamos a enunciar un importante resultado que nos permitirá escribir una integral de línea a lo largo de la frontera de cierto tipo de regiones como una integral doble sobre la región encerrada; y recíprocamente. Inicialmente vamos a considerar regiones planas limitadas por curvas cerradas y simples, para después ver como este resultado podrá generalizarse a regiones múltiplemente conexas.

Antes de pasar a enunciar y demostrar dicho teorema, veremos el siguiente ejemplo:

Example *Calcular la siguiente integral de línea*

$$\int_\gamma \{(2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy\}$$

siendo γ *la circunferencia* $x^2 + y^2 = 16$.

Theorem ***(Teorema de Green en el plano)****. Sea S una región simplemente conexa (es decir, una región sin agujeros) cuya frontera o contorno es una curva cerrada y simple* γ*. Sean* $P(x,y),\ Q(x,y),\ \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *y* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *continuas sobre S. Entonces,*

$$\oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

donde $\oint_\gamma$ *indica que* γ *es una curva cerrada y que se recorre en sentido positivo.*

Example *Volver a realizar el ejemplo anterior, aunque aplicando ahora el teorema de Green.*

Example *Comprobar el teorema de Green para*

$$\oint_\gamma \{(xy + x^2)dx + (x + y^2)dy\},$$

siendo γ *la curva cerrada formada por* $\gamma_1 : y = x^2$ *y* $\gamma_2 : x = y^2$.

Una consecuencia inmediata del teorema de Green es la siguiente:

Corollary *El área limitada por una curva cerrada y simple* γ *viene dada por*

$$Area = \frac{1}{2} \oint_\gamma \{-ydx + xdy\}$$

Example *Calcular el área de la región S limitada por la recta* $y = 2x + 1$ *y la parábola* $y = 4 - x^2$.

Remark *El teorema de Green puede generalizarse a regiones múltiplemente conexas (regiones con ”agujeros”) mediante segmentos que unen las distintas curvas o contornos que delimitan la región, aunque se prueba que la parte que aporta la zona interior de la curva siempre aparece restando.*

Example *Comprobar el teorema de Green para*

$$\oint_\gamma \{(2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy\}$$

siendo γ *el contorno del domino comprendido entre* $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 1$.

Example *Comprobar el teorema de Green para*

$$\oint_\gamma \{ydx + xdy\}$$

siendo γ *el contorno del dominio comprendido entre las curvas* $x^2 + y^2 = 4$ *y* $x^2 + y^2 = 1$.

Independencia del camino de integración.

Sea entonces S un conjunto abierto y $\vec{\mathbf{F}}$ un campo vectorial continuo definido sobre S. Sean A y B dos puntos de S. Si se pretende calcular la integral de línea entre los puntos A y B a lo largo de un camino de S, γ, regular a trozos, ocurrirá que:

a) El valor de la integral dependerá, en general, del camino que une los puntos A y B.

b) Para ciertos campos vectoriales la integral dependerá únicamente de los puntos extremos A y B, y no del camino que los une.

Definition *En el caso* (b) *anterior, se dice que la integral de línea es* ***independiente del camino*** *que une A y B.*

En este sentido, debido a que la independencia del camino en la integración puede simplificar considerablemente los cálculos a desarrollar, resulta de interés conocer qué campos vectoriales tienen integrales de línea independientes del camino de integración. El siguiente resultado nos dará una primera respuesta:

Proposition *Sea* Φ *un campo escalar (función real de varias variables) diferenciable, con gradiente* $\overrightarrow{\nabla\Phi}$ *continuo en un conjunto conexo abierto* $S \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces, para dos puntos cualesquiera de S, A y B, unidos por un camino* γ*, regular o regular a trozos, situado en S, se verifica*

$$\int_A^B \overrightarrow{\nabla\Phi} \cdot \overrightarrow{dr} = \Phi(B) - \Phi(A).$$

A raiz de esta propiedad puede observarse que la integral de línea de un gradiente, en cualquier conjunto conexo S en el que dicho gradiente sea continuo, es independiente del camino seguido para ir de A a B en S, tal y como formalizamos en el siguiente corolario:

Corollary *En las anteriores condiciones,* $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \overrightarrow{dr}$ *es independiente de* γ *siempre que el campo vectorial* $\vec{\boldsymbol{F}}$ *sea el gradiente de un campo escalar, es decir, siempre que exista* $\Phi : S \to \mathbb{R}$ *tal que* $\vec{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\nabla\Phi}$*.*

Definition *Al campo escalar* $\Phi : S \to \mathbb{R}$ *tal que* $\vec{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\nabla\Phi}$ *se le denomina* ***función potencial****.*

Remark *Si* $A = B$*, es decir, si el camino es cerrado, en las anteriores condiciones se verifica que* $\Phi(B) - \Phi(A) = 0$*. Por tanto, la integral de línea de un gradiente continuo es cero a lo largo de todo camino cerrado regular a trozos situado en S. Puede probarse además, que los gradientes son los únicos campos que cumplen esta propiedad.*

Veamos a continuación qué condiciones se han de verificar desde el punto de vista práctico para que la integral de línea sea independiente del camino de integración:

Proposition *Suponiendo que* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *existen y son continuas en su dominio, condición necesaria y suficiente para que la integral* $\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$ *sea independiente de* γ *es que* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$*.*

Corollary *En las anteriores hipótesis,* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *es la diferencial de una función* $\Phi(x,y)$*, y consecuentemente la integral de línea* $\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$ *es independiente de* γ*, si y sólo si* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$*. Además, en tal caso se verifica que*

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y)$ *y la integral anterior puede calcularse como*

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

siendo A y B los puntos origen y extremo de γ.

Remark *Notemos que la fórmula anterior constituye una generalización de la Regla de Barrow: la integral curvilínea es igual a la diferencia de los valores de la función potencial en los puntos extremo y origen de la integración, con independencia del camino seguido.*

El resultado anterior puede extenderse sin dificultad a $\mathbb{R}^3$, como veremos a continuación:

Proposition *La expresión $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ es la diferencial exacta de un campo escalar $\Phi(x,y,z)$ si y sólo si se verifican las igualdades*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

suponiendo que estas derivadas parciales existen y son continuas. Además, en este caso se verifica

$$\int_\gamma \{P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\} = \Phi(B) - \Phi(A),$$

siendo A y B los puntos origen y extremo de γ.

Remark *La condición*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

suele expresarse diciendo que es nulo el rotacional del campo vectorial $\vec{\boldsymbol{F}} = (P,Q,R)$, es decir

$$\overrightarrow{rot\boldsymbol{F}} = \vec{0}$$

y se dice que el campo vectorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ es ***conservativo****. Recordemos que se define el* ***rotacional*** *de $\boldsymbol{F}$, que denotaremos por $\overrightarrow{rot\boldsymbol{F}}$, como el campo vectorial dado por*

$$\overrightarrow{rot\boldsymbol{F}} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Corollary *En las condiciones anteriores, si el camino γ es cerrado, entonces*

$$\oint_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = 0$$

y lo mismo se verificaría para integrales curvilíneas en $\mathbb{R}^3$.

Example *Calcular*

$$\oint_\gamma \{(x^2 y\cos x + 2xy\,\mathrm{sen}\,x - y^2 e^x)dx + (x^2\,\mathrm{sen}\,x - 2ye^x)dy\}$$

siendo γ la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Example *Calcular*

$$\int_{(-1,1)}^{(1,1)} \{(x+y)dx + (x-y)dy\}$$

a lo largo de $y = x^2$.

Example *Probar que*

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} \{2(x^2+xy)dx + (x^2+y^2)dy\}$$

es independiente del camino de integración y calcular su valor.

Example *Dada la integral*

$$\int_\gamma \left\{ \frac{1-y^2}{(1+x)^3}dx + \frac{y}{(1+x)^2}dy \right\},$$

siendo γ *cualquier camino que une* $(0,0)$ *y* $(1,1)$, *probar que es independiente de* γ *y calcular su valor. Comprobar el resultado mediante la función potencial.*

Example *Calcular, mediante la función potencial, el trabajo efectuado por la fuerza* $\vec{F} = (\cos x \cdot \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} x \cdot \cos y)$ *para trasladar una partícula desde el punto* $(0,-\pi)$ *al punto* $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Example *Dado el campo vectorial* $\vec{F} = (2y+z, 2x-z, x-y)$, *hallar el trabajo realizado para desplazar un objeto desde* $(0,0,0)$ *a* $(1,1,1)$.

Aplicaciones de la integral de línea.

Además de calcular el trabajo de una fuerza, podemos destacar otras aplicaciones geométricas del concepto de integral de línea:

Longitud de un arco de curva.

Por la propia definición de integral de línea, la longitud de un arco de curva γ entre los puntos A y B viene dada por

$$L = \int_\gamma \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

expresión a la que denotaremos por

$$L = \int_\gamma dl$$

Así, si la curva viene dada por sus ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, la longitud de arco entre dos puntos A y B se calculará mediante

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

siendo a y b los valores de t que se corresponden a los puntos extremos A y B.

Masas y centros de masas de distribuciones lineales.

- De acuerdo con la interpretación física, si $\rho(x,y,z)$ designa la densidad puntual $\left(\frac{u.\ de\ masa}{u.\ de\ longitud}\right)$ de una distribución lineal γ, la masa de dicha distribución se calcula mediante

$$M = \int_\gamma \rho(x,y,z)dS$$

- En caso particular de que la distribución sea homogénea (la densidad es constante, $\rho(x,y,z) = C$) la masa será

$$M = C \cdot L$$

siendo L la longitud de dicha distribución.

- El centro de gravedad de la distribución lineal tiene por coordenadas

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\int_\gamma x \cdot \rho(x,y,z)dS,\ \overline{y} = \frac{1}{M}\int_\gamma y \cdot \rho(x,y,z)dS,\ \overline{z} = \frac{1}{M}\int_\gamma z \cdot \rho(x,y,z)dS,$$

y si la distribución es homogénea, las fórmulas se simplifican, resultando

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_\gamma xdS,\ \overline{y} = \frac{1}{L}\int_\gamma ydS,\ \overline{z} = \frac{1}{L}\int_\gamma zdS$$

Momentos de inercia de una distribución lineal.

En general, el momento de inercia de una distribución lineal γ respecto de cualquier punto, eje o plano se calcula mediante

$$I = \int_\gamma \delta^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)dS$$

siendo $\delta(x,y,z)$ la distancia desde un punto cualquiera $P(x,y,z)$ al punto, eje o plano correspondiente.

De esta forma, obtenemos:

- Momento de inercia respecto del origen:

$$I_O = \int_\gamma (x^2+y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)dS$$

- Momento de inercia respecto a los ejes coordenados:

$$I_X = \int_\gamma (y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)dS$$

$$I_Y = \int_\gamma (x^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)dS$$

$$I_Z = \int_\gamma (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y,z)dS$$

- Momento de inercia respecto a los planos coordenados:

$$I_{OXY} = \int_\gamma z^2 \cdot \rho(x,y,z)dS$$

$$I_{OYZ} = \int_\gamma x^2 \cdot \rho(x,y,z)dS$$

$$I_{OXZ} = \int_\gamma y^2 \cdot \rho(x,y,z)dS$$

Example *Una espiral de un muelle tiene la forma de hélice de ecuación* $r(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$. *Hallar las coordenadas de su centro de masas y los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados.*