Profesor: **Roque Molina Legaz**

Tema 2. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES.

Programa detallado:

Introducción: Repaso de topología en $\mathbb{R}^n$.

Es aconsejable que recordemos conceptos previos introducidos en Matemáticas I. Entre éstos, podemos destacar:

Definition *Se define $\mathbb{R}^n$ como el conjunto*

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

Lo normal es trabajar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, puesto que son los puntos que podemos representar gráficamente.

Proposition *Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ dados por*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Las operaciones típicas que podemos hacer con estos vectores de $\mathbb{R}^n$ son las siguientes:

*a) **Suma de vectores:** Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, se define la **suma** de ambos como*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

*b) **Producto de un escalar por un vector:** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, se define*

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

*c) **Producto escalar de dos vectores:** Lo denotaremos por $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$ o por $x \bullet y$, y en la base canónica viene dado por el número real*

$$x \bullet y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \ldots, y_n) := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$$

*d) **Norma (o módulo) de un vector:** Se define como el número real dado por*

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

e) Algunas propiedades de la norma: Se verifican, entre otras, las siguientes propiedades

$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$$
$$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
$$\|\alpha \cdot \boldsymbol{x}\| = \alpha\|\boldsymbol{x}\|$$
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

f) ***Ángulo entre dos vectores:*** *Si denotamos por θ al ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, se tiene que*

$$cos(\theta) = cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \frac{x \bullet y}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}$$

g) ***Producto vectorial de dos vectores:*** *Esta es una operación que se puede hacer en $\mathbb{R}^3$, y que viene dada por*

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

Definition *Otras definiciones son:*

a) ***Bola centrada en*** x_0 ***y de radio*** r *: Se define como el conjunto*

$$B(\boldsymbol{x}_0;r) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < r\right\}$$

Ejemplos: Varios.

b) ***Conjunto abierto - Interior:***

c) ***Conjunto cerrado - Clausura:***

d) ***Frontera de un conjunto:***

e) ***Conjunto compacto:*** *Es todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado y acotado.*

Exercise *Utilizar la definición de ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$ para comprobar la igualdad siguiente, donde $\theta = ang(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:*

$$sin^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\|x \times y\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2}$$

Exercise *Comprobar si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados. Calcular además su frontera:*

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y \geq 1\right\}$ *b)* $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y > 0,\ x \geq 0\right\}$

c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + \frac{y^2}{2} < 1\right\}$ *d)* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + \frac{y^2}{2} < 1,\ x + y \geq 0\right\}$

Exercise *Representar gráficamente el conjunto definido por*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ y < x\right\}$$

Calcular su interior, clausura y frontera. ¿Es un conjunto compacto?

Sistemas de coordenadas.

Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

Los dos sistemas de coordenadas usados habitualmente en $\mathbb{R}^2$ son las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares. Las recordamos brevemente:

- **Cartesianas**: Consisten en expresar un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en la forma
$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\vec{i} + y\vec{j}$$
siendo $\vec{i}$ y $\vec{j}$ los vectores unitarios de los ejes X e Y, respectivamente.

- **Polares**: Consisten en representar cualquier punto del plano, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en la forma (r,θ), siendo r el módulo del vector asociado (x,y), y θ el ángulo que dicho vector forma con la parte positiva del eje X, es decir
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$
o, lo que es equivalente
$$x = r\cos(\theta); \qquad y = r\sin(\theta)$$
(notemos que las primeras expresiones son las que usaremos para pasar un punto de coordenadas cartesianas a polares; mientras que las últimas nos permiten el paso inverso).

Ya hemos recordado como se pasa un punto de polares a cartesianas (o al revés). Pero, ¿qué ocurre cuando queremos expresar un vector de unas a otras coordenadas? Recordemos que los vectores unitarios de cada eje en coordenadas cartesianas son los vectores $\overrightarrow{u_1} = (1,0)$ y $\overrightarrow{u_2} = (0,1)$, que normalmente representamos por $\overrightarrow{u_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{u_2} = \vec{j}$. Estos vectores constituyen, como sabemos, una base $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ ortonormal (con el producto escalar usual). Sin embargo, si estamos trabajando en coordenadas polares (r,θ), tendremos, análogamente, unos vectores unitarios en dichas coordenadas $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$, y tal que la base $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\}$ también sea ortonormal. Suele tomarse como base
$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta));$$
$$\overrightarrow{u_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$
(se deja al lector que compruebe que, efectivamente ambos vectores son ortogonales y unitarios; en la sección siguiente se verá el cambio a coordenadas cilíndricas -que básicamente es el mismo a polares- y se verá gráficamente el porqué de la expresión para la base $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\}$).

¿Como podemos entonces pasar de un vector en coordenadas cartesianas a polares o viceversa? Lo haremos mediante una matriz de cambio de base, de manera que si (x,y) representan las coordenadas de un vector en cartesiana y (α,β) son sus coordenadas en polares, tendremos
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Example *Expresar el vector* $\vec{v} = (1,-1) = \vec{i} - \vec{j}$ *en coordenadas polares:*

Tendríamos

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) - sin(\theta) \\ -sin(\theta) - cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\vec{v} = (cos(\theta) - sin(\theta))\vec{e_r} + (-sin(\theta) - cos(\theta))\vec{e_\theta}$$

Remark *Una extensión de las coordenadas polares son las* ***coordenadas elípticas****, de manera, que si tomamos la elipse de ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el cambio vendría dado por

$$x = a \cdot r\,cos(\theta); \qquad y = b \cdot r\,sin(\theta)$$

o recíprocamente

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}; \qquad tan(\theta) = \frac{a}{b}$$

Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^3$.

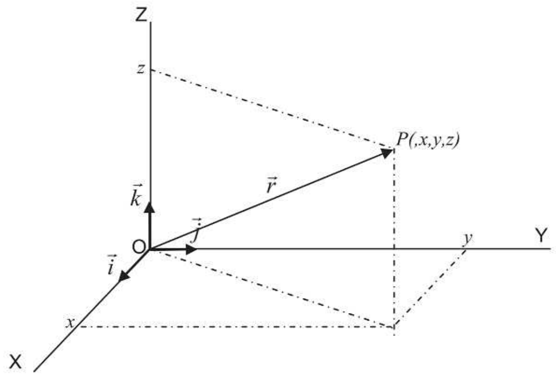
En este caso las variables más utilizadas son las cartesianas, cilíndricas y esféricas. Las recordamos brevemente:

Cartesianas:

Consisten en expresar un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en la forma

$$(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

siendo $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ los vectores unitarios de los ejes X, Y y Z, respectivamente.

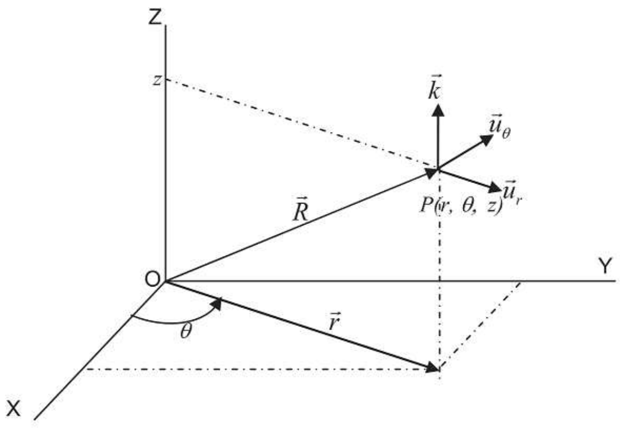


Sistema de coordenadas cartesianas

Cilíndricas:

Consisten en representar cualquier punto del espacio, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, en la forma (r,θ,z), siendo r el módulo del vector asociado $(x,y,0)$, y θ el ángulo que dicho vector forma con la parte positiva del eje X, es decir

$$x = r\cos(\theta); \qquad y = r\sin(\theta); \qquad z = z$$

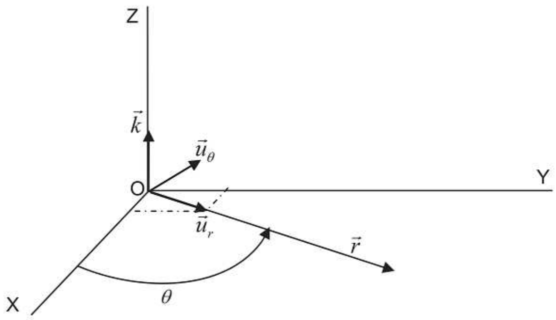


Sistema de coordenadas cilíndricas

Example *Si un punto tiene por componentes cartesianas $P(4,3,2)$, en coordenadas cilíndricas este punto tendrá por componentes $P(r,\theta,z) = P(5, arccos(\frac{4}{5}), 2)$, puesto que $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, mientras que $cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$.*

De igual forma tendremos unos vectores unitarios en dichas coordenadas, y que representaremos por $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ y $\overrightarrow{k}$, y tal que la base $\left\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k}\right\}$ también sea ortonormal. En la figura anterior observamos que el vector unitario $\overrightarrow{k}$ se aplica en el punto P y es paralelo al eje Z. El vector unitario $\overrightarrow{u_r}$ se aplica en P y es paralelo al vector $\overrightarrow{r}$ dibujado en el plano XY, y que viene determinado por la proyección de P sobre el citado plano. El vector unitario $\overrightarrow{u_\theta}$ se aplica en P y es perpendicular a los otros dos, verificando $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\theta}$. El vector de posición de un punto P viene determinado por $\overrightarrow{R} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{k}$, no quedando univocamente determinado.

Vamos a ver como podemos relacionar los vectores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$ con los unitarios $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$, pues el unitario $\overrightarrow{k}$ coincide: Trasladando $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_\theta}$ al plano XY resulta



Relación entre vectores unitarios

Observamos entonces que

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j} = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}$$

Esta relación se puede expresar facilmente mediante una igualdad matricial, de manera para pasar un vector de coordenadas cartesianas a cilíndricas o viceversa lo haremos mediante una matriz de cambio de base, de manera que si (x,y,z) representan las coordenadas de un vector en cartesianas y (α,β,γ) son sus coordenadas en la base $\left\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{k}\right\}$, tendremos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

que nos permite pasar de cilíndricas a cartesianas, mientras que el cambio inverso (de cartesianas a cilíndricas) vendrá dado por

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Example *Expresar el vector* $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *en el sistemas de coordenadas cilíndricas* $\left\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{k}\right\}$:

Se tiene que $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, *mientras que* $\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$ *y* $\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$. *De esta forma las nuevas coordenadas serán las dadas por*

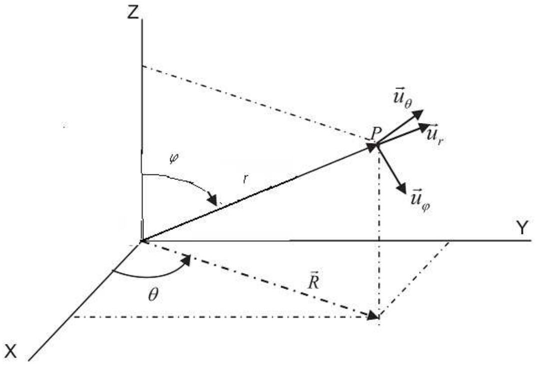
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\vec{v} = 5\vec{u_r} + 0\vec{u_\theta} + 2\vec{k} = 5\vec{u_r} + 2\vec{k}$$

Esféricas:

Consisten en representar cualquier punto del espacio, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, en la forma (r,θ,φ), siendo r el módulo del vector (x,y,z), y θ,φ dados por la gráfica siguiente



es decir,

$$\cos(\varphi) = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos(\varphi)$$
$$\sin(\varphi) = \frac{p}{r} \Rightarrow p = r\sin(\varphi)$$
$$\cos(\theta) = \frac{x}{p} \Rightarrow x = p\cos(\theta)$$
$$\sin(\theta) = \frac{y}{p} \Rightarrow y = p\sin(\theta)$$

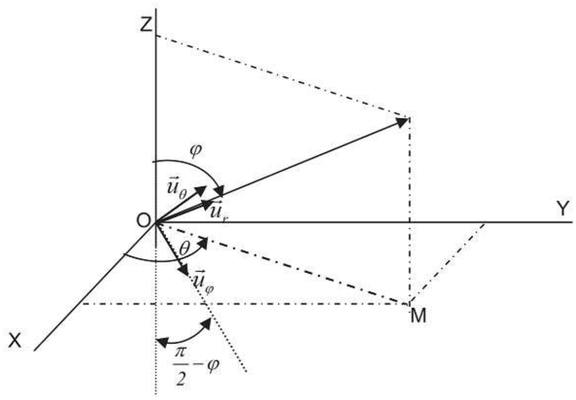
donde por p hemos denotado a la distancia del vector proyección de (x,y,z) sobre el plano XY (es decir, el módulo del vector $\vec{R}$). De esta forma se tiene que la relación entre estas coordenadas viene dada por

$$\begin{cases} x = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

De igual forma, también podemos relacionar los vectores unitarios en cartesianas $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ con unos vectores unitarios en coordenadas esféricas, y que representaremos por $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$ y $\vec{u_\varphi}$, de manera que la base $\{\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi}\}$ también sea ortonormal.:

A partir de la figura



se llega a

$$\overrightarrow{e_r} = \sin(\varphi)\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\varphi)\sin(\theta)\overrightarrow{j} + \cos(\varphi)\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin(\theta)\overrightarrow{i}\cos(\theta)\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{e_\varphi} = \cos(\varphi)\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\varphi)\sin(\theta)\overrightarrow{j} - \sin(\varphi)\overrightarrow{k}$$

¿Como podemos entonces pasar de un vector en coordenadas cartesianas a esféricas o viceversa? Lo haremos mediante una matriz de cambio de base, de manera que si (x,y,z) representan las coordenadas de un vector en cartesianas y (α,β,γ) son sus coordenadas en la base $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi}\}$, tendremos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

o al revés

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de donde operando resulta

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Example *Expresar el vector* $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ *en el sistemas de coordenadas esféricas* $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi}\}$:

Se tiene que

$$r = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}; \qquad p = \left|\overrightarrow{R}\right| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$
$$\cos(\theta) = \frac{4}{5};\ \sin(\theta) = \frac{3}{5};\ \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{29}};\ \sin(\varphi) = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{29}}\frac{4}{5} & \frac{5}{\sqrt{29}}\frac{3}{5} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{29}}\frac{4}{5} & \frac{2}{\sqrt{29}}\frac{3}{5} & -\frac{5}{\sqrt{29}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{29} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} = \sqrt{29}\,\vec{u_r} + 0\vec{u_\theta} + 0\vec{u_\varphi} = \sqrt{29}\,\vec{u_r}$$

Campos escalares y vectoriales. Operadores diferenciales.

Definiciones.

En esta parte del tema vamos a tratar con el concepto de campo, tanto escalar como vectorial, así como de las diversas maneras de transformar uno en otro. Pasamos directamente a ver las definiciones:

Definition *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (si Ω fuese un conjunto en el plano supondríamos entonces siempre que $z = 0$). Se llama* ***campo escalar*** *a toda función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, mientras que un campo vectorial es toda función $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$. En lo que resta de tema, intentaremos representar (para que no haya lugar a dudas) a los campos vectoriales en la forma $\vec{F}$.*

Example *Conocemos de la Física ejemplos de estos campos. Así, el campo gravitatorio o el campo eléctrico son campos vectoriales dados, respectivamente por*

$$\vec{F}(x,y,z) = -G\frac{m \cdot M}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

y

$$\vec{E}(x,y,z) = -K\frac{q \cdot Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

mientras que las funciones potencial gravitatorio y eléctrico de estos campos son campos escalares dados por

$$f(x,y,z) = G\frac{m \cdot M}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

y

$$e(x,y,z) = K\frac{q \cdot Q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Example *(Cambios de coordenadas en campos escalares) Dados los siguientes campos expresados en coordenadas cartesianas o polares, expresarlos en el otro tipo de coordenadas:*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$*: Este campo viene en cartesianas, por lo que se expresa en polares sin más que realizar la correspondiente sustitución. Así obtenemos*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

b) $g(x,y) = x^2\cos y + \log(x+y)$ *:*

$$g(x,y) = x^2\cos y + \log(x+y) = (r\cos\theta)^2\cos(r\sin\theta) + \log(r\cos\theta + r\sin\theta)$$

c) $h(r,\theta) = r^2\cos\theta$ *: En este caso el campo está en polares, por lo que si lo pasamos a cartesianas tendremos*

$$h(r,\theta) = r^2\cos\theta = r\cdot r\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}\,x$$

Más complicados son los cambios cuando se trata de campos vectoriales:

Example *Dado el campo vectorial en coordenadas cartesianas*

$$\vec{F}(x,y) = (-y,x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

expresarlo en polares:

Tenemos que sustituir sus componentes por sus expresiones en polares, pero también hemos de sustituir los vectores directores $\vec{i}$ *y* $\vec{j}$ *por sus expresiones en función de los vectores directores de la nueva base* $\{\vec{u_r},\vec{u_\theta}\}$*. Por tanto, y como el cambio entre las coordenadas se puede expresar a través de la matriz de cambio vista anteriormente, y que es*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así, obtendremos

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

es decir, la expresión del campo en polares viene dada por

$$\vec{F}(r,\theta) = 0\vec{e_r} + r\vec{e_\theta} = r\vec{e_\theta}$$

Exercise *Idem para el campo dado por*

$$\vec{F}(x,y) = (x^2+2y)\vec{i} + \sin(xy)\vec{j}$$

Example *Pasar a cartesianas el campo vectorial que, en polares, viene dado por*

$$\vec{F}(r,\theta) = (1,v) = \vec{e_r} + r^2\cos(\theta)\vec{e_\theta}$$

En este caso hemos de aplicar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r^2 cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta - r^2 cos\theta sin\theta \\ sin\theta + r^2 cos^2\theta \end{pmatrix}$$

y puesto que $cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *obtendremos*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ x^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\vec{F}(x,y) = \left(-xy + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{i} + \left(x^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{j}$$

Lo mismo podemos hacer si se trata de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$:

Example *Pasar a cilíndricas y esféricas el campo vectorial*

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$$

Para pasarlo a cilíndricas solo hemos de aplicar

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r cos\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ \frac{r sin\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ 0 \\ \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\vec{F}(r,\theta,z) = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{e_r} + 0 \cdot \vec{e_\theta} + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{k}$$

Para el cambio a esféricas aplicaremos

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin(\varphi)\, cos(\theta) & sin(\varphi)\, sin(\theta) & cos(\varphi) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ cos(\varphi)\, cos(\theta) & cos(\varphi)\, sin(\theta) & -sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} sin(\varphi)\, cos(\theta) & sin(\varphi)\, sin(\theta) & cos(\varphi) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ cos(\varphi)\, cos(\theta) & cos(\varphi)\, sin(\theta) & -sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} sin(\varphi)\, cos(\theta) & sin(\varphi)\, sin(\theta) & cos(\varphi) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ cos(\varphi)\, cos(\theta) & cos(\varphi)\, sin(\theta) & -sin(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r\, sin(\varphi)\, cos(\theta)}{r} \\ \frac{r\, sin(\varphi)\, sin(\theta)}{r} \\ \frac{r\, cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo entonces

$$\vec{F}(r,\theta,\varphi) = 1 \cdot \vec{e_r} + 0 \cdot \vec{e_\theta} + 0 \cdot \vec{e_\varphi} = \vec{e_r}$$

Vamos a estudiar qué tipo de operaciones podemos hacer entre campos escalares y vectoriales. En lo que resta de tema, y salvo que se diga lo contrario, supondremos que todos los campos o funciones son suficientemente derivables.

Operadores diferenciales.

Definition *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el* ***gradiente*** *de f como el campo vectorial, $\vec{\nabla} f$, dado por*

$$grad(f) = \vec{\nabla} f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

Definition *Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice* ***conservativo*** *si existe un campo escalar f de manera que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. A f se le llama* ***función potencia****l.*

Definition *Dado un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$, se define la* ***divergencia*** *de $\vec{F}$ como el campo escalar*

$$div\left(\vec{F}\right) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$div\left(\vec{F}(x,y,z)\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)$$

Definition *Dado un campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^{(1)}$, se define el* ***rotacional*** *de $\vec{F}$ como el campo vectorial dado por*

$$rot\left(\vec{F}\right) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$rot\left(\vec{F}(x,y,z)\right) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

que puede deducirse a través de la regla nemotécnica

$$rot\left(\vec{F}(x,y,z)\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{vmatrix}$$

Por esta razón, suele ponerse

$$rot\left(\vec{F}(x,y,z)\right) \equiv \nabla \times \vec{F}$$

Teoremas básicos.

Vamos a enumerar en este apartado algunos resultados que relacionan los conceptos anteriores:

Proposition *Dado el campo escalar* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de clase* $\mathcal{C}^{(2)}$*, se verifica que* $rot\left(\vec{\nabla} f(x,y,z)\right) = (0,0,0)$.

Proposition *Dado el campo vectorial* $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* $\mathcal{C}^{(2)}$*, se verifica que* $div\left(rot\left(\vec{F}(x,y,z)\right)\right) = 0$.

Proposition *Dado el campo vectorial* $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* $\mathcal{C}^{(1)}$ *definido sobre un conjunto convexo* Ω *(conjunto que tiene la propiedad de que dados dos puntos cualesquiera suyos, el segmento que une ambos puntos está íntegramente en* Ω*), se verifica que existe una función potencial f de* $\vec{F}$ *(es decir, el campo* $\vec{F}$ *es conservativo) si y sólo si* $rot\left(\vec{F}(x,y,z)\right) = (0,0,0)$.

Exercise *Dado el campo vectorial* $\vec{F}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$*, probar que este campo es conservativo y hallar su función potencial.*