Capítulo 2

Estabilidad de ecuaciones diferenciales

Sumario. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Funciones de transferencia. Nociones de estabilidad. Criterios de estabilidad. Estabilidad de sistemas autónomos no lineales.

2.1. Ecuaciones y sistemas lineales: generalidades

Para nosotros, un sistema de ecuaciones diferenciales es una expresión de la forma

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ F_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \\ \vdots \\ F_m(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_m, y_m') = 0; \end{cases}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de x y $F_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+2m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales de varias variables. Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede deducirse de las demás. Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \end{cases}$$

donde $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales. Ejemplos de estos sistemas son

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2; \\ y_2' = x + y_1 + y_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \end{cases}$$

En general la resolución de estos sistemas no es posible, salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde existen algoritmos que permiten el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuándo un sistema tiene solución, o más precisamente cuándo un problema de condiciones iniciales asociado tiene solucón. Primero claro está, debemos definir qué entendemos por un problema de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales. Dicho problema es un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, ..., y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

junto con las condiciones $y_i(x_0) = y_i$, donde $x_0, y_1, y_2, ..., y_m$ son números reales. Por ejemplo

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es un problema de condiciones iniciales. Nótese que todas las condiciones iniciales implican el conocimiento de la función en 0, es decir, lo siguiente

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que conocemos y_2 en 1 e y_1 e y_3 en 0.

Para el caso de los problemas de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales tenemos el siguiente resultado análogo al de ecuaciones diferenciales de orden uno.

Teorema 15 *Sea el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, ..., y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, ..., y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

donde $(x_0, y_1, ..., y_m) \in A$, $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, *son funciones reales continuas en el abierto* A. *Supongamos además que las funciones* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *existen y son continuas en* A. *Entonces existe una solución del problema de condiciones iniciales anterior* $y_i : I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, *definido en un intervalo abierto* I *de la recta real.*

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo el problema que consideramos anteriormente

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y_2' = x + y_1 + y_2 y_3; \\ y_3' = y_1 y_2 y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{array}\right.$$

es tal que $f_1(x, y_1, y_2, y_3) = xy_1 + y_2^2 - y_3$, $f_2(x, y_1, y_2, y_3) = x + y_1 + y_2 y_3$ y $f_3(x, y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 y_3$ son funciones definidas en $\mathbb{R}^4$, continuas y las derivadas parciales de cada función respecto de y_1, y_2 e y_3 son continuas. Entonces este problema de condiciones iniciales tiene solución única, aunque no tengamos ni idea de cómo calcularla. Se verá en la asignatura de cuarto curso métodos numéricos cómo obtener soluciones aproximadas, y en esta misma asignatura estudiaremos cómo obtener información parcial sobre el sistema incluso sin conocer las soluciones.

2.1.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Como hemos comentado anteriormente en general no va a ser posible resolver sistemas de ecuaciones diferenciales salvo en ciertos casos particulares. Uno de ellos va a ser el de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuya teoría general pasamos a estudiar. Vamos a ver a continuación cómo son las soluciones de un sistema de este tipo, pero antes necesitamos conocer un poco más sobre éstos. Un sistema de *ecuaciones diferenciales lineales* es una expresión de la forma

$$\left\{\begin{array}{c} y_1' = a_{11}(x) y_1 + a_{12}(x) y_2 + \ldots + a_{1n}(x) y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x) y_1 + a_{22}(x) y_2 + \ldots + a_{2n}(x) y_n + b_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x) y_1 + a_{n2}(x) y_2 + \ldots + a_{nn}(x) y_n + b_n(x) \end{array}\right.$$

donde para cada $1 \leq i, j \leq n$, a_{ij} y b_j son funciones reales definidas sobre un intervalo I. Si denotamos por

$$\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^t = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \ldots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},$$

el sistema anterior puede escribirse de forma matricial como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \tag{2.1}$$

donde por $\mathbf{y}'$ se entenderá la derivada coordenada a coordenada, es decir,

$$\mathbf{y}' = (y_1', y_2', ..., y_n')^t = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, los sistemas

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + e^x y_2 + 1 - x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + x^2 y_2 + y_3 + 1 - x^2, \\ y_2' = xy_1 - x^2 y_2 + e^{-x}, \\ y_3' = y_1 + (1-x) y_2 + y_3 \end{cases}$$

son lineales. Un sistema se dirá *homogéneo* si $\mathbf{b}(x) = (0, 0, ..., 0)^t$, es decir, el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + x^2 y_2 + y_3, \\ y_2' = xy_1 - x^2 y_2, \\ y_3' = y_1 + (1-x) y_2 + y_3 \end{cases}$$

es homogéneo. Se dirá *no homogéneo* en caso contrario. Nosotros le prestaremos una gran atención a los sistemas lineales con coeficioentes constantes. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se dirá de *coeficientes constantes* si la matriz $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ es constante. Ejemplos de tales sistemas, tanto homogéneos como no homogéneos son

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + 7y_3, \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Veremos en los sucesivos temas cómo resolver estos últimos sistemas, dando un algoritmo que permitirá el cálculo de la solución general del mismo.

Previamente, estudiaremos la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales y para posteriormente particularizarla al caso de las ecuaciones lineales de orden mayor o igual que dos (ver la última sección de este tema). Esta teoría general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se sustenta en la noción de espacio vectorial de dimensión finita estudiadas en la parte de álgebra lineal impartida durante el curso y utiliza el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones y sistemas que se deducen directamente del Teorema 15.

Teorema 16 *Sea* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ *un sistema de ecuaciones diferenciales lineales donde* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{b}$ *están definidas en un intervalo* $I_{x_0} = [x_0 - a, x_0 + a]$. *Si estas funciones son continuas en dicho intervalo, entonces el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tiene solución única definido en todo I_{x_0}.

Recordemos por un instante dos nociones que será importante tener claras para entender la teoría que a continuación vamos a desarrollar. Por un lado hemos de tener presente que bajo la notación que estamos utilizando, una solución de un sistema lineal es una función $\mathbf{y} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, o dicho de otro modo, un vector cuyas componentes son funciones reales. Por ejemplo, dado el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

una solución del mismo es $\mathbf{y}(x) = (\sin x, \cos x)^t$, es decir, $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$.

Por otra parte, recordemos una noción de básica del álgebra lineal. Si tenemos n vectores cuyas componentes son funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$, se dicen linealmente independientes si para toda combinación lineal

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n . \mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, y $\mathbf{0}$ es el vector que tiene a la función nula en cada componente, entonces necesariamente $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Vamos a empezar el estudio de los sistemas homogéneos, empezando por el siguiente resultado. Las demostraciones de los siguientes resultados están basados en el Teorema 16.

Teorema 17 *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} \tag{2.2}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, esto es, cualquier solución $\mathbf{y}$ del mismo es de la forma

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ son soluciones linealmente independientes del mismo.

Proof. En primer lugar, veamos que cualquier combinación lineal de soluciones del sistema (2.2) es una solución del mismo. Para ello, sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_k$ soluciones de (2.2) y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$. Consideramos el vector de funciones $\mathbf{z} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k$ y derivamos respecto de la variable independiente (notar que $\mathbf{z} = \mathbf{z}(x)$), obteniéndose, por ser $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_k$ soluciones de (2.2) que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1' + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2' + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k' \\ &= \alpha_1 \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot [\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_k \cdot \mathbf{y}_k] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{z}, \end{aligned}$$

que prueba que $\mathbf{z}$ es solución.

Sea ahora $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbf{u}_i$ es el vector de $\mathbb{R}^n$ que tiene 0 en todas las componentes salvo en la i–ésima, donde tiene un 1. Sea x_0

un número real y supongamos que $\mathbf{A}(x)$ está definida en I_{x_0} (ver Teorema 16). Para cada $1 \leq i \leq n$, consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{u}_i. \end{cases}$$

En virtud del Teorema 16, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe una única solución de dicho problema, que denotaremos por $\mathbf{y}_i$, definida en I_{x_0}. Vamos a ver que $\mathcal{B} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n\}$ forman una base del conjunto de soluciones del sistema 2.2.

Veamos primero que son linealmente independientes. Para ello sea

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Particularizamos en x_0 y obtenemos que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1(x_0) + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2(x_0) + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{0}(x_0) = \mathbf{0},$$

y por ser cada $\mathbf{y}_i$ solución del problema de condiciones iniciales, $\mathbf{y}_i(x_0) = \mathbf{u}_i$, $1 \leq i \leq n$, de donde

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Como los vectores $\mathbf{u}_i$ son los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, son linealmente independientes y por tanto $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, de donde $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ son linealmente independientes.

Acto seguido, vamos a ver que $\mathcal{B}$ es un sistema generador del conjunto de soluciones del sistema (2.2). Para ello sea $\mathbf{z}$ una solución arbitraria del sistema (2.2). Sea x_0 el número real del apartado anterior. Como $\mathcal{C}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, se verifica que existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{z}(x_0) = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{u}_n.$$

Sea el vector de funciones

$$\mathbf{z}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n$$

y consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{z}(x_0). \end{cases}$$

Claramente tanto $\mathbf{z}$ como $\mathbf{z}_1$ son soluciones de dicho problema. Como la solución es única en virtud del Teorema 16, se tiene que

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n,$$

por lo que $\mathcal{B}$ también es un sistema generador y la demostración concluye. ■

Aunque el resultado anterior caracteriza las soluciones del sistema homogéneo, el cálculo explícito de las soluciones dista mucho de estar al alcance. Un primer avance en el objetivo del cálculo de las soluciones lo proporciona el determinante *wronskiano*, definido de la manera siguiente.

Dadas $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se define su determinante wronskiano como la función real $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n] : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida todo $x \in I$ como

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) := |\mathbf{y}_1(x); \mathbf{y}_2(x); ...; \mathbf{y}_n(x)|.$$

El determinante wronskiano resulta ser útil a la hora de determinar si n soluciones del sistema homogéneo son o no linealmente independientes, como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Proposición 18 *Sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A(x) \cdot \mathbf{y}$. Son equivalentes:*

(a) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ son linealmente independientes.

(b) $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

(c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x_0) \neq 0$.

Proof. Veamos en primer lugar que (a) implica (b). Procedemos por reducción al absurdo suponiendo que (b) es falso, esto es, existe $x_0 \in I$ tal que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x_0) = 0$. Entonces los vectores de $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tal que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1(x_0) + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2(x_0) + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{0}.$$

Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}; \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Obviamente el vector de funciones $\mathbf{0}$ (cuyas componentes son la función nula) es solución de dicho problema. Por otra parte, procediendo como en el final de la demostración del Teorema 2.18, vemos que la función

$$\mathbf{z} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n$$

también es solución de dicho problema. Como la solución debe ser única por el Teorema 16, tenemos que

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n.$$

Como los escalares α_i no eran todos nulos, tenemos que las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ no pueden ser linealmente independientes, lo que nos lleva a una contradicción.

(b) implica (c) es trivial. La demostración de (c) implica (a) es análoga a la demostración del Teorema 2.18, cuando se comprueba que las funciones son linealmente independientes. ■

Ahora bien, seguimos todavía muy lejos de resolver un sistema homogéneo. De hecho, los métodos que permitirán dar soluciones explícitas a los sistemas planteados tendrán que esperar a los próximos temas. La teoría general, en lo que a la estructura de las soluciones, queda cerrada al establecer la siguiente caracterización de los sistemas no homogéneos.

Teorema 19 *El conjunto de soluciones del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{2.3}$$

es de la forma

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$*,* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ *son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e* $\mathbf{y}_p$ *es una solución particular del problema no homogéneo.*

Proof. Sea $\mathbf{y}_p$ una solucion particular del sistema (2.3) y sea $\mathbf{y}$ otra solución. Consideremos el vector de funciones $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p$ y veamos que es solución del sistema homogéneo asociado a (2.3). Para ello calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{y}' - \mathbf{y}_p' \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) - [\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}_p + \mathbf{b}(x)] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{y}_p] \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.2, existen soluciones del sistema homogéneo asociado linealmente independientes $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ tales que

$$\mathbf{z} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{z}$ concluimos que

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + ... + c_n \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p,$$

con lo que se concluye la demostración. ■

2.1.2. Teoría general para ecuaciones lineales de orden n

Una ecuación diferencial de orden $n > 1$ es una expresión de la forma

$$y^{n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1)}), \tag{2.4}$$

donde $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Esta ecuación puede transformarse en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno de la manera siguiente. Introducimos las variables dependientes $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$,...,$y_n = y^{n-1)}$ y entonces la ecuación (2.4) puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Por ejemplo, la ecuación de orden tres

$$y^{3)} = x + yy' - y'',$$

puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = x + y_1 y_2 - y_3. \end{cases}$$

De aqui se ve que para tener un problema de condiciones para la ecuación, necesitamos n condiciones iniciales $y_1(x_0) = y(x_0) = y_0$, $y_2(x_0) = y'(x_0) = y_0'$,...,$y_n(x_0) = y^{n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, es decir, necesitamos conocer el valor de la función y de las sucesivas derivadas hasta la $n-1$ en un punto x_0. Entonces, en virtud del Teorema 15 vemos que si f es continua y las derivadas $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $1 \leq i \leq n$, son continuas, el problema de condiciones iniciales tiene solución única. Por ejemplo, el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y^{3)} = x + yy' - y'', \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2, \end{cases}$$

tiene solución única.

Nos ocuparemos expecialmente de ecuaciones diferenciales de orden n que llamaremos lineales y que a continuación describimos. Por una *ecuación diferencial lineal de orden* n entenderemos una expresión de la forma

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{2.5}$$

donde para $0 \leq i < n$, a_i y b son funciones reales de variable real definidas en un intervalo de la recta real I. Siempre que $a_n(x)$ sea diferente de cero, podemos escribir la ecuación como

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{2.6}$$

donde $p_i(x) = a_i(x)/a_n(x)$, $0 \leq i < n$, y $q(x) = b(x)/a_n(x)$. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y''' + x^2 y' = x,$$

$$y'' + 2y' + y = e^x,$$

$$y^{6)} - 7e^x y^{3)} + x^2 y'' + (\log x)y = 0$$

son ecuaciones lineales de órdenes tres, dos y seis, respectivamente. Como hemos visto anteriormente, una ecuación de orden n puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = q(x) - [p_{n-1}(x)y_n + ... + p_1(x)y_2 + p_0(x)y_1], \end{cases}$$

que en forma matricial se escribe como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

donde

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -p_0(x) & -p_1(x) & -p_2(x) & -p_3(x) & ... & -p_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{b}(x) = (0, 0, ..., 0, q(x))^t$. Diremos entonces que la ecuación (3.1) es *homogénea* o *no homogénea* según se sea $\mathbf{b}(x)$ nulo o no, es decir, si $q(x) = 0$ para todo x. Además, la ecuación se dirá *de coeficientes constantes* cuando $\mathbf{A}(x)$ sea constante, es decir, cuando $p_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$ para todo $0 \leq i < n$.

Tanto los Teoremas 2.18 y 2.19 como la Proposición 18 admiten la siguiente lectura en términos de ecuaciones lineales. A la vista de que cualquier ecuación lineal puede escribirse como un sistema añadiendo las derivadas como funciones, cualquier solución del sistema $\mathbf{y}$ es de la forma $(y, y', ..., y^{n-1})$, donde $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suficientemente derivable. En esta línea, destacamos entonces que el wronskiano puede escribirse como

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, ..., y_n](x) &= W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n](x) := |\mathbf{y}_1(x); \mathbf{y}_2(x); ...; \mathbf{y}_n(x)| \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_2(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_2'(x) & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1)}(x) & ... & y_2^{n-1)}(x) & y_n^{n-1)}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_n$ son las primeras componentes de $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$. Podremos enunciar entonces los siguientes resultados.

Teorema 20 *El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, esto es, cualquier solución y de la misma es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes del mismo.

Proposición 21 *Sean $y_1, y_2, ..., y_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Son equivalentes:

(a) $y_1, y_2, ..., y_n$ son linealmente independientes.

(b) $W[y_1, y_2, ..., y_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

(c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2, ..., y_n](x_0) \neq 0$.

Teorema 22 *El conjunto de soluciones de la ecuación*

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n + y_p,$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e y_p es una solución particular del problema no homogéneo.

2.2. Resolución desistemas lineales de coeficientes constantes

Vamos a considerar sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \tag{2.7}$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n}$ es una matriz cuadrada, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x))^t$ donde para $1 \leq j \leq n$, b_j son funciones reales definidas sobre un intervalo de la recta real I e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$. Los métodos que vamos a estudiar son matriciales por lo que es necesario tener frescos conceptos sobre la teoría de matrices y especialmente con la diagonalización de éstas.

2.2.1. Resolución del sistema homogéneo

Vamos a introducir un método matricial para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes que está basado en el cálculo de la exponencial de una matriz utilizando el Teorema de Cayley–Hamilton. Explicaremos en primer lugar en qué consiste el Teorema de Cayley–Hamilton y posteriormente introduciremos la exponencial de una matriz, que nos va a proporcionar la solución de sistemas homogéneos de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n}$ es una matriz cuadrada.

Teorema de Cayley–Hamilton

Supongamos que $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n}$ es una matriz cuadrada y $q(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$, es un polinomio de coeficientes reales. Si intercambiamos x por $\mathbf{A}$ construimos lo que denominaremos un polinomio matricial

$$q(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{A}^k + a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + ... + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I}_n.$$

Nótese que el término independiente del polinomio aparece multiplicado por la matriz identidad $\mathbf{I}_n$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

y $q(x) = x^3 + 2x - 1$, entonces

$$\begin{aligned} q(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A} - \mathbf{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 38 & 58 \\ 87 & 125 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El Teorema de Cayley–Hamilton afirma lo siguiente.

Teorema 23 ***(Cayley–Hamilton).*** *Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz cuadrada y sea $p(x) = |\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n|$ su polinomio característico. Entonces $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.*

Demostración. Como sabemos del tema inicial,

$$|\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n| \cdot \mathbf{I}_n = p(x) \cdot \mathbf{I}_n = (\overline{\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n})^t \cdot (\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n),$$

donde $(\overline{\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n})^t$ es la matriz traspuesta de la adjunta de $\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n$. Entonces $(\overline{\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n})^t = (q_{ij}(x))$, donde $q_{ij}(x)$ son polinomios reales en x de grado a lo sumo $n-1$. Podemos reordenar dicha matriz como

$$(\overline{\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n})^t = \mathbf{B}_1 \cdot x^{n-1} + \mathbf{B}_2 \cdot x^{n-2} + ... + \mathbf{B}_{n-1} \cdot x + \mathbf{B}_n,$$

donde $\mathbf{B}_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} p(x) \cdot \mathbf{I}_n &= (\mathbf{B}_1 \cdot x^{n-1} + \mathbf{B}_2 \cdot x^{n-2} + ... + \mathbf{B}_{n-1} \cdot x + \mathbf{B}_n) \cdot (\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{I}_n) \\ &= -\mathbf{B}_1 \cdot x^n + (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_2) \cdot x^{n-1} + ... + (\mathbf{B}_{n-1} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_n) \cdot x + \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{A}, \end{aligned}$$

de donde sustituyendo x por la matriz $\mathbf{A}$ tenemos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= p(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}_n \\ &= -\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}^n + (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{A}^{n-1} + ... + (\mathbf{B}_{n-1} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}_n) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

con lo que termina la demostración.□

A modo de ejemplo, dada la matriz anterior, su polinomio característico es

$$p(x) = x^2 - 5x - 2,$$

y si calculamos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este teorema será clave para poder obtener una fórmula que permita resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

El polinomio característico de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ no tiene porqué ser el de menor grado que satisfaga el teorema de Cayley–Hamilton. Un polinomio $q(t)$ se dice mínimo para la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ si $q(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. En general se sabe que $q(t)$ divide al polinomio característico de $\mathbf{A}$, es decir, dicho polinomio será de la forma

$$q(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_p)^{r_p},$$

donde λ_i, $1 \leq i \leq p$ son los valores propios de $\mathbf{A}$ y $r = r_1 + ... + r_p \leq n$, donde n es el grado del polinomio característico $p(t)$.

Como sabemos, para que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable tiene que cumplirse que si

$$p(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (t - \lambda_p)^{n_p},$$

entonces para cada valor propio λ_i debe cumplirse que su multiplicidad algebraica $n_i = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n)$, donde $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n)$ es el subespacio propio asociado al valor propio λ_i. Esta condición es equivalente a que $r_i = 1$, siendo r_i el exponente del monomio $t - \lambda_i$ en el polinomio mínimo.

Veamos un par de ejemplos. Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que tiene valores propios 1 (doble) y 2 (simple). Esta matriz será diagonalizable si su polinomio mínimo es $q(t) = (t-1)(t-2)$. Calculamos

$$q(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \cdot (\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}_3) = \mathbf{0},$$

por lo que dicha matriz es diagonalizable.Sin embargo la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene los mismos valores propios con las mismas multiplicidades y sin embargo

$$q(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \cdot (\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que no puede ser diagnalizable.

Además, si λ_i es valor propio de $\mathbf{A}$, para comprobar la relación $n_i = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n)$, basta comprobar que $q_1(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, siendo

$$q_1(t) = (t - \lambda_i) \frac{p(t)}{(t - \lambda_i)^{n_i}}.$$

2.2.2. Resolución de sistemas. La exponencial de una matriz

En esta sección vamos a obtener una fórmula para resolver sistemas de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \tag{2.8}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de coeficientes reales. Para esto, debemos recordar un caso particular de éste cuando la matriz es de una fila y una columna, es decir, cuando tenemos la ecuación lineal homogénea de orden uno

$$y' = ay, \ a \in \mathbb{R}.$$

En este caso, la solución general de esta ecuación es de la forma

$$y(x) = e^{ax}c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Por analogía con el caso unidimensional, para el caso general la solución del sistema (2.8) va a ser de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A} \cdot x} \cdot \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector columna constante y $e^{\mathbf{A} \cdot x}$ es la exponencial de la matriz $\mathbf{A} \cdot x$ definida por la serie

$$e^{\mathbf{A} \cdot x} := \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \cdot \frac{x^i}{i!}.$$

Para hacer más comprensible este capítulo, vamos a dar algunas nociones sobre la exponencial de una matriz.

La exponencial de una matriz

Consideremos una matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Como hemos definido anteriormente, la exponencial de dicha matriz viene definida, en analogía con la exponencial de un número real, viene dada por la serie

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \cdot \frac{1}{i!},$$

donde supondremos que $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$. Esta serie siempre es convergente, es decir, para toda matriz cuadrada con coeficientes reales la serie anterior nos proporciona una matriz de coeficientes reales.

Hay casos en los que es bastante sencillo calcular la exponencial de una matriz. Por ejemplo, si $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$ es una matriz diagonal, entonces para todo número natural i se tiene que $\mathbf{D}^i = \mathrm{diag}(d_1^i, ..., d_n^i)$ y entonces

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{D}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{D}^i \cdot \frac{1}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{diag}(d_1^i, ..., d_n^i) \cdot \frac{1}{i!} \\ &= \mathrm{diag}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_1^i}{i!}, ..., \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_n^i}{n!} \right) \\ &= \mathrm{diag}(e^{d_1}, ..., e^{d_n}). \end{aligned}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Además, la exponencial de una matriz cumple la siguientes propiedades (que no justificaremos). Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas que conmutan, esto es $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, entonces

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}. \tag{2.9}$$

Dado el vector columna $\mathbf{C}$, la función $\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A} \cdot x} \cdot \mathbf{C}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es derivable y

$$\mathbf{y}'(x) = \frac{d}{dx} e^{\mathbf{A} \cdot x} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A} \cdot x} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x),$$

es decir, es solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (2.8).

Ahora bien, consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es la matriz

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

pero ¿cómo calculamos dicha matriz? A continuación vamos a ver un método basado en el Teorema de Cayley–Hamilton que permite hacer el cálculo con cierta facilidad, aunque los cálculos sean laboriosos.

Cálculo práctico de la exponencial

Para fijar ideas supongamos que $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ y que tiene k raíces reales o complejas $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$ con multiplicidades $r_1, r_2, ..., r_k$. Buscamos entonces polinomios $a_1(x), a_2(x), ..., a_k(x)$ con grado a lo sumo $r_i - 1$ para cada $1 \leq i \leq k$, de manera que se verifique la igualdad

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1(x)}{(x-\lambda_1)^{r_1}} + \frac{a_2(x)}{(x-\lambda_2)^{r_2}} + ... + \frac{a_k(x)}{(x-\lambda_k)^{r_k}},$$

de donde

$$1 = a_1(x)q_1(x) + a_2(x)q_2(x) + ... + a_k(x)q_k(x), \tag{2.10}$$

con $q_i(x) = p(x)/(x-\lambda_i)^{r_i}$, $1 \leq i \leq k$. Sustituyendo en (2.10) x por $\mathbf{A}$ tendremos

$$\mathbf{I}_n = a_1(\mathbf{A})q_1(\mathbf{A}) + a_2(\mathbf{A})q_2(\mathbf{A}) + ... + a_k(\mathbf{A})q_k(\mathbf{A}). \tag{2.11}$$

Dado que para todo $1 \leq i \leq k$,

$$e^{\lambda_i x \cdot \mathbf{I}_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{I}_n^j \cdot \frac{(\lambda_i x)^j}{j!} = e^{\lambda_i x} \cdot \mathbf{I}_n,$$

entonces

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} = e^{\lambda_i x \cdot \mathbf{I}_n} e^{(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n)\cdot x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}.$$

De aquí, multiplicando por la izquierda ambos miembros por $q_i(\mathbf{A})$

$$\begin{aligned} q_i(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!} \\ &= e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{r_i - 1} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

dado que por el Teorema de Cayley–Hamilton, para todo $j \geq r_i$ se tiene que $q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n)^j = p(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n)^{j-r_i} = \mathbf{0}$. Multiplicando nuevamente por la izquierda por $a_i(\mathbf{A})$ obtendremos

$$a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}\cdot x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{r_i - 1} a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}. \tag{2.12}$$

Sumando (2.12) desde 1 hasta k y teniendo en cuenta (2.11) concluimos que la exponencial de la matriz puede calcularse con la fórmula

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} = \sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i x} \cdot a_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) \sum_{j=0}^{r_i-1} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!} \right). \tag{2.13}$$

Consideremos por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2; \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

y el polinomio característico

$$p(x) = x^2 - 7x + 6,$$

que tiene por raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$. Calculamos ahora a_1 y a_2 a partir de

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-6} = \frac{(a_1+a_2)x - 6a_1 - a_2}{p(x)},$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ -6a_1 - a_2 = 1, \end{cases}$$

que tiene por solución $a_1 = -1/5$ y $a_2 = 1/5$. Además

$$q_1(x) = p(x)/(x-1) = x - 6$$

y

$$q_2(x) = p(x)/(x-6) = x - 1.$$

Aplicamos ahora la fórmula (2.13) y tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^x(-1/5\mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - 6\mathbf{I}_2) + e^{6x}(1/5\mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solución del sistema será

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} e^{6x}(3c_1 + 2c_2) + e^x(2c_1 - 2c_2) \\ e^{6x}(3c_1 + 2c_2) + e^x(-3c_1 + 3c_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

esto es

$$y_1(x) = \frac{1}{5}\left(e^{6x}(3c_1 + 2c_2) + e^x(2c_1 - 2c_2)\right)$$

e

$$y_2(x) = \frac{1}{5}\left(e^{6x}(3c_1 + 2c_2) + e^x(-3c_1 + 3c_2)\right),$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales. Si tuviésemos alguna condición inicial, por ejemplo, $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$, entonces planteando el sistema

$$\begin{array}{l} y_1(0) = c_1 = 1, \\ y_2(0) = c_2 = 0, \end{array}$$

obtendríamos que

$$y_1(x) = \frac{1}{5}(3e^{6x} + 2e^x)$$

e

$$y_2(x) = \frac{1}{5}(3e^{6x} - 3e^x)$$

es la única solución de dicho problema de condiciones iniciales.

Consideremos ahora el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 3y_1 + y_2; \\ y_2' = -y_1 + y_2; \end{array} \right.$$

cuyo polinomio característico asociado a la matriz $\mathbf{A}$ es $p(x) = x^2 - 4x + 4$, que tiene por solución la raíz doble $\lambda = 2$. Entonces

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{(x-2)^2} = \frac{a_1}{p(x)},$$

de donde $a_1 = 1$ y

$$q_1 = p(x)/(x-2)^2 = 1.$$

Aplicando la fórmula (2.13) tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^{2x} a_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{A}) \sum_{i=0}^{1} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)^i \cdot \frac{x^i}{i!} \\ &= e^{2x}\mathbf{I}_n\mathbf{I}_n \left(\mathbf{I}_n + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \right) \\ &= e^{2x} \left(\begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

con lo que la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales (la expresión definitiva de y_1 e y_2 se deja como ejercicio al lector).

Si por último tomamos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 3y_1 - 5y_2; \\ y_2' = y_1 - y_2; \end{array} \right.$$

podemos ver que el polinomio característico asociado a la matriz $\mathbf{A}$ es $p(x) = x^2 - 2x + 2$ que tiene por raíces los números complejos conjugados $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$. De la expresión

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{(x-1-i)} + \frac{a_2}{(x-1+i)} = \frac{(a_1+a_2)x + a_1(-1+i) + a_2(-1-i)}{p(x)},$$

que da lugar al sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1(-1+i) + a_2(-1-i) = 1, \end{cases}$$

que nos da como solución $a_1 = \frac{1}{2i}$ y $a_2 = -\frac{1}{2i}$. Teniendo en cuenta que

$$q_1(x) = x - 1 + i,$$

y

$$q_2(x) = x - 1 - i,$$

se tiene aplicando la fórmula (2.13)

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}\cdot x} &= e^{(1+i)x}\frac{1}{2i}\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - (1-i)\mathbf{I}_2) - e^{(1-i)x}\frac{1}{2i}\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - (1+i)\mathbf{I}_2) \\
&= e^x\left(e^{ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix} - e^{-ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\right) \\
&= e^x\begin{pmatrix} 2\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \dfrac{e^{ix}+e^{ix}}{2} & -5\dfrac{e^{ix}-e^{ix}}{2i} \\ \dfrac{e^{ix}-e^{ix}}{2i} & -2\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \dfrac{e^{ix}+e^{ix}}{2} \end{pmatrix} \\
&= e^x\cdot\begin{pmatrix} 2\sin x + \cos x & -5\sin x \\ \sin x & -2\sin x + \cos x \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dado que

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

y

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Entonces toda solución del sistema viene dada por la expresión

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^x\cdot\begin{pmatrix} 2\sin x + \cos x & -5\sin x \\ \sin x & -2\sin x + \cos x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Los tres ejemplos anteriores resumen los casos que pueden darse para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, que el polinomio característico tenga dos soluciones reales distintas, una real doble o dos complejas conjugadas. Cuando el número de ecuaciones es mayor, pueden aparecer otros casos, pero básicamente la matriz exponencial contiene en sus coordenadas funciones de la forma

$$x^n e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ y } x^n e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

donde $n \geq 0$ y α y β son números reales. En cualquier caso, resolveremos sistemas que a lo sumo tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, pues a partir de ese número de ecuaciones los cálculos suelen ser muy largos y engorrosos en general.

2.2.3. El método de variación de constantes

Volvamos ahora sobre el sistema no homogéneo (2.7) y supongamos conocida la solución general del sistema homogéneo asociado. Para terminar de resolver el sistema no homogéneo usaremos el método de variación de constantes. Para ello supongamos que la solución es de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}(x),$$

donde $\mathbf{C}(x)$ es una función a determinar. Derivando respecto de x obtendremos que

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}(x) + e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x).$$

Sustituyendo en el sistema no homogéneo tendremos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

o equivalentemente

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x).$$

Dado que la matriz $e^{\mathbf{A}\cdot x}$ es invertible (recordar la Proposición 18) y teniendo en cuenta que

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} \cdot e^{-\mathbf{A}\cdot x} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}_n,$$

concluimos que $e^{-\mathbf{A}\cdot x}$ es la inversa de $e^{\mathbf{A}\cdot x}$ y entonces

$$\mathbf{C}(x) = \int e^{-\mathbf{A}\cdot x} \cdot \mathbf{b}(x)dx. \tag{2.14}$$

Una vez calculada $\mathbf{C}(x)$ obtenemos la solución del sistema no homogéneo.

Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + e^x; \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2, \end{cases}$$

que también podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ya vimos que la exponencial de la matriz del sistema era

$$e^{\mathbf{A}\cdot x} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix}$$

por lo que a partir de (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} &= \int \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-6x} + 2e^{-x} & 2e^{-6x} - 2e^{-x} \\ 3e^{-6x} - 3e^{-x} & 2e^{-6x} + 3e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} dx \\
&= \frac{1}{5} \int \begin{pmatrix} 3e^{-5x} + 2 \\ 3e^{-5x} - 3 \end{pmatrix} dx \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \int (3e^{-5x} + 2)dx \\ \int (3e^{-5x} - 3)dx \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3e^{-5x}/5 + 2x + c_1 \\ -3e^{-5x}/5 - 3x + c_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

con lo que la solución

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(x) &= \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3e^{-5x}/5+2x+c_1 \\ -3e^{-5x}/5-3x+c_2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} 3e^{6x}+2e^{x} & 2e^{6x}-2e^{x} \\ 3e^{6x}-3e^{x} & 2e^{6x}+3e^{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix}+\frac{1}{25}e^{x}\cdot\begin{pmatrix} 10x-3 \\ 3-15x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nótese que una solución particular del sistema es

$$\mathbf{y}_p(x)=\frac{1}{25}e^{x}\cdot\begin{pmatrix} 10x-3 \\ 3-15x\end{pmatrix},$$

por lo que haciendo $k_i = c_i/5$, $i = 1,2$, tenemos que

$$\mathbf{y}(x)=e^{\mathbf{A}\cdot x}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2\end{pmatrix}+\mathbf{y}_p(x),$$

tal y como el Teorema 2.19 afirmaba.

Si por ejemplo consideramos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1+2y_2+e^{x}; \\ y_2' = 3y_1+3y_2; \\ y_1(0)=0, y_2(0)=1; \end{cases}$$

se verificará que

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix}+\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 3\end{pmatrix}$$

de donde

$$c_1 = 3$$

y

$$c_2 = 22,$$

de donde sustituyendo en la solución general concluimos que

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x)\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 13e^{6x}+e^{x}(10x-13) \\ 13e^{6x}+e^{x}(12-15x)\end{pmatrix}$$

es la única solución de dicho problema de condiciones iniciales.

2.3. Resolviendo sistemas mediante la transformada de Laplace

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}'(t)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(t)+\mathbf{f}(t) \tag{2.15}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de n filas por n columnas con coeficientes reales, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^t$ donde f_i son funciones dadas e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$ es la función vectorial incógnita. Supongamos además las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{2.16}$$

donde $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)^t$ con y_i^0 números reales para $1 \leq i \leq n$. Sea

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (\mathcal{L}[y_1](z), \mathcal{L}[y_2](z), ..., \mathcal{L}[y_n](z))^t.$$

Entonces, tomando la Transformada de Laplace en (2.15) y teniendo en cuenta (2.16) obtenemos que

$$z\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

de donde, si $\mathbf{I}_n$ denota la matriz identidad,

$$(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = \mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

y de aquí

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z)). \tag{2.17}$$

Una vez calculada de este modo $\mathcal{L}[\mathbf{y}](z)$ obtendremos $\mathbf{y}$ tomando la Transformada inversa.

Por ejemplo consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De (2.17)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1](z) \\ \mathcal{L}[y_2](z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z-2 & 3 \\ -3 & z-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2-4z+13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2z+1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)} \\ \frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la solución del problema viene dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}[\frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)}](t) \\ \mathcal{L}^{-1}[\frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)}](t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28e^{2t}\cos(3t) + 16e^{2t}\sin(3t) - 2 \\ 28e^{2t}\sin(3t) - 16e^{2t}\cos(3t) + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4. Problemas con funciones discontinuas

Supongamos que el problema

$$\begin{cases} y'' + y = f(t); \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$$

viene dada ahora con la función discontinua

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ \cos(2t) & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

Podemos escribir ahora

$$(z^2+1)\mathcal{L}[y](z) = 1 + \mathcal{L}[f](z).$$

Por otra parte

$$f(t) = t(h_0(t) - h_\pi(t)) + h_\pi(t)\cos(2t),$$

con lo que

$$\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[th_0(t)](z) + \mathcal{L}[th_\pi(t)](z) + \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2t)](z).$$

Desarrollando cada sumando por separado, obtenemos

$$\mathcal{L}[th_0(t)](z) = 1/z^2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[th_\pi(t)](z) &= \mathcal{L}[(t-\pi)h_\pi(t)](z) + \pi\mathcal{L}[h_\pi(t)](z) \\ &= \frac{e^{-\pi z}}{z^2} + \pi\frac{e^{-\pi z}}{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2t)](z) &= \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos(2(t-\pi))](z) \\ &= e^{-\pi z}\frac{z}{z^2+4}. \end{aligned}$$

Combinando estas expresiones tenemos

$$(z^2+1)\mathcal{L}[f](z) + 1 = \frac{z^2+1}{z^2} + e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z} + \frac{z}{z^2+4}\right).$$

Entonces

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z^2+1}{z^2(z^2+1)} + e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)} + \frac{\pi}{z(z^2+1)} + \frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right),$$

y así

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) + \pi\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t) \\ &= t + f_1(t-\pi)h_\pi(t) + \pi f_2(t-\pi)h_\pi(t) + f_3(t-\pi)h_\pi(t), \end{aligned}$$

donde las funciones f_1, f_2 y f_3 se determinan de la siguiente manera.

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t) = t - \sin t.$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t) = 1 - \cos t.$$

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t) \\ &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+1}\right](t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4}\right](t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos(2t). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= t + h_\pi(t)[(t-\pi) - \sin(t-\pi) + \pi - \pi\cos(t-\pi) + \frac{1}{3}\cos(t-\pi) - \frac{1}{3}\cos(2t-2\pi)] \\ &= (1-h_\pi(t))t + h_\pi(t)[2t + \sin t + (3\pi-1)/3\cos t - \cos(2t)/3], \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$y(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ 2t + \sin t - (3\pi-1)/3\cos t - \cos(2t)/3 & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

2.5. Sistemas autónomos, puntos críticos y noción de estabilidad

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es una función con regularidad suficiente para satisfacer la unicidad de soluciones para un problema de condiciones iniciales o de Cauchy. Si la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones del sistema, es decir, el sistema es de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se dice que el sistema de ecuaciones es autónomo. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x + t, \\ y' = xy, \end{cases}$$

es no autónomo mientras que

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = xy, \end{cases} \tag{2.18}$$

o

$$y' = 4y(1-y) \tag{2.19}$$

son autónomos.

Aunque estos sistemas pueden no ser fáciles de resolver, es sencillo encontrar determinadas soluciones particulares. Entre ellas destacan las soluciones constantes, cuyascondiciones iniciales vienen dadas por las soluciones del sistema algebraico

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Si $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ y verifica que

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0},$$

entonces la solución constante de la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0,$$

es la única solución del problema de condiciones inciales

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$. Así, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ xy = 0, \end{cases}$$

vemos que $(0, 0)$ es el único punto crítico del sistema (2.18), mientras que al resolver la ecuación

$$4y(1 - y) = 0$$

comprobamos que 0 y 1 son los puntos críticos de la ecuación (2.19). Como veremos posteriormente, estos puntos serán de gran importancia en el análisis de la estabilidad de un sistema. Veamos que se entiende por estabilidad.

Definición 1 *Sea el sistema autónomo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{2.20}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *y* $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es una función con funciones coordenadas* $f_1, f_2, ..., f_n$*. Una solución* $\mathbf{y}(t)$ *de (2.20) definida para todo* $t \geq 0$ *se dice* estable *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\mathbf{z}(t)$ *es otra solución que cumple la condición* $||\mathbf{y}(0) - \mathbf{z}(0)|| < \delta$ *entonces* $\mathbf{z}(t)$ *está definida para todo* $t \geq 0$ *y se verifica que* $||\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)|| < \varepsilon$ *para todo* $t \geq 0$*. Si además se verifica que*

$$\lim_{t \to \infty} ||\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)|| = 0$$

la solución $\mathbf{y}(t)$ *se dirá* asintóticamente estable*. La solución* $\mathbf{y}(t)$ *se dirá* inestable *si no es estable.*

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$y' = y,$$

cuyas soluciones son de la forma

$$y(t) = y_0 e^{t - t_0}$$

para condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$. Claramente, para dos soluciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ se verifica que

$$\lim_{t\to+\infty} |y_2(t) - y_1(t)| = +\infty,$$

por lo que dicha ecuación es iniestable en todas sus soluciones. Lo contrario ocurre con la ecuación

$$y' = -y,$$

que es asintóticamente estable. Finalmente, dado que las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$$

son circunferencias concentricas con centro $(0, 0)$, se tiene que las soluciones del sistemas son estable aunque no asintóticamente estables.

2.6. Estabilidad de sistemas lineales

Consideremos ahora un sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene n filas y columnas. Aunque en este caso no disponemos de la representación de los diagramas de fases del mismo, sí que es posible determinar la estabilidad del mismo, con un resultado análogo al anterior. Para establecer el mismo, dada la matriz $\mathbf{A}$, denotaremos por $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los valores propios de $\mathbf{A}$ con multiplicidades $m_1, ..., m_k$. Asímismo, denotaremos por $d_1, ..., d_k$ las dimensiones sobre $\mathbb{C}$ de los subespacios propios $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_n), ..., \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}_n)$.

Teorema 24 *Sea el sistema lineal plano* $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *no nula. Entonces*

(a) El sistema es estable si $\mathrm{Re}\,\lambda_i \leq 0$, $1 \leq i \leq k$, *y además si* λ_i *verifica que* $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$, *entonces* $d_i = m_i$.

(b) El sistema es asintóticamente estable si $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ *para todo* $i = 1, ..., k$.

(c) El sistema es inestable si o bien existe λ_i *tal que* $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ *y* $m_i > d_i$, *o bien existe* λ_i *tal que* $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$.

Ejemplo 1 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -2x + y + 2z, \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$$

Es fácil ver que 1 y -1 son los valores propios de la matriz asociada al sistema, por lo que en virtud del Teorema 24 (c), éste es inestable. ■

Ejemplo 2 Sea ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z, \\ y' = x - 2y - z, \\ z' = -x + y - 2z. \end{cases}$$

Podemos ver ahora que los valores propios de la matriz asociada son -1, -2 y -3, por lo que por el Teorema 24 (b), el sistema es asintóticamente estable. ■

Ejemplo 3 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y + 3z, \\ y' = 2z, \\ z' = -2y. \end{cases}$$

Puede comprobarse que $\pm 2i$ y -4 son los valores propios de la matriz del sistema. Cómo las dimensiones de los subespacios propios de los valores propios $\pm i$ son 1 y coincide con la multiplicidad de éstos, por el Teorema 24 (a) y (b) el sistema será estable, aunque no será asintóticamente estable. ■

La aplicación del Teorema 24 tiene a priori un punto flaco puesto de manifiesto por el siguiente ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases}$$

Este sistema coincide con el del apartado (d) del ejercicio anterior en todos los coeficientes de la matriz asociada excepto el primero. El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 12\lambda - 63$, pero resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$ no resulta sencillo, y quizás ni siquiera factible para los conocimientos de los que se disponen. Ahora bien, para aplicar el Teorema 24 en la mayoría de los casos sólo necesitamos conocer los signos de las partes reales de los valores propios de la matriz asociada. Para este objetivo podemos usar el siguiente criterio de Routh-Hurwitz que, aunque no siempre es aplicable, supone una gran ayuda para determinar al menos si el sistema es asintóticamente estable.

Proposición 25 *Sea $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$ el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte real negativa si y sólo son estrictamente positivos los menores principales de la matriz*

$$\mathbf{H_A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 2z, \\ y' = -3x - y - z, \\ z' = -4x - y - z. \end{cases}$$

El polinomio característico de la matriz asociada es $p(\lambda) = 3 + 11x + x^2 - x^3$ y la matriz $\mathbf{H_A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyos menores principales son 1, 8 y 24. Está claro entonces que todos los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa, por lo que el sistema será asintóticamente estable. ■

Además puede ser de utilidad el siguiente resultado que denominaremos *Teorema de círculo de Gershgorin.*

Teorema 26 *Sea* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *con valores propios* $\lambda_1, ..., \lambda_r$. *Entonces todos los valores propios están en el conjunto del plano de la forma*

$$\{x+iy \in \mathbb{C} : \sqrt{(x-a_{11})^2+y^2} < r_1\} \cup ... \cup \{x+iy \in \mathbb{C} : \sqrt{(x-a_{nn})^2+y^2} < r_n\},$$

donde $r_k = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| - |a_{ii}|$, $k = 1, 2, ..., n$.

Demostración. Si λ es valor propio de $\mathbf{A}$ con vector propio $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$ y $s = \max\{|v_i| : i = 1, ..., n\}$. Definimos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{s} \cdot \mathbf{v} = (u_1, ..., u_n),$$

que también es vector propio de λ tal que $\max\{|u_i| : i = 1, ..., n\} = |u_{i_o}| = 1$. Entonces

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} u_j = \lambda u_{i_0},$$

con lo que

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^n a_{i_0 j} u_j = (\lambda - a_{i_0 i_0}) u_{i_0}.$$

Así

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^n a_{i_0 j} u_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^n |a_{i_0 j}||u_j| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| = r_{i_0},$$

con lo que el resultado queda probado. ■

Vemos cómo se aplica este resultado en el siguiente ejemplo.

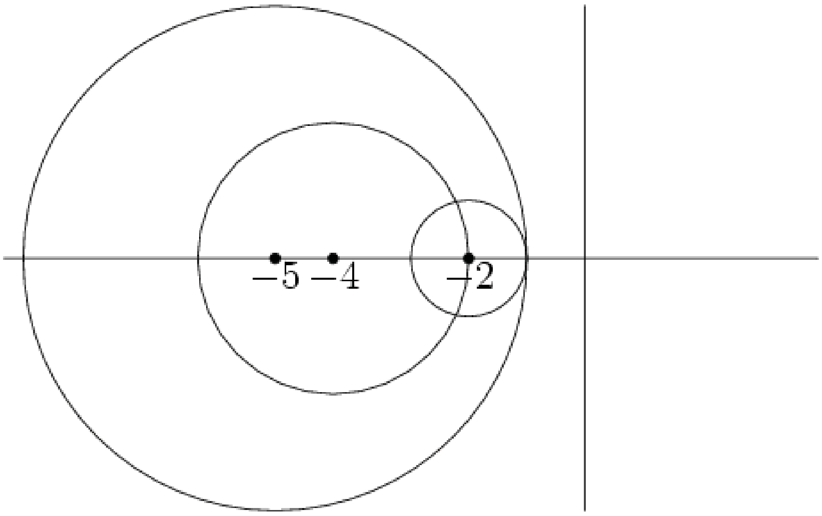
Ejemplo 5 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z, \\ y' = -2y + z, \\ z' = 4y - 5z. \end{cases}$$

El conjunto a que hace referencia el resultado anterior es

$$\{(x,y) : \sqrt{(x+4)^2+y^2} < 2\} \cup \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2+y^2} < 1\}\{(x,y) : \sqrt{(x+5)^2+y^2} < 4\},$$

que gráficamente representamos por



por lo que todos los valores propios tienen parte real negativa y el sistema es por tanto asitóticamente estable. ■

Ejercicio 1 *Determinar si es posible la estabilidad asintótica de los siguientes sistemas*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x' = -\frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z, \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z. \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{l} x' = -3x - y + z, \\ y' = x - 5y - z, \\ z' = 2x - 2y - 4z. \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{l} x' = -\frac{5}{12}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z, \\ y' = \frac{5}{12}x - \frac{13}{12}y - \frac{5}{12}z, \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{5}{6}z. \end{array}\right.$$

2.6.1. ¿Por qué un sistema estable es útil en ingeniería?

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t),$$

donde $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y supongamos que el sistema autónomo asociado

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

es asintóticamente estable. Entonces toda solución del sistema autónomo

$$\mathbf{y}_h(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{C},\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$$

verifica que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}_h(t) = \mathbf{0}.$$

Ahora bien, toda solución del sistema no autónomo es de la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t) \tag{2.21}$$

donde $\mathbf{y}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo. Si tomamos límites cuando t tiende a infinito, tenemos que

$$\mathbf{y}(t) \simeq \mathbf{y}_p(t),$$

es decir, para tiempos grandes (aquí lo de grande depende de cada sistema) la solución del sistema no autónomo es básicamente la solución particular del mismo y la parte de la solución correspondiente al sistema homogéneo se va reduciendo con el tiempo. En ingeniería a la función $\mathbf{f}(t)$ se le llama entrada del sistema e $\mathbf{y}_p(t)$ es la salida del mismo. Si el sistema es estable, al variar la entrada, varía la salida sin que la parte homogénea intervenga en el proceso. Esto es lo que ocurre en la mayoría de los sistemas lineales utilizados en las ciencias experimentales, como en circuitos eléctricos o vibraciones mecánicas.

2.7. Funciones de transferencia. Estabilidad y control de sistemas lineales

Supongamos un sistema dado por la ecuación

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b_m f^{m)} + b_{m-1} f^{m-1)} + ... + b_1 f' + b_0 f, \tag{2.22}$$

donde $m < n$, $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$ y $b_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq m$. f es una señal entrada del sistema e y es la respuesta que produce en sistema a la excitación que f representa. Aplicando formalmente la transformada de Laplace a (2.22) con todas las condiciones iniciales nulas obtenemos

$$Q_n(z)\mathcal{L}[y](z) = P_{m(z)}\mathcal{L}[f](z),$$

donde Q_n es un polinomio de grado n y P_m es un polinomio de grado m. La *función de transferencia del sistema*, se define como

$$T(z) = \frac{\mathcal{L}[y](z)}{\mathcal{L}[f](z)} = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}.$$

La estabilidad del sistema puede estudiarse a partir de los polos de la función de transferencia, entendiendo por estabilidad de un sistema lo siguiente. El sistema será *asintóticamente estable* si en ausencia de excitación ($f = 0$) y para cualquier condición inicial que consideremos se verifica que $|y(t)| \to 0$ si $t \to +\infty$. Será *estable* si existen $K > 0$ y $t_0 > 0$ tales que $|y(t)| < K$ si $t \geq t_0$. Finalmente es sistema es *inestable* si $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 27 *Sea* $Q_n(z) = \prod_{i=1}^r a_n(z - \beta_i)^{n_i}$, $\sum_{i=1}^r n_i = n$. *Entonces el sistema (2.22) es*

(a) Asintóticamente estable si $\operatorname{Re}\beta_i < 0$ *para todo* $i = 1, 2, ..., r$.

(b) Estable si $\operatorname{Re}\beta_i \leq 0$ *y* $\operatorname{Re}\beta_i = 0$ *implica que la multiplicidad de* β_i *es* 1.

(c) Inestable si no se cumplen algunas de las condiciones (a) o (b) anteriores.

Proof. Sean β_j, $1 \leq j \leq r$ las raíces de $Q_n(z)$ con multiplicidades n_j. Para $1 \leq j \leq r$, consideremos los polinomios

$$P_j^{k_j}(z) = (x - \beta_j)^{k_j - 1} \prod_{i \neq j} (x - \beta_i)^{n_i},\ 1 \leq k_j \leq n_j.$$

Es fácil comprobar que $\mathcal{B} = \{P_j^{k_j}(z) : 1 \leq j \leq r;\ 1 \leq k_j \leq n_j\}$ es una base del conjunto de polinomios con coeficientes en el cuerpo de los números complejos de grado a lo sumo $n-1$.

Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{2.23}$$

$$y(0) = y_1,\ y'(0) = y_2, ..., y^{n-1)}(0) = y_n, \tag{2.24}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_n$ son números reales arbitrarios.

Supongamos en primer lugar que $\operatorname{Re}\beta_j < 0$ para todo $j = 1, 2, ..., r$. Entonces, sean cuales fueran las condiciones (2.24) se tiene que la solución del problema es de la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{k_j=1}^{n_j} A_j^{k_j} \mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)^{k_j}](t) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{k_j=1}^{n_j} A_j^{k_j} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} e^{t\beta_j}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $A_j^{k_j}$, $1 \leq j \leq r$, $1 \leq k_j \leq n_j$ vienen determinados a partir de las condiciones iniciales del problema. Como $\operatorname{Re}\beta_j < 0$, es claro que $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0$.

Supongamos ahora que existe $j \in \{1, 2, ..., r\}$ de manera que $\operatorname{Re}\beta_j > 0$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existen condiciones iniciales de manera que para las mismas la solución $y(t)$ contiene un término de la forma

$$A\mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)](t) = Ae^{t\beta_j}$$

con $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces claramente $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$.

Consideremos ahora que toda raíz de $Q_n(z)$, β_j con $\operatorname{Re}\beta_j = 0$ tiene multiplicidad uno ($n_j = 1$) y las restantes raíces tienen parte real negativa. Entonces para cualquier condición inicial la solución $y(t)$ verifica que si $\operatorname{Re}\beta_j = 0$, entonces existe $A_j \in \mathbb{C}$ tal que

$$A_j\mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)](t) = A_j e^{t\beta_j} = A_j(\cos(t \operatorname{Im}\beta_j) + i\sin(t \operatorname{Im}\beta_j)),$$

aparece en la solución. Teniendo en cuenta que todas las raíces tienen parte real menor o igual que cero y el primer apartado, existirá $\varepsilon > 0$ tal que si t es suficientemente grande se verifica

$$|y(t)| \leq \sum_{\operatorname{Re}\beta_j=0} |A_j| + \varepsilon,$$

lo que prueba que el sistema es estable.

Por último, supongamos que existe una raíz de $Q_n(z)$, β_j con $\operatorname{Re}\beta_j = 0$ y con multiplicidad mayor que uno. En estas condiciones existen condiciones iniciales de manera que $y(t)$ contiene un término no nulo de la forma

$$A\mathcal{L}^{-1}[1/(z-\beta_j)^2](t) = Ate^{t\beta_j} = At(\cos(t \operatorname{Im}\beta_j) + i\sin(t \operatorname{Im}\beta_j)),$$

obviamente $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$. ■

2.7.1. Respuesta a una señal sinusuidal

Supongamos un sistema asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$ de manera que es estimulado por una función de tipo seno de la forma

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

donde $A > 0$ es la amplitud, ω es la frecuencia y ϕ es la fase inicial. Como sabemos, el seno es una función 2π periódica, por lo que

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi),$$

por lo que $T = 2\pi/\omega$ se llama periodo de la señal, es decir la frecuencia $\omega = 2\pi/T$. Como sabemos, si la fase inicial $\phi = 0$, la transformada de Laplace de dicha señal será de la forma

$$Y(z) = \frac{A\omega}{z^2 + \omega^2},$$

y la respuesta a largo tiempo del sistema $x(t)$ vendrá dada por la expresión

$$X(z) = T(z)Y(z).$$

Ahora bien, dicha respuesta se calculará como

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(z)Y(z)](t),$$

y dado que el sistema era asintóticamente estable, se tiene que los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa, por lo que ninguno de ellos coincidirá con los polos de $Y(z)$ que son $\pm i\omega$. En el cálculo de la transformada inversa, los polos de la función de transferencia dan lugar a términos que aparecen multiplicados por factores de la forma e^{-ta}, con $a > 0$, y que tienden a cero muy rápidamente cuando $t \to +\infty$. Por ello, al calcular la transformada inversa para tiempo suficientemente grande basta con tomar los polos $\pm i\omega$, es decir, podemos asumir que

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Res}(e^{ti\omega}T(z)\frac{A\omega(z - i\omega)}{z^2 + \omega^2}, i\omega) + \operatorname{Res}(e^{ti\omega}T(z)\frac{A\omega(z + i\omega)}{z^2 + \omega^2}, -i\omega) \\ &= T(i\omega)\frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - T(-i\omega)\frac{Ae^{-ti\omega}}{2i}. \end{aligned}$$

Tomando la forma polar de $T(i\omega)$ y $T(-i\omega)$, y teniendo en cuenta que los coeficientes del sistema son reales obtenemos que

$$T(i\omega) = |T(i\omega)|e^{i\arg T(i\omega)},$$

y

$$T(-i\omega) = |T(-i\omega)|e^{i\arg T(-i\omega)} = |T(i\omega)|e^{-i\arg T(i\omega)}.$$

Sustituyendo en la relación anterior

$$\begin{aligned} x(t) &= T(i\omega)\frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - T(-i\omega)\frac{Ae^{-ti\omega}}{2i} \\ &= |T(i\omega)|e^{i\arg T(i\omega)}\frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - |T(i\omega)|e^{-i\arg T(i\omega)}\frac{Ae^{-ti\omega}}{2i} \\ &= A|T(i\omega)|\frac{e^{i(t\omega + \arg T(i\omega))} - e^{-i(t\omega + \arg T(i\omega))}}{2i} \\ &= A|T(i\omega)|\sin(t\omega + \arg T(i\omega)). \end{aligned}$$

El término $|T(i\omega)|$ mide si la respuesta amplifica o atenua la señal, mientras que $\arg T(i\omega)$ representa un variación de la fase respecto de la incial. Asímismo, $T(i\omega)$ puede ser determinado experimentalmente introduciendo una señal sinusuidal.

2.8. Estabilidad local de sistemas autónomos

2.8.1. Método de linealización de Lyapunov. Teorema de Hartman–Grobman

Analizaremos a continuación la estabilidad de puntos críticos de sistemas autónomos mediante un método que es comúnmente usado en las ciencias experimentales, el método de linealización. Supongamos un sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{2.25}$$

con $\mathbf{f}$ definido sobre el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico aislado del mismo (un punto crítico es aislado si existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta de centro $\mathbf{y}_0$ y radio ε no contiene puntos críticos aparte de $\mathbf{y}_0$). Consideremos el sistema linealizado dado por

$$\mathbf{y}' = \mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{y}, \tag{2.26}$$

donde $\mathrm{J}\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$ es la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{y}_0$. Por ejemplo consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x^2 + 2x + y^2, \\ y' = -2x^3 + 2y. \end{array} \right.$$

Es evidente que $(0,0)$ es un punto crítico del sistema. La matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$\mathrm{J}\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y el sistema linealizado será

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x, \\ y' = 2y. \end{array} \right.$$

Es de esperar que localmente (cerca del punto crítico $\mathbf{y}_0$), el comportamiento asintótico de los sistemas (2.25) y (2.26) sea parecido. Este parecido se precisará con el *Teorema de Hartman–Grobman*, para cuya compresión necesitaremos algunas definiciones previas.

En primer lugar necesitamos una herramienta para comparar localmente sistemas autónomos. Esta herramienta es la *conjugación topológica* [**?**, pag. 239]. Los sistemas (2.25) y (2.26) se dice topológicamente conjugados si existe una aplicación continua, biyectiva con inversa continua $\mathbf{h} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ verificando la condición $\mathbf{h}(\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)) = \mathbf{z}(t, \mathbf{h}(\mathbf{y}_0))$ para todo $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ [aquí $\mathbf{z}(t, \mathbf{h}(\mathbf{y}_0))$ representa la solución maximal de (2.26) con condición inicial $\mathbf{h}(\mathbf{y}_0)$]. Si existen abiertos de $\mathbb{R}^n$ U y V de manera que son topológicamente conjugados los sistemas restringidos a estos abiertos, entonces los sistemas (2.25) y (2.26) se dirán *localmente topológicamente conjugados*. Para entendernos, una conjugación topológica lleva órbitas de un sistema en órbitas del otro sistema, preservando la orientación temporal.

La segunda definición que interviene en el enunciado del Teorema de Hartman–Grobman es el de *punto crítico hiperbólico*. Con la notación anterior $\mathbf{y}_0$ se dice hiperbólico si los valores propios de la matriz Jacobiana $\mathbf{Jf}(\mathbf{y}_0)$ tienen parte real no nula. En caso contrario $\mathbf{y}_0$ se dirá no hiperbólico. En el ejemplo anterior, el valor propio de la matriz Jacobiana es 2 con multiplicidad 2, por lo que $(0,0)$ es un punto crítico hiperbólico.

Teorema 28 ***(Hartman–Grobman)*** *Sea* $\mathbf{y}_0$ *un punto aislado crítico hiperbólico de (2.25). Entonces existen entornos* U *de* $\mathbf{y}_0$ *y* V *de* $\mathbf{0}$ *tales que los sistemas (2.25) y (2.26) son localmente topológicamente conjugados.*

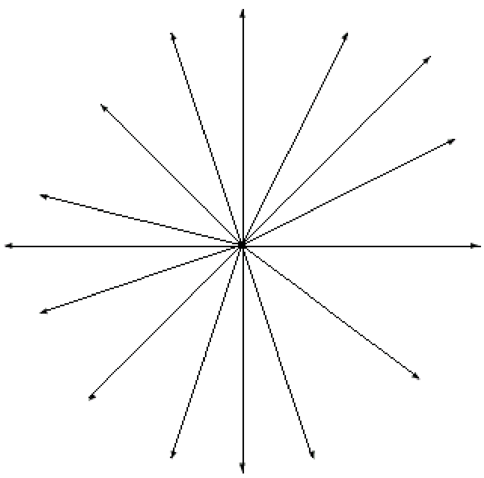
En virtud del teorema anterior sabemos que los sistemas

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2x + y^2, \\ y' = -2x^3 + 2y. \end{cases}$$

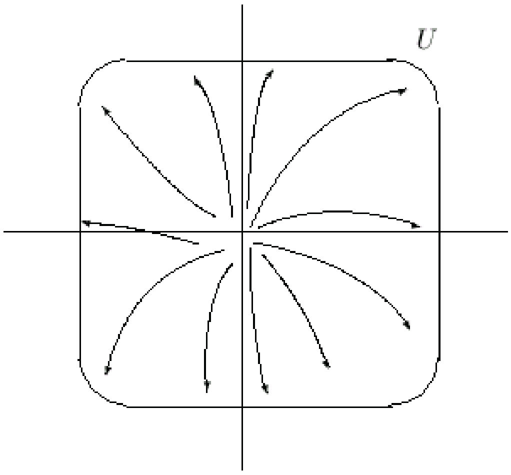
y

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 2y, \end{cases}$$

son localmente topológicamente conjugados en un entorno del punto $(0,0)$. Así, si el diagrama de fases del sistema linealizado es (ver ejemplo **??**)



sin conocer exactamente las órbitas del sistema no linealizado sabemos que cerca de $(0,0)$ se obtienen "deformando" de forma continua las órbitas del sistema linealizado, como por ejemplo muestra la siguiente figura:



Obsérvese como en el dibujo las rectas del sistema linealizado son deformadas y transformadas en curvas. Además, como la orientación temporal se conserva, la estabilidad del punto crítico puede estudiarse a partir del sistema no linealizado. Así, el punto crítico $(0,0)$ es inestable para el sistema no linealizado dado que es inestable para el sistema linealizado.

Hemos de enfatizar el carácter local del Teorema de Hartman–Grobman. Por ejemplo consideramos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -x, \\ y' = 1 - x^2 - y^2, \end{array} \right. \tag{2.27}$$

con dos puntos críticos hiperbólicos, $(0,1)$ y $(0,-1)$. A partir del resultado anterior vemos que $(0,1)$ es asintóticamente estable y $(0,-1)$ es inestable, pero obviamente el sistema (2.27) no puede ser globalmente conjugado a los sistemas $\mathbf{y}' = \mathbf{Jf}(0,1) \cdot \mathbf{y}$ o $\mathbf{y}' = \mathbf{Jf}(0,-1) \cdot \mathbf{y}$, dado que éstos sólo tienen un punto crítico.

2.8.2. El método directo de Lyapunov

Aunque el Teorema de Hartman–Grobman proporciona una herramienta útil para distinguir la estabilidad de puntos críticos hiperbólicos, resulta ineficaz para tratar la misma cuestión con puntos críticos no hiperbólicos. Una opción alternativa válida también en el caso de no hiperbolicidad es el *método directo de Lyapunov*, de clara inspiración física. Consideremos nuevamente el sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{2.28}$$

y sea $\mathbf{y}_0$ un punto crítico, hiperbólico o no, del mismo. El método directo de Lyapunov consiste en encontrar una función escalar $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, satisfaciendo ciertas condiciones. Esta función puede ser considerada como una medida de la "energía potencial" del sistema, de manera que a lo largo de las órbitas ésta decrece cuando $t \to \infty$, indicando estabilidad, o bien crece, indicando inestabilidad. Precisemos a continuación estas ideas.

Dada una solución $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de (2.28), la derivada de V a lo largo de $\mathbf{y}(t)$ es

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{y}(t))}{\partial y_i} y_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{y}(t))}{\partial y_i} f_i(\mathbf{y}(t)) = \mathrm{grad}V(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)),$$

donde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ y $\mathrm{grad}V$ denota el gradiente de V. Definimos entonces la derivada total de V como

$$\dot{V}(\mathbf{y}) := \mathrm{grad}V(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

El siguiente resultado nos garantiza la estabilidad del punto crítico en cuestión.

Teorema 29 *Sean $\mathbf{y}_0$ un punto crítico del sistema (2.28) y $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, continua en U y derivable en $U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$. Supongamos que $V(\mathbf{y}_0) = 0$ y $V(\mathbf{y}) > 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$. Entonces*

(a) Si $\dot{V}(\mathbf{y}) \leq 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$, entonces $\mathbf{y}_0$ es estable.

(b) Si $\dot{V}(\mathbf{y}) < 0$ para todo $\mathbf{y} \in U \setminus \{\mathbf{y}_0\}$, entonces $\mathbf{y}_0$ es asintóticamente estable.

Si V satisface las condición (a) [resp. (b)] del resultado anterior, se dirá una *función de Lyapunov para* $\mathbf{y}_0$ [resp. una *función de Lyapunov estricta para* $\mathbf{y}_0$]. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Es claro que $(0,0)$ es un punto crítico aislado del sistema. La matriz Jacobiana en dicho punto es

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que como puede comprobarse tiene por valores propios $\pm i$, por lo que dicho punto crítico no es hiperbólico. Vamos a comprobar que la función $V(x,y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov estricta para el mismo, por lo que $(0,0)$ será un punto crítico asintóticamente estable. En primer lugar, está claro que $V(0,0) = 0$ y $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Por otra parte, la derivada total es

$$\dot{V}(x,y) = \mathrm{grad}V(x,y) \cdot \mathbf{f}(x,y) = (2x, 2y) \cdot (y - x^3, -x) = -2x^4 \leq 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En virtud del Teorema 29 el punto crítico es estable.

También la inestabilidad de los puntos críticos puede ser discutida, según muestra el siguiente resultado.

Teorema 30 *Sean $\mathbf{y}_0$ un punto crítico del sistema (2.28) y D un abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo a $\mathbf{y}_0$ en su frontera $\mathrm{Fr}(D)$. Supongamos que existe una función $V : U \to \mathbb{R}$, con U un entorno de $\mathbf{y}_0$, con $D \cup \mathrm{Fr}(D) \subset U$, de clase C^1 y tal que $V(\mathbf{y}) > 0$ y $\dot{V}(\mathbf{y}) > 0$ para todo $\mathbf{y} \in D$, y $V(\mathbf{y}) = 0$ si $\mathbf{y} \in \mathrm{Fr}(D)$. Entonces $\mathbf{y}_0$ es inestable.*

Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = y + x^3, \\ y' = x. \end{cases}$$

Sea la función $V : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ |y| < x\}$ y $V(x,y) = x^2 - y^2$. Es fácil darse cuenta de que $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in D$, y que la derivada total

$$\dot{V}(x,y) = \mathrm{grad}V(x,y) \cdot \mathbf{f}(x,y) = (2x, -2y) \cdot (y + x^3, x) = 2x^4 > 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Además $(0,0) \in \mathrm{Fr}(D)$ y $V(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathrm{Fr}(D)$. Por el Teorema 30 el punto crítico $(0,0)$ es inestable.

La principal desventaja de este método, que de hecho hace que su utilización sea cuando menos limitada, es la dificultad en encontrar la función V.

2.9. Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ es la siguiente:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(h)} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = -4(x+y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6,\ y(0) = -2. \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{(e)} \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

(a) $\begin{cases} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 4x + 3y + 5z + e^{t}\sin 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$

(c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 3. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0. \end{cases}$

4. Dados los siguientes sistemas lineales, decidir si son estables o no.

(a) $\begin{cases} x' = x - 5y + 5z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 3z. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = -3x + 3y - 3z. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = -x - 2z, \\ y' = 3x - 2y, \\ z' = 4x + z. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = -9x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -4x + 4y - 2z. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = -2x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 0. \end{cases}$

5. Obtener los puntos críticos de los siguientes sistemas y determinar si son o no hiperbólicos:

(a) $\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = y - e^{x} \\ y' = y + e^{-x} \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x' = -x^2 + xy - x + y \\ y' = -x^2 + y^2 + x - 4y + 2 \end{cases}$

6. Obtener el sistema linealizado en los puntos críticos de los sistemas del ejercicio 5. Determinar su diagrama de fases e indicar si es posible la naturaleza del punto crítico en un entorno del mismo.

7. Consideremos la ecuación de Van Der Pol

$$x'' + x - \varepsilon x'(1 - x^2) = 0$$

donde ε es un parámetro real. Transformar dicha ecuación en un sistema plano y determinar los puntos críticos del mismo. Determinar la naturaleza de los puntos críticos en función del parámetro ε.

8. Idem para la ecuación

$$x'' + 2\varepsilon x' + (1 - \varepsilon^2)x = 0.$$

9. Sea el sistema
$$\begin{cases} x' = x + (\varepsilon + 1)y \\ y' = 2(\varepsilon - 1)x + y \end{cases}$$
donde ε es un parámetro real. Se pide:

   a) Discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en función del parámetro ε.

   b) Esbozar el diagrama de fases del sistema para el valor $\varepsilon = 1$.

10. Sea el sistema
$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x + y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x + y)^2. \end{cases}$$
Determinar los puntos críticos del mismo y su hiperbolicidad. Determinar la naturaleza del punto crítico $(0, 0)$ a partir de la función $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

11. Idem para el sistema
$$\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases}$$
y la función $V(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$.

12. Idem con el sistema
$$\begin{cases} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{cases}$$
y la función $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

13. Idem con el sistema
$$\begin{cases} x' = x + x^2 + xy + y^2 \\ y' = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$
y la función $V(x, y) = x^2 - y^2$ definida sobre el conjunto del plano real $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < x\}$.

14. Un sistema
$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$
se dice Hamiltoniano si existe una función derivable $H(x, y)$ tal que $f_1(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$ y $f_2(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$, de tal manera que H es una integral primera del sistema. Se puede comprobar que para un punto crítico de un sistema Hamiltoniano, las funciones de Lyapunov pueden construirse sumando una constante a la función H. Con esta idea, verificar el carácter de los puntos críticos del sistema
$$\begin{cases} x' = y - y^2 \\ y' = x - x^2 \end{cases}$$