



Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
Ampliación de Matemáticas  
Hoja 6. Métodos Variacionales

1. Resuelve el siguiente problema variacional

$$\left. \begin{array}{l} \text{mín} \quad J(y) = \int_0^1 \frac{1}{2} y'(t)^2 dt \\ \text{s.a.} \quad \int_0^1 y(t) dt = a \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 1 \end{array} \right\}$$

2. Resuelve el problema

$$\begin{array}{l} \text{mín} \quad J(x, y) = \int_1^2 [(y')^2 - 2xy] dx \\ y(1) = 0; \quad y(2) = -1 \end{array}$$

3. Resuelve el problema

$$\begin{array}{l} \text{mín} \quad J(x, y) = \int_0^4 [xy' - (y')^2] dx \\ y(0) = 0; \quad y(4) = 3 \end{array}$$

4. Resuelve el problema

$$\begin{array}{l} \text{mín} \quad J(x, y) = \int_0^1 (3x - y) y dx \\ y(0) = 0; \quad y(1) = 1 \end{array}$$

5. Resuelve el problema

$$\begin{array}{l} \text{mín} \quad J(x, y) = \int_0^1 [y^3 + 3x^2 y'] dx \\ y(0) = 1; \quad y(1) = 1 \end{array}$$

6. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x, y) &= \int_0^1 [2xy - (y')^2 + 3y'y] dx \\ y(0) &= 1; \quad y(1) = -1 \end{aligned}$$

7. Hallar las extremales del problema isoperimétrico

$$\begin{aligned} \text{mín } J(y) &= \int_0^1 (y')^2 + x^2 dt \\ \text{s.a. } \int_0^1 y^2 dt &= 2 \\ x(0) &= 0; \quad x(1) = 0 \end{aligned}$$

8. Escribir la ecuación diferencial de las extremales del problema isoperimétrico sobre el extremo de la funcional

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x) &= \int_0^{t_1} p(t) \dot{x}^2(t) + q(t) x^2(t) dt \\ \text{s.a. } \int_0^{t_1} r(t) x^2(t) dt &= 1 \\ x(0) &= 0; \quad x(t_1) = 0 \end{aligned}$$

9. Hallar la extremal del problema isoperimétrico sobre el extremo del funcional:

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x) &= \int_0^1 \dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) - 4t\dot{x}_2(t) - 4x_2(t) dt \\ \text{s.a. } \int_0^1 \dot{x}_1^2(t) - t\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2^2(t) dt &= 2 \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0 \\ x_1(1) &= x_2(1) = 1 \end{aligned}$$

10. Sabiendo que la longitud de una curva que une dos puntos  $P = (a, A)$  y  $Q = (b, B)$  viene dada por la integral

$$L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

demuestra que la curva que une  $P$  con  $Q$  con menor longitud es la línea recta que los une.

11. Resuelve para los distintos valores de  $a$  el problema siguiente

$$\begin{aligned} \text{mín } J(y) &= \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx \\ y(0) &= 0; \quad y(1) = a \end{aligned}$$

12. Resuelve, si es posible, el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \text{mín } J(y) &= \int_0^1 \frac{1}{2} (y' - x)^2 dx \\ y(0) &= 1, \quad y(1) = 2 \end{aligned}$$

13. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x, y) &= \int_0^1 [xy' - y^2] dx \\ y(0) &= 0; \quad y(1) = 1 \end{aligned}$$

14. (\*) Halla una curva  $y(x)$  con  $y(a) = y(b) = 0$ , de longitud dada  $l_0 > b - a$ , de modo que junto con el segmento  $a \leq x \leq b$ , limite una figura de área máxima, es decir, resuelve el problema siguiente

$$\begin{aligned} \text{máx } \int_a^b y(x) dx \\ y(a) = y(b) = 0 \\ \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = l_0 \end{aligned}$$

(Ayuda: La solución general es un arco de circunferencia  $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2$ )

15. (\*) Geodésicas sobre una superficie: Sea  $\varphi(x, y, z) = 0$  una superficie lisa regular en  $R^3$  ( $\varphi \in C^1(D)$ ), con  $D \subseteq R^3$ , y además  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \neq 0$ . Buscamos una curva  $(x(t), y(t), z(t))$  que una los puntos  $(x_0, y_0, z_0)$  y  $(x_1, y_1, z_1)$  situados sobre la superficie y que sea un extremal para el funcional de la longitud de arco

$$J = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

es decir, buscamos extremales del funcional anterior que cumplan las condiciones

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

$$x(a) = x_0 \quad y(a) = y_0 \quad z(a) = z_0$$

$$x(b) = x_1 \quad y(b) = y_1 \quad z(b) = z_1$$

Resuelve el problema cuando:

a)  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

b)  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$

16. Resuelve para los distintos valores de  $a$ , el problema siguiente

$$\text{mín } J(y) = \int_0^2 (yy' + [y']^2) dx$$

a) Con extremos fijos

$$y(0) = 1; \quad y(2) = a$$

b) Con extremos variables

$$y(0) = 1; \quad y(2) \quad \text{libre}$$

17. Resuelve el siguiente problema

$$\text{mín} \quad J(y) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left( (y')^2 + y^2 \right) dx$$

para los siguientes casos:

a) Extremos fijos:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 1$$

b) Extremo inferior libre:

$$y(0) \text{ libre}; \quad y(1) = 1$$

c) Extremo superior libre

$$y(0) = 0; \quad y(1) \text{ libre}$$

d) Ambos extremos libres

$$y(0) \text{ libre}; \quad y(1) \text{ libre}$$

18. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad J(y) &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left( (y')^2 + y^2 \right) dx \\ \text{sujeto a} \quad &\int_0^1 y(x) dx = 1 \\ &y(0) = 0; \quad y(1) = 1 \end{aligned}$$

---

(\*) Ejercicios con dificultad especial.