Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Ampliación de Matemáticas
Hoja 4. Transformada de Fourier. Aplicaciones

1. Encontrar la transformada de Fourier de las siguientes funciones ($a > 0$):

   (a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \pi/2, \\ 0 & |x| \geq \pi/2. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} a - |x| & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -2, \\ -1 & x \in (-2, -1), \\ 1 & x \in (-1, 1), \\ -1 & x \in (1, 2), \\ 0 & x > 2, \end{cases}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & |x| \leq \pi/a, \\ 0 & |x| > \pi/a. \end{cases}$

2. Sea $f(t)$ una señal con transformada de Fourier $\mathcal{F}[f](z)$. Demostrar que

$$\mathcal{F}[e^{iwt} f(t)](z) = \mathcal{F}[f](z - w).$$

   Este resultado es conocido como la propiedad del despalzamiento en frecuencia y es la base del proceso de modulación en teoría de la comunicación. Como aplicación calcular la trasformada de Fourier de las siguientes funciones:

   (a) $f(t) = h_0(t + 1/2) - h_0(t - 1/2)$, siendo h_0 la función de Heviside.

   (b) $f(t) = [h_0(t + 1/2) - h_0(t - 1/2)] \cos(wt)$. **Ayuda:** poner el coseno como combinación de exponenciaes complejas.

   (c) $f(t) = [h_0(t + 1) - h_0(t - 1)] \sin(2t)$.

3. Calcular la convolución $f * f$ es los siguientes casos ($a > 0$):

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

   (b) $f(x) = e^{-|x|}$.

4. Calcular la transformada de Fourier inversa de la función $F(z) = e^{-z^2}/(1 + z^2)$.

5. Si $g(t) = f(t - a)$, demostrar la fórmula

$$\mathcal{F}[g](z) = e^{-iza} \mathcal{F}[f](z).$$

6. Resolver el problema
$$\left\{\begin{array}{l} u_t = u_{xx},\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(0,x) = f(x),\ x\in\mathbb{R}, \end{array}\right.$$
donde:

   (a) $f(x) = e^{-ax^2}$.
   (b) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & |x|<a, \\ 0 & |x|\geq a. \end{array}\right.$
   (c) $f(x) = h_0(x)$ siendo h_0 la función de Heaviside.

7. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la solución formal del problema
$$\left\{\begin{array}{l} u_t = u_{xx} + a u_x,\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(0,x) = f(x),\ x\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

8. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la solución formal del problema
$$\left\{\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x\in\mathbb{R},\ 0<y<1, \\ u(x,0) = 0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(x,1) = f(x),\ x\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

9. Supongamos un circuito eléctrico LRC donde $L = 0.02H$, $R = 300\Omega$ y $C = 4\times 10^{-6}F$. Determinar las salidas en régimen estacionario para los potenciales

   (a) $V(t) = \sin t$.
   (b) $V(t) = \cos t$.
   (c) $V(t)$ es la función 0.02 periódica tal que
$$V(t) = \left\{\begin{array}{ll} 10 & si\ t\in[0,0.01), \\ 0 & si\ t\in[0.01,0.02). \end{array}\right.$$

10. Repetir el ejecicio 9 para el caso $L = 0.4H$, $R = 100\Omega$ y $C = 10^{-5}F$, siendo el potencial $V(t)$ es una función 0.04 periódica tal que
$$V(t) = \left\{\begin{array}{ll} 10 & si\ t\in[0,0.02), \\ -10 & si\ t\in[0.02,0.04). \end{array}\right.$$

11. Determinar la función de transferencia de frecuencias de los ejercicios de los circuitos de los ejercicios 9 y 10, y determinar la relación entre las transformadas de Fourier de la respuesta de los sistemas a los voltajes:

   (a) $V(t) = \left\{\begin{array}{ll} 10 & si\ t\in[0,0.01), \\ 0 & si\ t\in[0.01,0.02). \end{array}\right.$
   (b) $V(t) = \left\{\begin{array}{ll} 10 & si\ t\in[0,0.02), \\ -10 & si\ t\in[0.02,0.04). \end{array}\right.$