Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Ampliación de Matemáticas
Hoja 3. Ecuaciones en Derivadas Parciales

1. Encontrar las soluciones de los siguientes problemas de contorno:

   (a) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(L) = 0.$
   (b) $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(L) = 0.$
   (c) $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(L) = 0.$
   (d) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) - y'(\pi) = 0.$
   (e) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) - y'(0) = 0,\ y(1) = 0.$
   (f) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) - y'(0) = 0,\ y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

2. Para qué valores de λ tienen soluciones no triviales los siguientes problemas de contorno:

   (a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$
   (b) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi).$

3. Clasificar las siguientes EDP y encontrar su forma canónica:

   (a) $3u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0.$
   (b) $4u_{xx} + u_{xy} + 4u_{yy} + u = 0.$
   (c) $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 4u_y + 25u = 0.$
   (d) $u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_x - u_y + u = 0.$
   (e) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = 0.$

4. Encontrar los desarrollos en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas (se da su valor en el intervalo $[-l, l]$ con $2l$ el periodo).

   (a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0), \\ 1 & x \in [0, 1]. \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 2]. \end{cases}$
   (c) $f(x) = x,\ x \in [-1, 1].$
   (d) $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-1, 0), \\ x & x \in [0, 1]. \end{cases}$
   (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 1), \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$
   (f) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-2, 1), \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-L, 0), \\ e^x & x \in [0, L]. \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in [-L, 0), \\ e^x & x \in [0, L]. \end{cases}$

5. Los extremos de una barra de aluminio ($\alpha^2 = 0.86$) de longitud 10 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales

   (a) $u(0, y) = 70$, $0 \leq y \leq 10$.

   (b) $u(0, y) = 70 \cos y$, $0 \leq y \leq 10$.

   (c) $u(0, y) = \begin{cases} 10y & y \in [0, 5), \\ 10(10 - y) & y \in [5, 10]. \end{cases}$

   (d) $u(0, y) = \begin{cases} 0 & y \in [0, 3), \\ 65 & y \in [3, 10]. \end{cases}$

6. Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1.14$) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales

   (a) $u(0, y) = 65 \cos^2(\pi y)$, $0 \leq y \leq 2$.

   (b) $u(0, y) = 70 \sin y$, $0 \leq y \leq 2$.

   (c) $u(0, y) = \begin{cases} 60x & x \in [0, 1), \\ 60(2 - x) & x \in [1, 2]. \end{cases}$

   (d) $u(0, y) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ 75 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

7. Un estado de equilibrio para la ecuación del calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ es aquella que no varía con el tiempo. Demostrar

   (a) Todos los equilibrios de la ecuación del calor son de la forma $u(y) = A + By$.

   (b) Encontrar los estados de equilibrio de la ecuación del calor que cumplen $u(t, 0) = T_1$ y $u(t, L) = T_2$.

   (c) Resolver el problema

   $$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0, 1), \\ u(0, y) = 75, \ 0 < y < 1, \\ u(t, 0) = 20, \ u(t, L) = 60, \ t > 0. \end{cases}$$

   Ayuda: Calcularla como $u(t, y) = v(y) + w(t, y)$ donde $v(y)$ es el estado de equilibrio asociado a las condiciones de contorno $u(t, 0) = 20$, $u(t, L) = 60$, y $w(t, y)$ es la solución del problema con condiciones de contorno nulas.

8. Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1.14$) de longitud 10 centímetros se mantienen a temperatura de 0^oC mientras que el centro de la barra es mantenido a 100^oC mediante una fuente de calor externa. Encontrar la temperatura de la barra con el tiempo para la condición inicial

   $$u(0, y) = \begin{cases} 50 & x \in [0, 5), \\ 100 & x \in [5, 10]. \end{cases}$$

   Ayuda: Descomponer el problema en dos problemas de contorno con uno de los estremos en la mitad de la barra.

9. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{yy} + u, \ t > 0, \ y \in (0,1), \\ u(0,y) = \cos y, \ 0 < y < 1, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,L) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

10. Resolver los siguientes problemas

(a) $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,2\pi), \\ u(0,y) = \cos y - 1, \ 0 < y < 2\pi, \\ u_t(0,y) = 0, \ 0 < y < 2\pi, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,2\pi) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 0, \ 0 < y < 1, \\ u_t(0,y) = 1, \ 0 < y < 1, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,1) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,3), \\ u(0,y) = f(y), \ 0 < y < 3, \\ u_t(0,y) = 0, \ 0 < y < 3, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,3) = 0, \ t > 0. \end{cases} \quad \text{donde } f(y) = \begin{cases} x & x \in [0,1), \\ 1 & x \in [1,2), \\ 2 - x & x \in [2,3]. \end{cases}$$

11. Una cuerda de 10 metros fijada en sus extremos se levanta por el medio hasta la distancia de un metro y se suelta. Describe su movimiento suponiendo que $c^2 = 1$.

12. Demuestra que el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \tau = y + ct, \\ \xi = y - ct, \end{cases}$$

transforma la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{yy}$ en la ecuación $u_{\tau\xi} = 0$. Concluir que la solución general de la ecuación será de la forma

$$u(t,y) = F(y - ct) + G(y + ct)$$

para funciones apropiadas F y G.

13. Demostrar que la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, \ t > 0, \ y \in (0,L), \\ u(0,y) = f(y), \ 0 < y < L, \\ u_t(0,y) = g(y), \ 0 < y < L, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,3) = 0, \ t > 0, \end{cases}$$

es de la forma

$$u(t,y) = \frac{1}{2}\left(F(y - ct) + F(y + ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{y-ct}^{y+ct} g(x)dx,$$

donde F es la extensión $2l$ periódica e impar de f.

14. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy} + u, \ t > 0, \ y \in (0,L), \\ u(0,y) = f(y), \ 0 < y < L, \\ u_t(0,y) = 0, \ 0 < y < L, \\ u(t,0) = 0, \ u(t,3) = 0, \ t > 0, \end{cases}$$

15. Resolver los problemas

(a) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) = 0, \ 0 < x < a, \\ u(x, b) = g(x), \ 0 < x < a, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \ 0 < y < b. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, \ 0 < x < a, \\ u(0, y) = g(y), \ 0 < y < b, \\ u(a, y) = 0, \ 0 < y < b. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u(x, 0) = f(x), \ 0 < x < a, \\ u(x, b) = 0, \ 0 < x < a, \\ u(0, y) = g(y), \ 0 < y < b, \\ u(a, y) = 0, \ 0 < y < b. \end{cases}$

16. Resolver los problemas de Neuman

(a) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0, \ 0 < x < a, \\ u_x(0, y) = f(y), \ 0 < y < b, \\ u_x(a, y) = 0, \ 0 < y < b. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u_x(0, y) = u_x(b, y) = 0, \ 0 < y < b, \\ u_x(x, 0) = f(x), \ 0 < x < a, \\ u_x(x, b) = 0, \ 0 < x < a. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u_x(0, y) = 1, \ 0 < y < b, \\ u_x(b, y) = 0, \ 0 < y < b, \\ u_x(x, 0) = 1, \ 0 < x < a, \\ u_x(x, b) = 0, \ 0 < x < a. \end{cases}$

17. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u, \ (x, y) \in (0, 1)^2, \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \ 0 < x < 1, \\ u(0, y) = f(y), \ 0 < y < 1, \\ u(1, y) = 0, \ 0 < y < 1. \end{cases}$$