

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2011/12

EXAMEN FINAL DE JUNIO. 25-6-2012

1. (20 puntos) Dado el sistema definido por el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 25y = \sin(2t), \\ y(0) = y_0; y'(0) = y_1, \end{cases}$$

se pide:

- (a) Demostrar que el sistema es asintóticamente estable.
- (b) Encontrar la respuesta al sistema en la fase estacionaria, es decir, cuando el tiempo es suficientemente grande.

Solución: (a) La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + 6z + 25}$$

cuyos polos son

$$\frac{-12 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{-12 \pm 8i}{2} = -6 \pm 4i,$$

y dado que su parte real es negativa el sistema es asintóticamente estable.

(b) Dado que el sistema es asintóticamente estable, la respuesta al mismo a largo plazo viene dado por

$$y(t) = |T(2i)| \sin(2t + \arg T(2i)).$$

Como

$$T(2i) = \frac{1}{-4 + 12i + 25} = \frac{21 - 12i}{585} = \frac{1}{195}(7 - 4i),$$

y dado que

$$|T(2i)| = \frac{1}{3\sqrt{65}}$$

y

$$\arg(T(2i)) = \arctan \frac{4}{7}$$

tenemos que

$$y(t) = \frac{1}{3\sqrt{65}} \sin(2t + \arctan \frac{4}{7}).$$

3. (20 puntos) Resolver el siguiente problema de condiciones iniciales haciendo uso de la transformada de Laplace

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = t \cos t, \\ y(0) = 0; y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución: Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta las propiedades de la misma y que

$$\mathcal{L}[t \cos t](z) = -\frac{d}{dz} \mathcal{L}[\cos t](z) = \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2},$$

el problema de condiciones iniciales anterior se transforma en el problema algebraico

$$(z^2 + 2z + 1)\mathcal{L}[y](z) - 1 = \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)^2}.$$

Por la linealidad de la transformada de Laplace inversa, calculamos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right](t) = \text{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^2}, -1\right) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} e^{zt} = te^{-t}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)^2}\right](t) &= \text{Res}\left(\frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)^2}, -1\right) + \text{Res}\left(\frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)^2}, i\right) \\ &\quad + \text{Res}\left(\frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)^2}, -i\right) \\ &= -\frac{e^{-t}}{2} + te^{it}\frac{i}{4} + e^{it}\frac{1+i}{4} - te^{-it}\frac{i}{4} + e^{-it}\frac{1-i}{4} \\ &= -\frac{e^{-t}}{2} - \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z+1)(z^2+1)^2}\right](t) \\ &= te^{-t} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t. \end{aligned}$$

4. (20 puntos) Resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & x + y + z \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 = 1, \\ & 3x + 2z \leq 1. \end{array}$$

Solución: Si $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ y $h(x, y, z) = 3x + 2z - 1$, se verifica que los vectores ∇g y ∇h son linealmente independientes en el conjunto factible por lo que todos los puntos son regulares. Planteamos entonces el Lagrangiano

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(3x + 2z - 1),$$

y planteamos las condiciones

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda + 3\mu = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\mu = 0, \quad (3)$$

junto con la condición de ligadura

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (4)$$

y la de holgura

$$\mu(3x + 2z - 1) = 0. \quad (5)$$

De la ecuación (3) tenemos que $\mu = -1/2$ por lo que $\mu = 0$ no es posible y la condición de holgura se reduce necesariamente a

$$3x + 2z = 1.$$

Resolviendo el sistema resultante tenemos las posibles soluciones

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}, y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, z = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right), \lambda = \frac{\sqrt{5}}{4}, \mu = -\frac{1}{2},$$

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, y = \frac{2\sqrt{5}}{5}, z = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right), \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{4}, \mu = -\frac{1}{2},$$

que son ambas factibles. El Hessiano es

$$HL(x, y, z, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que obviamente es semidefinido positivo si $\lambda > 0$, por lo que el único máximo posible es

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{5}, y = \frac{2\sqrt{5}}{5}, z = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right), \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{4}, \mu = -\frac{1}{2}.$$

El espacio tangente ampliado es

$$\begin{aligned} M \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) \right) &= \{(x, y, z) : x = 2y, 3x + 2z = 0\} \\ &= \{(x, 2x, -3x/2) : x \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} (x, 2x, -3x/2) HL \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right), -\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -\frac{3x}{2} \end{pmatrix} \\ = (x, 2x, -3x/2) \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -\frac{3x}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3\sqrt{5}}{2} x^2 < 0 \end{aligned}$$

si $x \neq 0$, por lo que es definida negativa y por tanto el máximo es $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right)$.