Prácticas de Series de Fourier

Jose Salvador Cánovas Peña y Silvestre Paredes Hernández
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice general

Capítulo 1

Prácticas de Series de Fourier

1.1. Series de Fourier

Maxima tiene varias sentencias para calcular las series de Fourier de funciones periódicas disponibles en el paquete **fourie**. Para usarlas, previamente hemos de cargar dicho paquete tecleando

$$load(''fourie''),$$

que al introducirlo nos dará una sentencia indicándonos que el paquete ha sido cargado.

Una vez cargado, si suponemos que $f(t)$ es una función $2T$-periódica, la sentencia

fourier(f(t),t,T)

nos devuelve una lista con los coeficientes de Fourier de dicha función, es decir nos da

$$-\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\pi t/T)+b_k\sin(k\pi t/T)]$$

donde

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos(k\pi t/T)dt, \\ b_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin(k\pi t/T)dt. \end{aligned}$$

Por ejemplo

(%i1)fourier(t+t^2,t,2)

nos da la salida

$$(\%t1)\ a_0=\frac{4}{3}$$

$$(\%t2)\ a_n=\frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n}-\frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3}+\frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t3)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%o3)\ [\%t1, \%t2, \%t3]$$

que se corresponde con los coeficientes de Fourier de la mencionada función. Como vemos, puede ser útil disponer de sentencias que simplifiquen los coeficientes $\sin(n\,\%pi) = 0$ y $\cos(n\,\%pi) = (-1)^n$. Para ello tenemos la sentencia **foursimp**(expresion) que simplifica $sin(n\,\%pi)$ a 0 si **sinnpiflag** vale true y $cos(n\,\%pi)$ a $(-1)^n$ si **cosnpiflag** vale true. Las variables **sinnpiflag** y **cosnpiflag** son por tanto opcionales y valen **true** por defecto. Así, si tecleamos

($\%i4$) foursimp(fourier(t+t^2,t,2))

nos devuelve las salidas anteriores y sus simplificaciones

$$(\%t4)\ a_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\%t5)\ a_n = \frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t6)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%t7)\ a_0 = \frac{2^2}{3}$$

$$(\%t8)\ a_n = \frac{16(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%t9)\ b_n = -\frac{4(-1)^n}{\pi n}$$

$$(\%o9)\ [\%t7, \%t8, \%t9]$$

Como sabemos, las series de Fourier tienen una forma especial para el caso de funciones pares o impares, ya que en estos casos los coeficientes del seno o coseno se hacen nulos. Supongamos una función $f(t)$ definida en $[0, T]$ a la que extendemos de forma par en $[-T, T]$ y $2T$–periódica a toda la recta real. Dicha función solo tendrá coeficientes coseno no nulos y su serie la obtenemos como

fourcos(f(t),t,T),

y cuyos coeficientes se tienen la expresión

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(kt)dt,$$

Si la extensión de $f(t)$ a $[-T, 0]$ es impar, la serie sólo tendrá coeficientes seno que se calculan con la sentencia

foursin(f(t),t,T),

con coeficientes

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(kt)dt.$$

Por ejemplo

$$(\%i10)\ \text{foursimp(fouriercos(t\^{}2,t,2))}$$

nos devuelve la salida

$$(\%t10)\ a_0 = \frac{7}{3}$$

$$(\%t11)\ a_n = \frac{12\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{16\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{20\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%t12)\ a_0 = \frac{7}{3}$$

$$(\%t12)\ a_n = \frac{4\,(5(-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%o12)\ [\%t11,\ \%t12] \tag{1.1}$$

mientras que

$$(\%i13)\ \text{foursimp(fouriersin(t\^{}2,t,2))}$$

produce la respuesta

$$(\%t13)\ b_n = \frac{20\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{12\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{16\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3} - \frac{16}{\pi^3 n^3}$$

$$(\%t14)\ b_n = -\frac{4\,(3\pi^2 n^2(-1)^n - 4(-1)^n + 4)}{\pi^3 n^3}$$

$$(\%o14)\ [\%t14]$$

Démonos cuenta de que fouriersin(t^2,t,%pi) no es el desarrollo de t^2 como una función definida en $[-\pi,\pi]$ sino de la extensión 2π–periódica de la función impar

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 & t\in[-1,0], \\ t^2 & t\in[0,1]. \end{cases}$$

Si tenemos los coeficientes de Fourier de una cierta función $2T$–periódica hasta un cierto valor n (pudiendo ser ∞, esto es **inf**), podemos construir su serie de Fourier, o mejor dicho, una aproximación de esta con la sentencia **fourexpand** que tiene la sintaxis

fourexpand(lista,t,T,n),

donde lista es un conjunto de coeficientes de Fourier que previamente habremos calculado. Así, por ejemplo, podemos construir los desarrollos en series de Fourier de los ejemplos anteriores hasta orden 5 tecleando

$$(\%i15)\ l : \text{fourier(t+t\^{}2,t,2)}$$

$$(\%t15)\ a_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\%t16)\ a_n = \frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t17)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%o17)\ [\%t1,\ \%t2,\ \%t3]$$

$$(\%i18)\ \text{fourexpand(l,t,2,2)}$$

$$(\%o18)\ \frac{2\sin(\pi t)}{\pi} + \frac{4\cos(\pi t)}{\pi^2} + \frac{\sin(\frac{\pi t}{2})}{\pi} - \frac{16\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\pi^2} + \frac{4}{3}$$

o

$$(\%i19)\ \text{fourexpand(l,t,2,inf)}$$

$$(\%o19)\ -\frac{4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n}}{\pi} + \frac{16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n^2}}{\pi^2} + \frac{4}{3}$$

Esta operación puede hacerse automáticamante con la sentencia **totalfourier** cuya sintaxis es

totalfourier(f,x,T)

y que devuelve la serie de Fourier completa esto es

$$\mathbf{fourexpand}(\mathbf{foursimp}(\mathbf{fourier}(\mathbf{f},\mathbf{x},\mathbf{p})),\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{'inf})$$

Por ejemplo si tecleamos

$$(\%i20)\ \text{totalfourier(t+t\^{}2,t,2)}$$

obtenemos

$$(\%t20)\ a_0 = \frac{4}{3}$$

$$(\%t21)\ a_n = \frac{\frac{16\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{32\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{32\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}}{2}$$

$$(\%t22)\ b_n = \frac{\frac{8\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{8\cos(\pi n)}{\pi n}}{2}$$

$$(\%t23)\ a_0 = \frac{2^2}{3}$$

$$(\%t24)\ a_n = \frac{16(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$(\%t25)\ b_n = -\frac{4(-1)^n}{\pi n}$$

$$(\%o25)\ -\frac{4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n}}{\pi} + \frac{16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)}{n^2}}{\pi^2} + \frac{4}{3}$$

Exercise 1 *Obtener los desarrollos de Fourier y de seno y coseno de orden 10 e infinito de las funciones siguientes:*

1. $\cos t$ *definida en* $[0, \pi]$.

2. $\sin(2t)$ *definida en* $[0, \pi]$.

3. t^3 *definida en* $[0, 1]$.

4. $e^t t$ *definida en* $[0, 6]$.

5. $\cos t$ *definida en* $[0, 2\pi]$.

Exercise 2 *Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1{,}14$) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales*

1. $u(0, y) = 65\cos^2(\pi y)$, $0 \le y \le 2$.

2. $u(0, y) = 70 \sin y$, $0 \le y \le 2$.

3. $u(0, y) = y$, $0 \le y \le 2$.

Nota: *Tomar desarrollos en serie de Fourier de orden 5 y 10 y representar la solución gráficamente.*

1.2. Sobre funciones continuas a trozos

Todo lo que hemos visto anteriormente no funciona si tenemos una función continua a trozos como por ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [-2, 0), \\ 1 - t & t \in [0, 2]. \end{cases}$$

Si deseamos calcular los coeficientes de Fourier, debemos calcular las integrales que las definen directamente. Así, los coeficientes de la función anterior los calculamos como

integrate(t,t,-2,0)+integrate((1-t),t,-2,0)

que da el valor

$$2$$

foursimp(integrate(t*sin(n* %pi*t/2),t,-2,0)+integrate((1-t)*sin(n* %pi*t/2),t,0,2));

que nos da

$$0$$

foursimp(integrate(t*sin(n* %pi*t/2),t,-2,0)+integrate((1-t)*sin(n* %pi*t/2),t,0,2));

que nos daría

$$\frac{2\left((-1)^n + 1\right)}{\pi n} - \frac{4(-1)^n}{\pi n}$$

por lo que la serie de Fourier es

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left((-1)^n + 1\right)}{\pi n} - \frac{4(-1)^n}{\pi n} \right) \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Exercise 3 *Encuentre los desarrollos en serie de Fourier de orden 10 de las siguientes funciones periódicas (se da su valor en el intervalo $[-L, L]$ con $2L$ el periodo).*

1. $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0), \\ 1 & x \in [0, 1]. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 2]. \end{cases}$

3. $f(x) = x, \; x \in [-1, 1].$

4. $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-1, 0), \\ x & x \in [0, 1]. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-2, 0), \\ 0 & x \in [0, 1), \\ 1 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

Exercise 4 *Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1{,}14$) de longitud 2 metros se mantienen a temperatura de 0^oC. Encontrar la expresión de la temperatura de la barra para las siguientes condiciones iniciales*

1. $u(0, y) = \begin{cases} 60x & x \in [0, 1), \\ 60(2 - x) & x \in [1, 2]. \end{cases}$

2. $u(0, y) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ 75 & x \in [1, 2]. \end{cases}$

Nota: *Tomar desarrollos en serie de Fourier de orden 5 y 10 y representar la solución gráficamente.*

Exercise 5 *Resolver el problema*

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{yy}, \; t > 0, \; y \in (0, 3), \\ u(0, y) = f(y), \; 0 < y < 3, \\ u_t(0, y) = 0, \; 0 < y < 3, \\ u(t, 0) = 0, \; u(t, 3) = 0, \; t > 0. \end{cases}$$

donde $f(y) = \begin{cases} x & x \in [0, 1), \\ 1 & x \in [1, 2), \\ 2 - x & x \in [2, 3]. \end{cases}$

Nota: *Tomar desarrollos en serie de Fourier de orden 5 y 10 y representar la solución gráficamente.*