Prácticas de transformadas de Laplace

Jose Salvador Cánovas Peña y Silvestre Paredes Hernández
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice general

Capítulo 1

Transformada de Laplace

1.1. Transformada de Laplace

En general *Maxima* tiene implementada una sentencia para obtener la transformada de Laplace de la mayoría de las funciones que conocemos. Para calcular la transformada de Laplace de una función $f(t)$ tenemos la sentencia laplace, cuya sintaxis es

```
laplace(f(t),t,z)
```

donde t es la variable de la que depende la función $f(t)$ y z es la variable independiente de la transformada de $f(t)$. Por ejemplo, si tecleamos

```
laplace(sin(t),t,z)
```

obtenemos la salida

$$\frac{1}{1+z^2}.$$

La función laplace reconoce las funciones elementales, así como derivadas y primitivas de estas, combinadas con las sentencias de Maxima que permiten obtener derivadas y primitivas de funciones. Por ejemplo, si tecleamos

```
laplace(derivative(sin(t),t),t,z)
```

obtenemos la transformada del coseno

$$\frac{z}{1+z^2},$$

mientras que

```
laplace(integrate(sin(t),t),t,z)
```

obtendremos

$$-\frac{z}{1+z^2}.$$

También es capaz de trabajar con funciones de Heaviside, siendo $h_0(t)$ llamada como **unit_step**, por lo que tecleando

```
laplace(unit_step(t),t,z)
```

obtenemos la salida

$$\frac{1}{z}.$$

Si queremos teclear la función de Heaviside $h_a(t)$ para $a > 0$, basta darse cuenta que esta no es otra que $h_0(t-a)$. Por ejemplo, si tecleamos

```
laplace(unit_step(t-2),t,z)
```

obtenemos

$$\frac{\%e^{-2z}}{z}$$

que es su transformada de Laplace.

Exercise 1 *Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones*

$$(a)\ f(t) = \sin(3t) \quad (b)\ f(t) = e^{5t} \quad (c)\ f(t) = e^{5t}\cos 3t \quad (d)\ f(t) = te^{t}$$

$$(e)\ f(t) = t^3 - t \quad (f)\ f(t) = \sinh t \quad (g)\ f(t) = \cos t \sin t \quad (h)\ f(t) = e^{t}\cos t \sin(2t)$$

Exercise 2 *Calcular la transformada de Laplace de la función,*

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 1, & \text{si } 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Exercise 3 *Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.*

$$(a)\ f(t) = t\sin t \quad (b)\ g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ t, & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad (c)\ h(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 2, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

1.2. Transformada de Laplace inversa

Para calcular la transformada inversa tenemos la sentencia ilt, que se escribe según la regla

ilt(f(z),z,t)

donde t y z tienen el mismo rol que en el caso anterior. Calcula la transformada inversa de Laplace de funciones $f(z)$ que sean fracciones de polinomios cuyo denominador tenga sólo factores lineales y cuadráticos y sus potencias. Por ejemplo

ilt(1/(1+z^2),z,t)

nos devolverá la salida

sin(t).

En general habrá que descomponer cualquier cociente de polinomios en fracciones simples y posteriormente obtener su transformada de Laplace inversa. Para reducir un polinomio a fracciones simples podemos utilizar la sentencia **partfrac**, cuya sintaxis es

partfrac(f(z),z)

que descompondrá la función racional f(z). Por ejemplo, tomemos la fracción

$$\frac{1}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4}$$

y tecleamos

partfrac(1/(z^4-4*z^3+5*z^2-4*z+4),z)

dará la salida

$$\frac{4z+3}{25(z^2+1)} - \frac{4}{25(z-2)} + \frac{1}{5(z-2)^2}.$$

Tecleando ahora

ilt((4*z+3)/(1+z^2),z,t)

obtenemos

$$3sin(t) + 4cos(t),$$

posteriormente

ilt(1/(z-2),z,t)

$$\%e^{2t}$$

y finalmente

```
ilt(1/(z-2)^2,z,t)
```

$$t\,\%e^{2t}$$

obtenemos la transformada de Laplace inversa de $\frac{1}{z^4-4z^3+5z^2-4z+4}$ la construimos por linealidad como

$$\frac{1}{25}(3sin(t)+4cos(t))-\frac{4}{25}e^{2t}+\frac{1}{5}te^{2t}.$$

Para obtener la transformada de Laplace inversa de funciones de la forma

$$e^{-az}f(z),$$

donce f(z) es un cociente de polinomios, necesariamente hemos de utilizar el segundo teorema de traslación.

Exercise 4 *Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones siguientes*

$$\text{(a) } F(z)=\frac{z^2}{1+z^3} \quad \text{(b) } F(z)=\frac{1}{(z-\mathbf{i})(z^2-2)} \quad \text{(c) } F(z)=\frac{z+7}{z^2+2z+5}$$

$$\text{(d) } F(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)(z^2+2z+10)}$$

Exercise 5 *Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:*

$$\text{(a) } F(z)=\frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5} \quad \text{(b) } F(z)=\frac{(z-1)e^{-z}}{z^3+2} \quad \text{(c) } F(z)=\frac{z+1}{e^z z^2(z^2+9)} \quad \text{(d) } F(z)=\frac{z+1}{z^4}$$

1.3. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Como sabemos, la transformada de Laplace se puede aplicar a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Supongamos la ecuación

$$\begin{cases} y''+y=\sin t, \\ y(0)=1, y'(0)=0. \end{cases}$$

Para calcular la solución la transformamos utilizando la sentencia **laplace** si fuera necesario, obteniendo

$$(z^2+1)\mathcal{L}[y](z)-zy(0)-y'(0)-y(0)=\frac{1}{1+z^2},$$

y simplificando

$$(z^2+1)\mathcal{L}[y](z)=z+1+\frac{1}{1+z^2},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z)=\frac{z+1}{(z^2+1)}+\frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Usando la sentencia **ilt** construimos la solución de la forma

$$y(t)=\frac{1}{2}(-t\cos t+\sin t)+\cos t.$$

Por si fuera necesario, al final añadimos una sección de cómo resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas lineales con el programa Maxima.

Exercise 6 *Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:*

$$\left.\begin{array}{l} y'''(t)+5y''(t)+17y'(t)+13y(t)=1 \\ y(0)=y'(0)=1, \quad y''(0)=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y'(t)+3y(t)=e^{-2t} \\ y(0)=2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(t)+y'(t)-2y(t)=5e^{-t}\sin t \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y''(t)+y(t)=t \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-2 \end{array}\right\}$$

Exercise 7 *Utilizar la tranformada de Laplace para resolver el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y''+2y'+y=f(t), \\ y(0)=1, y'(0)=0. \end{cases}$$

donde $f(t)$ son la funciones del ejericio 3.

Exercise 8 *Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:*

$$(a)\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \\ x(0)=y(0)=1. \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x'=-4(x+y) \\ x'+4y'=-4y \\ x(0)=1,\ y(0)=0. \end{cases} \quad (c)\begin{cases} x'=3x+8y \\ y'=-3y-x \\ x(0)=6,\ y(0)=-2. \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} x'=x-z \\ y'=2y \\ z'=x+z \\ x(0)=-2,\ y(0)=2,\ z(0)=-1. \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} x'=y+z \\ y'=-x+z \\ z'=-x-y \\ x(0)=y(0)=z(0)=-1. \end{cases}$$

1.4. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Maxima

Si tenemos que resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma $AX=b$ donde A es una matriz de n filas por m columnas, X es una vector columna incógnita de n componentes y b es un vector de m componentes, disponemos de la sentencia

$$linsolve([expr\_1,...,expr\_m],[x\_1,...,x\_n]),$$

donde expr_1,...,expr_m son las m ecuaciones lineales que definen el sistema y x_1,...,x_n son las incógnitas del mismo. Para introducir las ecuaciones utilizamos el signo de igualdad =, como es usual. Por ejemplo, si queremos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$$

escribiremos

$$(\%i1)\ lin\,\mathrm{solve}([x+y+z=1,x+2*y=1],[x,y,z]);$$
$$(\%o1)[x=1-2*\ \%r1,y=\ \%r1,z=\ \%r1]$$

con lo que la solución del sistema depende del parámetro $r1$ y presenta la forma paramétrica

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=t \quad \text{donde } t\in\mathbb{R}. \\ z=t, \end{cases}$$

Dentro de la resolución de ecuaciones existen una serie de alternativas que a continuación pasamos a describir. Las alternativas vienen dados por funciones que tienen asignados el valor true si están activadas y false si no lo están. Según esten activadas o no dichas funciones el programa efectúa las operaciones y presenta resultados de una u otra forma. Para cambiar la asignación true o false basta con teclear

$$(i\,\%1)\ nombre\_funcion:true;$$
$$(o\,\%1)\ true$$

que asigna a la funcion el valor true y el correspondiente

$$(i\,\%1)\ nombre\_funcion : false;$$
$$(o\,\%1)\ false$$

para false. Para ver qué valor tiene una función en un determinado momento basta con ejecutarla. Veamos los parámetros o funciones más relevantes.

- **linsolve_params** Valor por defecto: true. Si linsolve_params es true, la función linsolve genera símbolos %r para representar parámetros arbitrarios para representar la solución de forma paramétrica. Si vale false, el resultado devuelto para un sistema es indeterminado elimina las ecuaciones dependientes y se expresa con la forma general. Por ejemplo

$$(\,\%i1)\ lin\,\text{solve}\,\_params : false;$$
$$(o\,\%1)\ false$$
$$(\,\%i2)\ lin\,\text{solve}([x+y+z=1, x+2*y=1],[x,y,z]);$$
$$(\,\%o2)[x=1-2*z, y=z]$$

- **globalsolve** Valor por defecto: false. Si se activa a true, al resolver el sistema asigna a las incógnitas el valor de las soluciones, de igual forma que se introducen las constantes. Por ejemplo

$$(\,\%i1)\ global\,\text{solve} : true;$$
$$(o\,\%1)\ true$$
$$(\,\%i2)\ lin\,\text{solve}([x+y+z=1, x+2*y=1],[x,y,z]);$$
$$(\,\%o2)[x : 1-2*\ \%r1, y :\ \%r1, z :\ \%r1]$$

- **programmode** Valor por defecto: true. Si cambiamos a false, linsolve muestra la solución con etiquetas de expresiones intermedias (%t). Por ejemplo

$$(\,\%i1)\ programmode : false;$$
$$(o\,\%1)\ false$$
$$(\,\%i2)\ lin\,\text{solve}([x+y+z=1, x+2*y=1],[x,y,z]);$$
$$(\,\%t2)\ x = 1-2*\ \%r1$$
$$(\,\%t3)\ y =\ \%r1$$
$$(\,\%t4)\ z =\ \%r1$$
$$(\,\%o2)[\,\%t2,\ \%t3,\ \%t4]$$

Finalemente, se admiten diferentes combinaciones de las funciones anteriores, es decir, algunas de ellas con valor false y otras true, lo que da lugar a diferentes maneras de representar las soluciones y ejecutar la funcion linsolve.

Exercise 9 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

$$(a)\ \left\{\begin{array}{l} x-y=-1 \\ -x+y=1 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{l} 2x+y+4z=0 \\ x-y+2z=4 \\ 2x+y-z=14 \\ 3x+z=18 \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{l} 2x+2y-3z=2 \\ -x+5y-4z=4 \\ x+7y-7z=7 \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{array}\right.$$

$$(e)\ \left\{\begin{array}{l} x+2y-3z+16t=4 \\ y+2z-3t=6 \\ -x-y+z+9t=-2 \end{array}\right. \qquad (f)\ \left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{array}\right.$$

Por ejemplo, el problema de condiciones iniciales anterior

$$\left\{ \begin{array}{c} y'' + y = \sin t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{array} \right.$$

lo podemos resolver de la siguiente manera.

$$(\%i1)\ eq : diff(y(t), t, 2) + y(t) = sin(t)\$$$

$$(\%i2)\ eq2 : laplace(eq, t, z)\$$$

$$(\%i3)\ linsolve(eq2, laplace(y(t), t, z));$$

$$(\%o3)\ [laplace(y(t), t, z) = \frac{y(0)z^3 + \left(\frac{d}{dt}y(t)|_{t=0}\right) z^2 + y(0)z + \left(\frac{d}{dt}y(t)|_{t=0}\right) + 1}{z^4 + 2z^2 + 1}]$$

Reescribimos la sentencia con los valores de las condiciones iniciales y calculamos la transformada de Laplace inversa,

$$(\%i4)\ ilt((z\hat{}3 + z + 1)/(z\hat{}4 + 2 * z\hat{}2 + 1), z, t)$$

Usando la sentencia **ilt** construimos la solución de la forma

$$y(t) = \frac{1}{2}(-t \cos t + \sin t) + \cos t.$$